This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06274653 6

PAA
Archiv

Archiv der
mathematik
und physik

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Fünfunddreissigster Theil.

Mit neun lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1860.

Druck der Königl. Universitäts-Buchdruckerei von F. W. Kunike
in Greifswald.

Inhaltsverzeichniss des fünfunddreissigsten Theils.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Arithmetik.		
II.	Entwicklung einer Function der vierten Rechnungsstufe in eine Reihe. Von Herrn Doctor F. Paugger in Gratz	I.	21
III.	Ueber die merkwürdigen Eigenschaften der drei simultanen Gleichungen: $a=\pm\frac{u-vw}{\sqrt{(1-v^2)(1-w^2)}}$, $b=\pm\frac{v-uw}{\sqrt{(1-u^2)(1-w^2)}}$, $c=\pm\frac{w-uv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}$. Von Herrn Franz Unferdinger an der k. k. Marine-Sternwarte in Triest	I.	32
VII.	Ueber das bestimmte Integral $\int_0^{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}} (a-bx^n)^{\frac{p}{q}} x^{m-1}dx.$ Von Herrn E. Bacaloglo in Leipzig . . .	I.	70
XIV.	Bemerkungen über das Rationalmachen der Nenner der Brüche. Von Herrn Dr. Zehfuss in Heidelberg	I.	117

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XIV.	Einfache Methode, die Reste der Zahl 9^9 bei der Division durch Primzahlen zu finden. Von Herrn A. Niegemann, ordentlichem Lehrer am katholischen Gymnasium in Cöln . . .	I.	119
XIV.	Fehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln, Stereotyp-Ausgabe von 1860 . .	I.	120
XVI.	Bedeutung und Gültigkeit der allgemeinen Formeln für t und s der arithmetischen und der geometrischen Progression für den Fall, dass das n dieser Formeln eine gebrochene Zahl ist. Von Herrn J. Helmes, Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Celle . . .	II.	136
XVIII.	Beiträge zur Theorie derjenigen Functionen, welche die Verallgemeinerung der hyperbolischen und cyclischen Cosinus und Sinus darstellen. Von Herrn C. Hellwig, Oberlehrer an der Realschule zu Erfurt	II.	186
XIX.	Direkte wissenschaftliche Begründung des üblichen Verfahrens bei der Division und Wurzel-Ausziehung in dekadischen Zahlen. Von Herrn A. Niegemann, ordentlichem Lehrer am katholischen Gymnasium in Cöln	II.	201
XX.	Die Lösung der Fermat'schen Aufgabe: Wegschaffung der Wurzelgrössen aus algebraischen Ausdrücken, in welchen solche als Summanden vorkommen. Freier Auszug aus einer handschriftlichen Arbeit des Hauptmanns a. D. Herrn Adolf von der Schulenburg in Magdeburg, angefertigt von Herrn Dr. Jacob Wilhelm Heinrich Lehmann in Spandow .	II.	207
XXI.	Summirung der unendlichen Reihe $S_x = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}$. Von Herrn Dr. am Ende zu Langensalza	II.	220
XXV.	Entwurf einer neuen Theorie der elliptischen Integrale. Von Herrn Doctor A. Weiler, Lehrer der Mathematik an der höheren Bürgerschule in Mannheim	IV.	408

Nr. der Abhandlung		Heft.	Seite.
XXVI.	Zur Integration der linearen Differentialgleichungen. Von Herrn Doctor A. Weiler, Lehrer der Mathematik an der höheren Bürgerschule zu Mannheim	IV.	440
XXVIII.	Einige Beiträge zur Theorie der Bernoullischen Zahlen und der Secanten-Coefficienten. Von Herrn Doctor G. F. Meyer in Hannover	IV.	449
XXIX.	Integralia quaedam definita. Auctore Dre. Christiano Fr. Lindman, Lect. Strengnesensi	IV.	475

Geometrie.

IV.	Eine Notiz über Wendelinien. Von Herrn E. Bacaloglo in Leipzig	I.	40
V.	Ueber Fusspunktcurven und Fusspunktflächen. Von Herrn E. Bacaloglo in Leipzig . . .	I.	41
VI.	Einiges über sphärische Curven. Von Herrn E. Bacaloglo in Leipzig	I.	57
IX.	Ueber homofokale Paraboloide. Von Herrn Doctor Otto Böklen zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg	I.	81
X.	Untersuchungen über einige Arten von Flächen. Von Herrn Doctor Otto Böklen zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg	I.	93
XI.	Ueber die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid. Von Herrn Doctor Otto Böklen zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg	I.	101
XII.	Ueber die Fläche des sphärischen Vierecks. Von Herrn Director Prof. Dr. Strehlke in Danzig	I.	104
XIV.	Auszug aus einem Schreiben des Herrn Rector Dr. Nagel in Ulm an den Herausgeber. (Ueber die Aufgabe in Thl. XXXIV. Heft I. Nr. II. S. 6.)	I.	118
XV.	Ueber die Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt. Von Herrn Ferdinand Kerz, Rittmeister in der Grossherzoglich Hessischen Gendarmerie zu Darmstadt	II.	121

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XVII.	Beiträge zur Lehre vom Maximum und Minimum. Von Herrn Brenner zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg	II.	157
XXVII.	Zusatz zu dem Aufsatze über die Fläche des sphärischen Vierecks in diesem Theile. Nr. XII. S. 104. Von Herrn Director Professor Doctor Strehlke in Danzig	IV.	447
XXX.	Solutio problematis geometrici. Auctore Dre. Christiano Fr. Lindman, Lect. Strengnesensi	IV.	481

Trigonometrie.

I.	Merkwürdige Erweiterung der Formeln der ebenen Trigonometrie auf ein System von drei sich nicht schneidenden Geraden im Raume. Von dem Herausgeber . . . . . (S. die beiden Abhandlungen des Herrn Professor Dr. Strehlke in Danzig über die Fläche des sphärischen Vierecks unter Geometrie Nr. XII. S. 104. und Nr. XXVII. S. 447.)	I.	1

Geodäsie.

VIII.	Die Zahlenformel für den mittleren Krümmungshalbmesser des Erdsphäroids. Von Herrn Theodor Andres, k. k. Hauptmann im 16. Linien-Infanterie-Regiment	I.	72
XXII.	Etymologie des Worts „Theodolit.“ Von dem Herausgeber	II.	240
XXIII.	Untersuchungen über die Pothenot'sche Aufgabe, falls solche auf den Raum ausgedehnt wird. Von Herrn C. W. Plath, Bezirks-Ingenieur in Hamburg	III.	241

Mechanik.

XXIV.	Bemerkungen über Lagrange's analytische		

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Mechanik. Von Herrn Doctor Heinrich Bley zu Bernburg	III. IV.	275 369

Nautik.

XIV.	Fluthpegel und Ebbe und Fluth im adriatischen Meere. (Beschreibung eines in der Rhede von Triest am äusseren Ende des Molo Sartorio aufgestellten selbstregistrirenden Fluthmessers, nebst Abbildung.) Von Herrn Prof. Dr. Schaub, Director der k. k. Marine-Sternwarte in Triest	I.	115
XXXII.	Ueber Fluthpegel im adriatischen Meere. Von Herrn Dr. J. R. Lorenz in Fiume	IV.	485

Uebungsaufgaben für Schüler.

XIII.	Geometrischer Lehrsatz und Aufgabe. Von Herrn Dr. Otto Böklen zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg	I.	114
XXXI.	Fünf geometrische Aufgaben von Herrn Doctor C. F. Lindman in Strengnäs in Schweden	IV.	484

Literarische Berichte *).

CXXXVII.	. . . . .	I.	1
CXXXVIII.	. . . . .	II.	1
CXXXIX.	. . . . .	III.	1
CXL.	. . . . .	IV.	1

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

919
11

I.

Merkwürdige Erweiterung der Formeln der ebenen Trigonometrie auf ein System von drei sich nicht schneidenden Geraden im Raume.

Von
dem Herausgeber.

§. 1.

Den beiden Punkten, in denen zwei gerade Linien im Raume von ihrer kürzesten Entfernung getroffen werden, und dieser kürzesten Entfernung selbst, hat man bis jetzt nicht diejenige Aufmerksamkeit geschenkt, welche dieselben nach meiner Meinung in hohem Grade verdienen. Im Besitz einer grossen Anzahl bemerkenswerther, die in Rede stehenden Punkte betreffender Relationen, welche ich nach und nach, so wie es Zeit und Umstände gerade verstatten werden, zu veröffentlichen gedenke, will ich für jetzt in diesem Aufsatze zeigen, wie sich die, ein System von drei sich gegenseitig schneidenden Geraden betreffenden Formeln der ebenen Trigonometrie in merkwürdiger Weise auf ein System von drei sich nicht schneidenden Geraden im Raume erweitern lassen. Dazu ist es zuvörderst nöthig, die Formeln zur allgemeinen Bestimmung der beiden Punkte, in denen zwei gerade Linien im Raume von ihrer kürzesten Entfernung getroffen werden, welche ich in der Folge der Kürze wegen die Punkte der kürzesten Entfernung der beiden in Rede stehenden geraden Linien nennen werde, im folgenden Paragraphen in einer solchen Weise zu entwickeln, wie ich dieselben bei der weiteren Darstellung der Theorie der Punkte der kürzesten Entfernung gebrauchen werde, wobei ich mich, was hier ein für alle Mal bemerkt wird, stets rechtwinkliger Coordinaten bedienen werde.

§. 2.

Die Gleichungen zweier geraden Linien im Raume seien im Allgemeinen:

$$1) \quad \begin{cases} \dfrac{x-a_0}{\cos\alpha_0} = \dfrac{y-b_0}{\cos\beta_0} = \dfrac{z-c_0}{\cos\gamma_0}, \\ \dfrac{x-a_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{y-b_1}{\cos\beta_1} = \dfrac{z-c_1}{\cos\gamma_1}. \end{cases}$$

Die Punkte der kürzesten Entfernung dieser beiden Geraden, so wie dieselben auf der ersten und zweiten Geraden liegen, seien respective $(x_{01}y_{01}z_{01})$ und $(x_{10}y_{10}z_{10})$; also haben wir die Gleichungen:

$$2) \quad \begin{cases} \dfrac{x_{01}-a_0}{\cos\alpha_0} = \dfrac{y_{01}-b_0}{\cos\beta_0} = \dfrac{z_{01}-c_0}{\cos\gamma_0} = G_{01}, \\ \dfrac{x_{10}-a_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{y_{10}-b_1}{\cos\beta_1} = \dfrac{z_{10}-c_1}{\cos\gamma_1} = G_{10}. \end{cases}$$

Weil die kürzeste Entfernung durch die beiden Punkte $(x_{01}y_{01}z_{01})$ und $(x_{10}y_{10}z_{10})$ geht, so sind ihre Gleichungen:

$$3) \quad \begin{cases} \dfrac{x-x_{01}}{x_{01}-x_{10}} = \dfrac{y-y_{01}}{y_{01}-y_{10}} = \dfrac{z-z_{01}}{z_{01}-z_{10}} \\ \text{oder} \\ \dfrac{x-x_{10}}{x_{01}-x_{10}} = \dfrac{y-y_{10}}{y_{01}-y_{10}} = \dfrac{z-z_{10}}{z_{01}-z_{10}}; \end{cases}$$

und da nun die kürzeste Entfernung bekanntlich auf den beiden gegebenen, durch die Gleichungen 1) charakterisirten Geraden senkrecht steht, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$4) \quad \begin{cases} (x_{01}-x_{10})\cos\alpha_0+(y_{01}-y_{10})\cos\beta_0+(z_{01}-z_{10})\cos\gamma_0=0, \\ (x_{01}-x_{10})\cos\alpha_1+(y_{01}-y_{10})\cos\beta_1+(z_{01}-z_{10})\cos\gamma_1=0. \end{cases}$$

Nach 2) haben wir die folgenden Gleichungen:

$$5) \quad \begin{cases} x_{01} = a_0 + G_{01}\cos\alpha_0, \\ y_{01} = b_0 + G_{01}\cos\beta_0, \\ z_{01} = c_0 + G_{01}\cos\gamma_0 \end{cases}$$

und

$$6) \quad \ldots \ldots \begin{cases} x_{10} = a_1 + G_{10}\cos\alpha_1, \\ y_{10} = b_1 + G_{10}\cos\beta_1, \\ z_{10} = c_1 + G_{10}\cos\gamma_1; \end{cases}$$

also ist nach 4):

$$\left.\begin{aligned} &(a_0 - a_1 + G_{01}\cos\alpha_0 - G_{10}\cos\alpha_1)\cos\alpha_0 \\ &+(b_0 - b_1 + G_{01}\cos\beta_0 - G_{10}\cos\beta_1)\cos\beta_0 \\ &+(c_0 - c_1 + G_{01}\cos\gamma_0 - G_{10}\cos\gamma_1)\cos\gamma_0 \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &(a_0 - a_1 + G_{01}\cos\alpha_0 - G_{10}\cos\alpha_1)\cos\alpha_1 \\ &+(b_0 - b_1 + G_{01}\cos\beta_0 - G_{10}\cos\beta_1)\cos\beta_1 \\ &+(c_0 - c_1 + G_{01}\cos\gamma_0 - G_{10}\cos\gamma_1)\cos\gamma_1 \end{aligned}\right\} = 0;$$

folglich, wenn wir den von den, durch die Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 bestimmten Richtungen der beiden gegebenen Geraden eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch W_{01} bezeichnen, und demzufolge

$$7) \ldots \cos W_{01} = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1$$

setzen:

$$(a_0 - a_1)\cos\alpha_0 + (b_0 - b_1)\cos\beta_0 + (c_0 - c_1)\cos\gamma_0 + G_{01} - G_{10}\cos W_{01} = 0,$$
$$(a_0 - a_1)\cos\alpha_1 + (b_0 - b_1)\cos\beta_1 + (c_0 - c_1)\cos\gamma_1 + G_{01}\cos W_{01} - G_{10} = 0;$$

woraus sich durch gewöhnliche Elimination sehr leicht die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &(a_0 - a_1)(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1\cos W_{01}) \\ &+(b_0 - b_1)(\cos\beta_0 - \cos\beta_1\cos W_{01}) \\ &+(c_0 - c_1)(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1\cos W_{01}) \end{aligned}\right\} = -G_{01}\sin W_{01}^2,$$

$$\left.\begin{aligned} &(a_0 - a_1)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos W_{01}) \\ &+(b_0 - b_1)(\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos W_{01}) \\ &+(c_0 - c_1)(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos W_{01}) \end{aligned}\right\} = G_{10}\sin W_{01}^2;$$

folglich für G_{01} und G_{10} die beiden folgenden Ausdrücke ergeben:

$$8)\quad \begin{cases} G_{01} = \dfrac{\left\{\begin{array}{r}(a_1-a_0)(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos W_{01})\\ +(b_1-b_0)(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos W_{01})\\ +(c_1-c_0)(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos W_{01})\end{array}\right\}}{\sin W_{01}^2}, \\ G_{10} = \dfrac{\left\{\begin{array}{r}(a_0-a_1)(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos W_{01})\\ +(b_0-b_1)(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos W_{01})\\ +(c_0-c_1)(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos W_{01})\end{array}\right\}}{\sin W_{01}^2}. \end{cases}$$

Die Coordinaten x_{01}, y_{01}, z_{01} und x_{10}, y_{10}, z_{10} der beiden Punkte der kürzesten Entfernung werden, da man G_{01} und G_{10} kennt, unmittelbar durch die Formeln 5) und 6) bestimmt.

Bezeichnen wir die kürzeste Entfernung der beiden gegebenen Geraden von einander durch $E_{0,1}$, so ist:

$$9)\ \ldots\quad E_{01}^2 = (x_{01}-x_{10})^2 + (y_{01}-y_{10})^2 + (z_{01}-z_{10})^2.$$

Wegen der beiden Gleichungen 4) kann man, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet, setzen:

$$10)\ \ldots\quad \begin{cases} x_{01}-x_{10} = G(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1), \\ y_{01}-y_{10} = G(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1), \\ z_{01}-z_{10} = G(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1); \end{cases}$$

woraus, weil

$$\begin{aligned} &(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)^2+(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)^2 \\ &\qquad +(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)^2 \\ =\ &(\cos\alpha_0^2+\cos\beta_0^2+\cos\gamma_0^2)(\cos\alpha_1^2+\cos\beta_1^2+\cos\gamma_1^2) \\ &-(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)^2 \\ =\ &1-\cos W_{01}^2 = \sin W_{01}^2 \end{aligned}$$

ist, in Verbindung mit 9) sogleich

$$11)\ \ldots\ldots\quad E_{01}^2 = G^2\sin W_{01}^2$$

folgt. Nach 5) und 6) ist:

$$\begin{aligned} x_{01}-x_{10} &= a_0-a_1+G_{01}\cos\alpha_0-G_{10}\cos\alpha_1, \\ y_{01}-y_{10} &= b_0-b_1+G_{01}\cos\beta_0-G_{10}\cos\beta_1, \\ z_{01}-z_{10} &= c_0-c_1+G_{01}\cos\gamma_0-G_{10}\cos\gamma_1; \end{aligned}$$

also, weil

$$\cos\alpha_0(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)+\cos\beta_0(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)$$
$$+\cos\gamma_0(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)=0,$$

$$\cos\alpha_1(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)+\cos\beta_1(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)$$
$$+\cos\gamma_1(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)=0$$

ist:

$$\begin{aligned}12)\ \ldots\ & (x_{01}-x_{10})(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)\\ &+(y_{01}-y_{10})(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\ &+(z_{01}-z_{10})(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\\ =\ & (a_0-a_1)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)\\ &+(b_0-b_1)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\ &+(c_0-c_1)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1).\end{aligned}$$

Nun ist aber nach 10)

$$\begin{aligned}&(x_{01}-x_{10})(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)\\ &+(y_{01}-y_{10})(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\ &+(z_{01}-z_{10})(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\\ =G\{&(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)^2+(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)^2\\ &+(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)^2\}\\ =G&\sin W_{01}^2,\end{aligned}$$

also nach 12):

$$13)\qquad G=\frac{\left\{\begin{aligned}&(a_0-a_1)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)\\ &+(b_0-b_1)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\ &+(c_0-c_1)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\end{aligned}\right\}}{\sin W_{01}^2},$$

folglich nach 11) offenbar:

$$14)\qquad E_{01}=\pm\frac{\left\{\begin{aligned}&(a_0-a_1)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)\\ &+(b_0-b_1)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\ &+(c_0-c_1)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\end{aligned}\right\}}{\sin W_{01}},$$

indem man in dieser Formel das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der Zähler des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens positiv oder negativ ist. Nach 13) und 14) ist

$$15) \quad \ldots \ldots \quad G = \pm \frac{E_{01}}{\sin W_{01}},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse

$$\begin{aligned} &(a_0 - a_1)(\cos\beta_0 \cos\gamma_1 - \cos\gamma_0 \cos\beta_1) \\ &+ (b_0 - b_1)(\cos\gamma_0 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 \cos\gamma_1) \\ &+ (c_0 - c_1)(\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos\alpha_1) \end{aligned}$$

positiv oder negativ ist.

Aus 8) erhält man leicht durch Addition und Subtraction:

$$G_{01} + G_{10} = \frac{\left\{\begin{array}{l} (a_0 - a_1)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)(1 + \cos W_{01}) \\ + (b_0 - b_1)(\cos\beta_1 - \cos\beta_0)(1 + \cos W_{01}) \\ + (c_0 - c_1)(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0)(1 + \cos W_{01}) \end{array}\right\}}{\sin W_{01}^2},$$

$$G_{01} - G_{10} = -\frac{\left\{\begin{array}{l} (a_0 - a_1)(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_0)(1 - \cos W_{01}) \\ + (b_0 - b_1)(\cos\beta_1 + \cos\beta_0)(1 - \cos W_{01}) \\ + (c_0 - c_1)(\cos\gamma_1 + \cos\gamma_0)(1 - \cos W_{01}) \end{array}\right\}}{\sin W_{01}^2};$$

folglich offenbar:

16)

$$G_{01} + G_{10} = -\frac{\left\{\begin{array}{l} (a_0 - a_1)\sin\frac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_1)\sin\frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1) \\ + (b_0 - b_1)\sin\frac{1}{2}(\beta_0 - \beta_1)\sin\frac{1}{2}(\beta_0 + \beta_1) \\ + (c_0 - c_1)\sin\frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_1)\sin\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1) \end{array}\right\}}{\sin\frac{1}{2} W_{01}^2},$$

$$G_{01} - G_{10} = -\frac{\left\{\begin{array}{l} (a_0 - a_1)\cos\frac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_1)\cos\frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1) \\ + (b_0 - b_1)\cos\frac{1}{2}(\beta_0 - \beta_1)\cos\frac{1}{2}(\beta_0 + \beta_1) \\ + (c_0 - c_1)\cos\frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_1)\cos\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1) \end{array}\right\}}{\cos\frac{1}{2} W_{01}^2}.$$

Nach 5) und 6) ist:

17)

$$\frac{x_{01}-a_0}{\cos\alpha_0}\pm\frac{x_{10}-a_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y_{01}-b_0}{\cos\beta_0}\pm\frac{y_{10}-b_1}{\cos\beta_1}=\frac{z_{01}-c_0}{\cos\gamma_0}\pm\frac{z_{10}-c_1}{\cos\gamma_1}$$
$$=G_{01}\pm G_{10}.$$

Auch bemerke man die folgenden, unmittelbar aus 15) und 10) sich ergebenden Formeln:

18)

$$\pm\frac{E_{01}}{\sin W_{01}}=\frac{x_{01}-x_{10}}{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}=\frac{y_{01}-y_{10}}{\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1}$$
$$=\frac{z_{01}-z_{10}}{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem die Grösse

$$\begin{aligned}&(a_0-a_1)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)\\&+(b_0-b_1)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\&+(c_0-c_1)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\end{aligned}$$

positiv oder negativ ist.

§. 3.

Wir wollen jetzt ein beliebiges System von drei geraden Linien im Raume betrachten, deren Gleichungen

19) . . . .
$$\begin{cases}\frac{x-a_0}{\cos\alpha_0}=\frac{y-b_0}{\cos\beta_0}=\frac{z-c_0}{\cos\gamma_0},\\ \frac{x-a_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-b_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-c_1}{\cos\gamma_1},\\ \frac{x-a_2}{\cos\alpha_2}=\frac{y-b_2}{\cos\beta_2}=\frac{z-c_2}{\cos\gamma_2}\end{cases}$$

sein mögen, wo bekanntlich $(a_0b_0c_0)$, $(a_1b_1c_1)$, $(a_2b_2c_2)$ drei beliebige, in diesen geraden Linien liegende Punkte sind. Wir wollen im Folgenden diese drei geraden Linien der Kürze wegen beziehungsweise die Gerade (0), (1), (2) nennen, und werden alle im vorhergehenden Paragraphen eingeführten Bezeichnungen ganz in ähnlicher Weise auch fernerhin gebrauchen, mit dem einzigen Unterschiede, dass wir von jetzt an statt W_{01}, W_{12}, W_{20} kürzer bloss W_2, W_0, W_1 schreiben werden.

Setzen wir nun:

$$G_{01} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(a_1 - a_0)(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1 \cos W_2) \\ +(b_1 - b_0)(\cos\beta_0 - \cos\beta_1 \cos W_2) \\ +(c_1 - c_0)(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1 \cos W_2)\end{array}\right\}}{\sin W_2^2},$$

$$G_{02} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(a_2 - a_0)(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_2 \cos W_1) \\ +(b_2 - b_0)(\cos\beta_0 - \cos\beta_2 \cos W_1) \\ +(c_2 - c_0)(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_2 \cos W_1)\end{array}\right\}}{\sin W_1^2};$$

so ist nach 5):

$$\begin{aligned} x_{01} &= a_0 + G_{01}\cos\alpha_0, & x_{02} &= a_0 + G_{02}\cos\alpha_0, \\ y_{01} &= b_0 + G_{01}\cos\beta_0, & y_{02} &= b_0 + G_{02}\cos\beta_0, \\ z_{01} &= c_0 + G_{01}\cos\gamma_0; & z_{02} &= c_0 + G_{02}\cos\gamma_0; \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} x_{01} - x_{02} &= (G_{01} - G_{02})\cos\alpha_0, \\ y_{01} - y_{02} &= (G_{01} - G_{02})\cos\beta_0, \\ z_{01} - z_{02} &= (G_{01} - G_{02})\cos\gamma_0. \end{aligned}$$

Weil $(a_0 b_0 c_0)$, $(a_1 b_1 c_1)$, $(a_2 b_2 c_2)$ drei ganz beliebige, in unseren drei Geraden liegende Punkte sind, so ist es offenbar verstattet, zu setzen:

$$\begin{aligned} a_0 &= x_{01}, & b_0 &= y_{01}, & c_0 &= z_{01}; \\ a_1 &= x_{10}, & b_1 &= y_{10}, & c_1 &= z_{10}; \\ a_2 &= x_{20}, & b_2 &= y_{20}, & c_2 &= z_{20}. \end{aligned}$$

Dadurch wird zuvörderst:

$$G_{01} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(x_{10} - x_{01})(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1 \cos W_2) \\ +(y_{10} - y_{01})(\cos\beta_0 - \cos\beta_1 \cos W_2) \\ +(z_{10} - z_{01})(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1 \cos W_2)\end{array}\right\}}{\sin W_2^2},$$

folglich nach 4) offenbar $G_{01} = 0$, und daher nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned} x_{01} - x_{02} &= -G_{02}\cos\alpha_0, \\ y_{01} - y_{02} &= -G_{02}\cos\beta_0, \\ z_{01} - z_{02} &= -G_{02}\cos\gamma_0. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$G_{02}=\frac{\left\{\begin{array}{l}(x_{20}-x_{01})(\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\cos W_1)\\+(y_{20}-y_{01})(\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos W_1)\\+(z_{20}-z_{01})(\cos\gamma_0-\cos\gamma_2\cos W_1)\end{array}\right\}}{\sin W_1{}^2},$$

folglich, wenn man

$$x_{20}-x_{01}=(x_{20}-x_{02})-(x_{01}-x_{02}),$$
$$y_{20}-y_{01}=(y_{20}-y_{02})-(y_{01}-y_{02}),$$
$$z_{20}-z_{01}=(z_{20}-z_{02})-(z_{01}-z_{02})$$

setzt, weil nach 4) offenbar

$$(x_{20}-x_{02})\cos\alpha_0+(y_{20}-y_{02})\cos\beta_0+(z_{20}-z_{02})\cos\gamma_0=0,$$
$$(x_{20}-x_{02})\cos\alpha_2+(y_{20}-y_{02})\cos\beta_2+(z_{20}-z_{02})\cos\gamma_2=0$$

ist:

$$G_{02}=-\frac{\left\{\begin{array}{l}(x_{01}-x_{02})(\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\cos W_1)\\+(y_{01}-y_{02})(\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos W_1)\\+(z_{01}-z_{02})(\cos\gamma_0-\cos\gamma_2\cos W_1)\end{array}\right\}}{\sin W_1{}^2}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden:

20)

$$x_{01}-x_{02}=\frac{\left\{\begin{array}{l}(x_{01}-x_{02})(\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\cos W_1)\\+(y_{01}-y_{02})(\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos W_1)\\+(z_{01}-z_{02})(\cos\gamma_0-\cos\gamma_2\cos W_1)\end{array}\right\}}{\sin W_1{}^2}\cos\alpha_0,$$

$$y_{01}-y_{02}=\frac{\left\{\begin{array}{l}(x_{01}-x_{02})(\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\cos W_1)\\+(y_{01}-y_{02})(\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos W_1)\\+(z_{01}-z_{02})(\cos\gamma_0-\cos\gamma_2\cos W_1)\end{array}\right\}}{\sin W_1{}^2}\cos\beta_0,$$

$$z_{01}-z_{02}=\frac{\left\{\begin{array}{l}(x_{01}-x_{02})(\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\cos W_1)\\+(y_{01}-y_{02})(\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos W_1)\\+(z_{01}-z_{02})(\cos\gamma_0-\cos\gamma_2\cos W_1)\end{array}\right\}}{\sin W_1{}^2}\cos\gamma_0.$$

Setzen wir ferner, was verstattet ist:

$$a_0 = x_{02}, \quad b_0 = y_{02}, \quad c_0 = z_{02};$$
$$a_1 = x_{10}, \quad b_1 = y_{10}, \quad c_1 = z_{10};$$
$$a_2 = x_{20}, \quad b_2 = y_{20}, \quad c_2 = z_{20};$$

so wird zuvörderst:

$$G_{02} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(x_{20}-x_{02})(\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\cos W_1)\\ +(y_{20}-y_{02})(\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos W_1)\\ +(z_{20}-z_{02})(\cos\gamma_0-\cos\gamma_2\cos W_1)\end{array}\right\}}{\sin W_1{}^2},$$

folglich nach 4) offenbar $G_{02}=0$, und daher nach dem Obigen:

$$x_{01}-x_{02} = G_{01}\cos\alpha_0,$$
$$y_{01}-y_{02} = G_{01}\cos\beta_0,$$
$$z_{01}-z_{02} = G_{01}\cos\gamma_0.$$

Ferner ist:

$$G_{01} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(x_{10}-x_{02})(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos W_2)\\ +(y_{10}-y_{02})(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos W_2)\\ +(z_{10}-z_{02})(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos W_2)\end{array}\right\}}{\sin W_2{}^2},$$

folglich, wenn man

$$x_{10}-x_{02} = (x_{10}-x_{01})+(x_{01}-x_{02}),$$
$$y_{10}-y_{02} = (y_{10}-y_{01})+(y_{01}-y_{02}),$$
$$z_{10}-z_{02} = (z_{10}-z_{01})+(z_{01}-z_{02})$$

setzt, weil nach 4)

$$(x_{10}-x_{01})\cos\alpha_0+(y_{10}-y_{01})\cos\beta_0+(z_{10}-z_{01})\cos\gamma_0 = 0,$$
$$(x_{10}-x_{01})\cos\alpha_1+(y_{10}-y_{01})\cos\beta_1+(z_{10}-z_{01})\cos\gamma_1 = 0$$

ist:

$$G_{01} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(x_{01}-x_{02})(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos W_2)\\ +(y_{01}-y_{02})(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos W_2)\\ +(z_{01}-z_{02})(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos W_2)\end{array}\right\}}{\sin W_2{}^2}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden:

21)

$$x_{01}-x_{02}=\frac{\left\{\begin{array}{l}(x_{01}-x_{02})(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos W_2)\\+(y_{01}-y_{02})(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos W_2)\\+(z_{01}-z_{02})(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos W_2)\end{array}\right\}}{\sin W_2{}^2}\cos\alpha_0,$$

$$y_{01}-y_{02}=\frac{\left\{\begin{array}{l}(x_{01}-x_{02})(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos W_2)\\+(y_{01}-y_{02})(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos W_2)\\+(z_{01}-z_{02})(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos W_2)\end{array}\right\}}{\sin W_2{}^2}\cos\beta_0,$$

$$z_{01}-z_{02}=\frac{\left\{\begin{array}{l}(x_{01}-x_{02})(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos W_2)\\+(y_{01}-y_{02})(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos W_2)\\+(z_{01}-z_{02})(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos W_2)\end{array}\right\}}{\sin W_2{}^2}\cos\gamma_0.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 20) und 21) nach der Reihe mit $\cos\alpha_0$, $\cos\beta_0$, $\cos\gamma_0$, und addirt dieselben dann in beiden Fällen zu einander, so erhält man, wenn der Kürze wegen

22) $E_0=(x_{01}-x_{02})\cos\alpha_0+(y_{01}-y_{02})\cos\beta_0+(z_{01}-z_{02})\cos\gamma_0$

gesetzt wird:

$$E_0=\frac{E_0-\{(x_{01}-x_{02})\cos\alpha_2+(y_{01}-y_{02})\cos\beta_2+(z_{01}-z_{02})\cos\gamma_2\}\cos W_1}{\sin W_1{}^2},$$

$$E_0=\frac{E_0-\{(x_{01}-x_{02})\cos\alpha_1+(y_{01}-y_{02})\cos\beta_1+(z_{01}-z_{02})\cos\gamma_1\}\cos W_2}{\sin W_2{}^2};$$

woraus sogleich

23) $$\left\{\begin{array}{l}E_0\cos W_1=(x_{01}-x_{02})\cos\alpha_2+(y_{01}-y_{02})\cos\beta_2+(z_{01}-z_{02})\cos\gamma_2,\\E_0\cos W_2=(x_{01}-x_{02})\cos\alpha_1+(y_{01}-y_{02})\cos\beta_1+(z_{01}-z_{02})\cos\gamma_1\end{array}\right.$$

folgt.

§. 3.

Nach den Lehren der analytischen Geometrie *) ist die durch die Formel 22) bestimmte Grösse E_0 die Entfernung des Punktes $(x_{01}y_{01}z_{01})$ von dem Punkte $(x_{02}y_{02}z_{02})$, wenn man diese Entfernung als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem der Punkt

*) M. s. Archiv. Thl. XXXIV. S. 131. und S. 132. Nr. 16.

$(x_{01}y_{01}z_{01})$ von dem Punkte $(x_{02}y_{02}z_{02})$ aus gerechnet auf dem durch die Winkel α_0, β_0, γ_0 bestimmten Theile der Geraden (0) oder auf dem entgegengesetzten Theile dieser Geraden liegt.

Man kann nun aber auch leicht den folgenden allgemeinen Satz beweisen. Die Gleichungen einer geraden Linie seien

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}$$

und $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ seien zwei beliebige Punkte im Raume, deren Projectionen auf der in Rede stehenden geraden Linie wir respective durch $(u_0v_0w_0)$ und $(u_1v_1w_1)$ bezeichnen wollen. Dann ist bekanntlich *):

$$u_0-a=\{(x_0-a)\cos\alpha+(y_0-b)\cos\beta+(z_0-c)\cos\gamma\}\cos\alpha,$$
$$v_0-b=\{(x_0-a)\cos\alpha+(y_0-b)\cos\beta+(z_0-c)\cos\gamma\}\cos\beta,$$
$$w_0-c=\{(x_0-a)\cos\alpha+(y_0-b)\cos\beta+(z_0-c)\cos\gamma\}\cos\gamma$$

und

$$u_1-a=\{(x_1-a)\cos\alpha+(y_1-b)\cos\beta+(z_1-c)\cos\gamma\}\cos\alpha,$$
$$v_1-b=\{(x_1-a)\cos\alpha+(y_1-b)\cos\beta+(z_1-c)\cos\gamma\}\cos\beta,$$
$$w_1-c=\{(x_1-a)\cos\alpha+(y_1-b)\cos\beta+(z_1-c)\cos\gamma\}\cos\gamma;$$

folglich durch Subtraction:

$$u_1-u_0=\{(x_1-x_0)\cos\alpha+(y_1-y_0)\cos\beta+(z_1-z_0)\cos\gamma\}\cos\alpha,$$
$$v_1-v_0=\{(x_1-x_0)\cos\alpha+(y_1-y_0)\cos\beta+(z_1-z_0)\cos\gamma\}\cos\beta,$$
$$w_1-w_0=\{(x_1-x_0)\cos\alpha+(y_1-y_0)\cos\beta+(z_1-z_0)\cos\gamma\}\cos\gamma;$$

also, wie sogleich erhellet:

$$(u_1-u_0)\cos\alpha+(v_1-v_0)\cos\beta+(w_1-w_0)\cos\gamma$$
$$=(x_1-x_0)\cos\alpha+(y_1-y_0)\cos\beta+(z_1-z_0)\cos\gamma.$$

Ganz eben so wie oben ist

$$(u_1-u_0)\cos\alpha+(v_1-v_0)\cos\beta+(w_1-w_0)\cos\gamma$$

die Entfernung des Punktes $(u_1v_1w_1)$ von dem Punkte $(u_0v_0w_0)$, wenn man diese Entfernung als positiv oder als negativ betrach-

*) A. a. O. S. 158. Nr. 73.

tet, jenachdem sie von dem Punkte $(u_0 v_0 w_0)$ aus gerechnet auf dem durch die Winkel α, β, γ bestimmten Theile der durch die Gleichungen

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}$$

charakterisirten Geraden oder auf dem entgegengesetzten Theile dieser Geraden liegt. Also ist

$$(x_1 - x_0)\cos\alpha + (y_1 - y_0)\cos\beta + (z_1 - z_0)\cos\gamma$$

die Entfernung der Projection des Punktes $(x_1 y_1 z_1)$ auf der in Rede stehenden Geraden von der Projection des Punktes $(x_0 y_0 z_0)$ auf derselben Geraden, wenn man diese Entfernung als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die Projection des Punktes $(x_1 y_1 z_1)$ von der Projection des Punktes $(x_0 y_0 z_0)$ aus gerechnet auf dem durch die Winkel α, β, γ bestimmten Theile der durch die Gleichungen

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}$$

charakterisirten Geraden oder auf dem entgegengesetzten Theile dieser Geraden liegt.

Bezeichnen wir die Entfernung der Projection des Punktes $(x_{01} y_{01} z_{01})$ auf der Geraden (2) von der Projection des Punktes $(x_{02} y_{02} z_{02})$ auf derselben Geraden, indem man diese Entfernung als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die Projection des Punktes $(x_{01} y_{01} z_{01})$ von der Projection des Punktes $(x_{02} y_{02} z_{02})$ aus gerechnet auf dem durch die Winkel α_2, β_2, γ_2 bestimmten Theile der Geraden (2) oder auf dem entgegengesetzten Theile dieser Geraden liegt, durch $\mathfrak{E}_{02}$; ferner die Entfernung der Projection des Punktes $(x_{01} y_{01} z_{01})$ auf der Geraden (1) von der Projection des Punktes $(x_{02} y_{02} z_{02})$ auf derselben Geraden, indem man diese Entfernung als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die Projection des Punktes $(x_{01} y_{01} z_{01})$ von der Projection des Punktes $(x_{02} y_{02} z_{02})$ aus gerechnet auf dem durch die Winkel α_1, β_1, γ_1 bestimmten Theile der Geraden (1) oder auf dem entgegengesetzten Theile dieser Geraden liegt, durch $\mathfrak{E}_{01}$; so ist

$$\mathfrak{E}_{02} = (x_{01} - x_{02})\cos\alpha_2 + (y_{01} - y_{02})\cos\beta_2 + (z_{01} - z_{02})\cos\gamma_2,$$

$$\mathfrak{E}_{01} = (x_{01} - x_{02})\cos\alpha_1 + (y_{01} - y_{02})\cos\beta_1 + (z_{01} - z_{02})\cos\gamma_1;$$

folglich nach 23):

$$E_0 \cos W_1 = \mathfrak{E}_{02}, \quad E_0 \cos W_2 = \mathfrak{E}_{01}.$$

Ueberhaupt hat man unter Anwendung ganz ähnlicher Bezeichnungen hiernach die folgenden Formeln:

$$24)\ \ldots\ \begin{cases} E_0 \cos W_1 = \mathfrak{E}_{02}, & E_0 \cos W_2 = \mathfrak{E}_{01}; \\ E_1 \cos W_2 = \mathfrak{E}_{10}, & E_1 \cos W_0 = \mathfrak{E}_{12}; \\ E_2 \cos W_0 = \mathfrak{E}_{21}, & E_2 \cos W_1 = \mathfrak{E}_{20}; \end{cases}$$

bei denen es, wie man sogleich übersieht, bloss darauf ankommt, jeder der drei Geraden beliebig eine positive und eine negative Richtung beizulegen, und dann die 180° nicht übersteigenden Winkel W_0, W_1, W_2 immer auf die positiven Richtungen der Geraden zu beziehen, von denen sie eingeschlossen werden, indem alles Uebrige, was bei diesen Formeln zu beachten ist, aus dem Obigen ganz von selbst erhellet.

§. 4.

Wie in 22) und analog damit setzen wir:

25)

$$E_0 = (x_{01} - x_{02})\cos\alpha_0 + (y_{01} - y_{02})\cos\beta_0 + (z_{01} - z_{02})\cos\gamma_0,$$
$$E_1 = (x_{12} - x_{10})\cos\alpha_1 + (y_{12} - y_{10})\cos\beta_1 + (z_{12} - z_{10})\cos\gamma_1,$$
$$E_2 = (x_{20} - x_{21})\cos\alpha_2 + (y_{20} - y_{21})\cos\beta_2 + (z_{20} - z_{21})\cos\gamma_2;$$

wo die Bedeutung der Grössen E_0, E_1, E_2 aus dem Obigen von selbst erhellet. Dann ist nach 23):

26)

$$E_0 \cos W_1 = (x_{01} - x_{02})\cos\alpha_2 + (y_{01} - y_{02})\cos\beta_2 + (z_{01} - z_{02})\cos\gamma_2,$$
$$E_0 \cos W_2 = (x_{01} - x_{02})\cos\alpha_1 + (y_{01} - y_{02})\cos\beta_1 + (z_{01} - z_{02})\cos\gamma_1;$$

ferner:

27)

$$E_1 \cos W_2 = (x_{12} - x_{10})\cos\alpha_0 + (y_{12} - y_{10})\cos\beta_0 + (z_{12} - z_{10})\cos\gamma_0,$$
$$E_1 \cos W_0 = (x_{12} - x_{10})\cos\alpha_2 + (y_{12} - y_{10})\cos\beta_2 + (z_{12} - z_{10})\cos\gamma_2;$$

und:

28)

$$E_2 \cos W_0 = (x_{20} - x_{21})\cos\alpha_1 + (y_{20} - y_{21})\cos\beta_1 + (z_{20} - z_{21})\cos\gamma_1,$$
$$E_2 \cos W_1 = (x_{20} - x_{21})\cos\alpha_0 + (y_{20} - y_{21})\cos\beta_0 + (z_{20} - z_{21})\cos\gamma_0.$$

Aus 26) und 27) folgt durch Addition:

$$E_0 \cos W_1 + E_1 \cos W_0$$

$$\begin{aligned}
&= (x_{01} - x_{02} + x_{12} - x_{10}) \cos \alpha_2 \\
&\quad + (y_{01} - y_{02} + y_{12} - y_{10}) \cos \beta_2 \\
&\quad + (z_{01} - z_{02} + z_{12} - z_{10}) \cos \gamma_2 \\
&= (x_{01} - x_{02} + x_{12} - x_{10} + x_{20} - x_{21} - x_{20} + x_{21}) \cos \alpha_2 \\
&\quad + (y_{01} - y_{02} + y_{12} - y_{10} + y_{20} - y_{21} - y_{20} + y_{21}) \cos \beta_2 \\
&\quad + (z_{01} - z_{02} + z_{12} - z_{10} + z_{20} - z_{21} - z_{20} + z_{21}) \cos \gamma_2 \\
&= (x_{01} - x_{10}) \cos \alpha_2 + (y_{01} - y_{10}) \cos \beta_2 + (z_{01} - z_{10}) \cos \gamma_2 \\
&\quad - (x_{02} - x_{20}) \cos \alpha_2 - (y_{02} - y_{20}) \cos \beta_2 - (z_{02} - z_{20}) \cos \gamma_2 \\
&\quad + (x_{12} - x_{21}) \cos \alpha_2 + (y_{12} - y_{21}) \cos \beta_2 + (z_{12} - z_{21}) \cos \gamma_2 \\
&\quad - (x_{20} - x_{21}) \cos \alpha_2 - (y_{20} - y_{21}) \cos \beta_2 - (z_{20} - z_{21}) \cos \gamma_2 ;
\end{aligned}$$

nach 4) ist aber:

$$(x_{02} - x_{20}) \cos \alpha_2 + (y_{02} - y_{20}) \cos \beta_2 + (z_{02} - z_{20}) \cos \gamma_2 = 0,$$

$$(x_{12} - x_{21}) \cos \alpha_2 + (y_{12} - y_{21}) \cos \beta_2 + (z_{12} - z_{21}) \cos \gamma_2 = 0;$$

also, wenn man zugleich 25) berücksichtigt:

$$E_0 \cos W_1 + E_1 \cos W_0$$

$$= (x_{01} - x_{10}) \cos \alpha_2 + (y_{01} - y_{10}) \cos \beta_2 + (z_{01} - z_{10}) \cos \gamma_2 - E_2$$

oder:

$$E_0 \cos W_1 + E_1 \cos W_0 + E_2$$

$$= (x_{01} - x_{10}) \cos \alpha_2 + (y_{01} - y_{10}) \cos \beta_2 + (z_{01} - z_{10}) \cos \gamma_2 .$$

Ueberhaupt hat man also auf diese Weise die folgenden Gleichungen:

29)

$$E_0 + E_1 \cos W_2 + E_2 \cos W_1$$

$$= (x_{12} - x_{21}) \cos \alpha_0 + (y_{12} - y_{21}) \cos \beta_0 + (z_{12} - z_{21}) \cos \gamma_0 ,$$

$$E_0 \cos W_2 + E_1 + E_2 \cos W_0$$

$$= (x_{20} - x_{02}) \cos \alpha_1 + (y_{20} - y_{02}) \cos \beta_1 + (z_{20} - z_{02}) \cos \gamma_1 ,$$

$$E_0 \cos W_1 + E_1 \cos W_0 + E_2$$

$$= (x_{01} - x_{10}) \cos \alpha_2 + (y_{01} - y_{10}) \cos \beta_2 + (z_{01} - z_{10}) \cos \gamma_2 ;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

30)

$$P_0 = (x_{12} - x_{21})\cos\alpha_0 + (y_{12} - y_{21})\cos\beta_0 + (z_{12} - z_{21})\cos\gamma_0,$$
$$P_1 = (x_{20} - x_{02})\cos\alpha_1 + (y_{20} - y_{02})\cos\beta_1 + (z_{20} - z_{02})\cos\gamma_1,$$
$$P_2 = (x_{01} - x_{10})\cos\alpha_2 + (y_{01} - y_{10})\cos\beta_2 + (z_{01} - z_{10})\cos\gamma_2$$

setzen:

31) . . . .
$$\left\{\begin{aligned} E_0 + E_1\cos W_2 + E_2\cos W_1 &= P_0, \\ E_0\cos W_2 + E_1 + E_2\cos W_0 &= P_1, \\ E_0\cos W_1 + E_1\cos W_0 + E_2 &= P_2. \end{aligned}\right.$$

Nach §. 3. ist P_0 die Entfernung der Projection des Punktes $(x_{12}y_{12}z_{12})$ auf der Geraden (0) von der Projection des Punktes $(x_{21}y_{21}z_{21})$ auf derselben Geraden, wenn man diese Entfernung als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die Projection des Punktes $(x_{12}y_{12}z_{12})$ von der Projection des Punktes $(x_{21}y_{21}z_{21})$ aus gerechnet auf dem durch die Winkel α_0, β_0, γ_0 bestimmten Theile der Geraden (0) oder auf dem entgegengesetzten Theile dieser Geraden liegt; eben so ist P_1 die Entfernung der Projection des Punktes $(x_{20}y_{20}z_{20})$ auf der Geraden (1) von der Projection des Punktes $(x_{02}y_{02}z_{02})$ auf derselben Geraden, wenn man diese Entfernung als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die Projection des Punktes $(x_{20}y_{20}z_{20})$ von der Projection des Punktes $(x_{02}y_{02}z_{02})$ aus gerechnet auf dem durch die Winkel α_1, β_1, γ_1 bestimmten Theile der Geraden (1) oder auf dem entgegengesetzten Theile dieser Geraden liegt; und P_2 ist die Entfernung der Projection des Punktes $(x_{01}y_{01}z_{01})$ auf der Geraden (2) von der Projection des Punktes $(x_{10}y_{10}z_{10})$ auf derselben Geraden, wenn man diese Entfernung als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die Projection des Punktes $(x_{01}y_{01}z_{01})$ von der Projection des Punktes $(x_{10}y_{10}z_{10})$ aus gerechnet auf dem durch die Winkel α_2, β_2, γ_2 bestimmten Theile der Geraden (2) oder auf dem entgegengesetzten Theile dieser Geraden liegt. Ueberhaupt sind P_0, P_1, P_2 die nach den vorhergehenden Bestimmungen mit ihren gehörigen Zeichen genommenen Projectionen der kürzesten Entfernungen der Geraden (1) und (2) auf der Geraden (0), der Geraden (2) und (0) auf der Geraden (1), der Geraden (0) und (1) auf der Geraden (2). Liegen die drei gegebenen Geraden in einer Ebene und schneiden sich also gegenseitig, so verschwinden P_0, P_1, P_2 sämmtlich.

§. 5.

Wenn man die Gleichungen 31) nach der Reihe mit E_0, E_1, E_2 multiplicirt, so erhält man:

$$E_0^2 + E_0E_1\cos W_2 + E_2E_0\cos W_1 = P_0E_0,$$
$$E_0E_1\cos W_2 + E_1^2 + E_1E_2\cos W_0 = P_1E_1,$$
$$E_2E_0\cos W_1 + E_1E_2\cos W_0 + E_2^2 = P_2E_2;$$

und hieraus ferner:

32)

$$E_0^2 + E_1^2 - E_2^2 + 2E_0E_1\cos W_2 = P_0E_0 + P_1E_1 - P_2E_2,$$
$$E_0^2 - E_1^2 + E_2^2 + 2E_2E_0\cos W_1 = P_0E_0 - P_1E_1 + P_2E_2,$$
$$-E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos W_0 = -P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2.$$

Wenn die drei Geraden sich schneiden und folglich P_0, P_1, P_2 verschwinden, so ist hiernach:

$$2E_0E_1\cos W_2 = -E_0^2 - E_1^2 + E_2^2,$$
$$2E_2E_0\cos W_1 = -E_0^2 + E_1^2 - E_2^2,$$
$$2E_1E_2\cos W_0 = E_0^2 - E_1^2 - E_2^2.$$

Deuten in Taf. I. Fig. 1. die Pfeilspitzen die positiven Richtungen der drei sich schneidenden Geraden an, so ist nach dem Obigen:

$$E_0 = -\overline{A_1A_2},\quad E_1 = -\overline{A_2A_0},\quad E_2 = +\overline{A_0A_1}$$

oder

$$\overline{A_1A_2} = -E_0,\quad \overline{A_2A_0} = -E_1,\quad \overline{A_0A_1} = +E_2.$$

Nach einer bekannten Formel der ebenen Trigonometrie ist:

$$-2.\overline{A_1A_2}.\overline{A_2A_0}.\cos W_2 = -\overline{A_0A_1}^2 + \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_0}^2,$$
$$2.\overline{A_0A_1}.\overline{A_1A_2}.\cos W_1 = \overline{A_0A_1}^2 + \overline{A_1A_2}^2 - \overline{A_2A_0}^2,$$
$$2.\overline{A_2A_0}.\overline{A_0A_1}.\cos W_0 = \overline{A_0A_1}^2 - \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_0}^2;$$

also:

$$-2E_0E_1\cos W_2 = -E_2^2 + E_0^2 + E_1^2,$$
$$-2E_2E_0\cos W_1 = E_2^2 + E_0^2 - E_1^2,$$
$$-2E_1E_2\cos W_0 = E_2^2 - E_0^2 + E_1^2$$

oder:

$$2E_0E_1\cos W_2 = -E_0^2 - E_1^2 + E_2^2,$$
$$2E_2E_0\cos W_1 = -E_0^2 + E_1^2 - E_2^2,$$
$$2E_1E_2\cos W_0 = \quad E_0^2 - E_1^2 - E_2^2;$$

ganz wie oben.

Nach 31) ist ferner:

$$E_0 - P_0 + E_1\cos W_2 = -E_2\cos W_1,$$
$$E_1 - P_1 + E_0\cos W_2 = -E_2\cos W_0;$$

also durch Division:

$$\frac{E_0 - P_0 + E_1\cos W_2}{E_1 - P_1 + E_0\cos W_2} = \frac{\cos W_1}{\cos W_0},$$

und folglich

$$E_0(\cos W_0 - \cos W_1\cos W_2) - E_1(\cos W_1 - \cos W_2\cos W_0) = P_0\cos W_0 - P_1\cos W_1,$$

so dass man also überhaupt die drei folgenden Gleichungen hat:

33)

$$E_0(\cos W_0 - \cos W_1\cos W_2) - E_1(\cos W_1 - \cos W_2\cos W_0) = P_0\cos W_0 - P_1\cos W_1,$$

$$E_1(\cos W_1 - \cos W_2\cos W_0) - E_2(\cos W_2 - \cos W_0\cos W_1) = P_1\cos W_1 - P_2\cos W_2,$$

$$E_2(\cos W_2 - \cos W_0\cos W_1) - E_0(\cos W_0 - \cos W_1\cos W_2) = P_2\cos W_2 - P_0\cos W_0.$$

Denkt man sich mit W_0, W_1, W_2 als Seiten eine dreiseitige körperliche Ecke beschrieben und bezeichnet deren diesen Seiten gegenüberstehende Winkel durch J_0, J_1, J_2, so ist bekanntlich:

34) . . .
$$\begin{cases} \cos J_0 = \dfrac{\cos W_0 - \cos W_1\cos W_2}{\sin W_1\sin W_2}, \\ \cos J_1 = \dfrac{\cos W_1 - \cos W_2\cos W_0}{\sin W_2\sin W_0}, \\ \cos J_2 = \dfrac{\cos W_2 - \cos W_0\cos W_1}{\sin W_0\sin W_1}; \end{cases}$$

also nach 33):

35)

$$\frac{E_0}{\sin W_0}\cos J_0 - \frac{E_1}{\sin W_1}\cos J_1 = \frac{P_0\cos W_0 - P_1\cos W_1}{\sin W_0 \sin W_1 \sin W_2},$$

$$\frac{E_1}{\sin W_1}\cos J_1 - \frac{E_2}{\sin W_2}\cos J_2 = \frac{P_1\cos W_1 - P_2\cos W_2}{\sin W_0 \sin W_1 \sin W_2},$$

$$\frac{E_2}{\sin W_2}\cos J_2 - \frac{E_0}{\sin W_0}\cos J_0 = \frac{P_2\cos W_2 - P_0\cos W_0}{\sin W_0 \sin W_1 \sin W_2};$$

oder:

36) . . .
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{E_0}{\sin W_0}\cos J_0 - \frac{P_0\cos W_0}{\sin W_0 \sin W_1 \sin W_2} \\ =\ &\frac{E_1}{\sin W_1}\cos J_1 - \frac{P_1\cos W_1}{\sin W_0 \sin W_1 \sin W_2} \\ =\ &\frac{E_2}{\sin W_2}\cos J_2 - \frac{P_2\cos W_2}{\sin W_0 \sin W_1 \sin W_2}. \end{aligned}\right.$$

Weil

$$\cos W_0 = \cos J_0 \sin W_1 \sin W_2 + \cos W_1 \cos W_2,$$

$$\cos W_1 = \cos J_1 \sin W_2 \sin W_0 + \cos W_2 \cos W_0,$$

$$\cos W_2 = \cos J_2 \sin W_0 \sin W_1 + \cos W_0 \cos W_1$$

ist, so ist nach 36) offenbar auch:

37) . . .
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{E_0 - P_0}{\sin W_0}\cos J_0 - \frac{P_0 \cot W_1 \cot W_2}{\sin W_0} \\ =\ &\frac{E_1 - P_1}{\sin W_1}\cos J_1 - \frac{P_1 \cot W_2 \cot W_0}{\sin W_1} \\ =\ &\frac{E_2 - P_2}{\sin W_2}\cos J_2 - \frac{P_2 \cot W_0 \cot W_1}{\sin W_2}. \end{aligned}\right.$$

Liegen die drei Geraden in einer Ebene, so verschwinden P_0, P_1, P_2 und nach 33) ist also:

$$E_0(\cos W_0 - \cos W_1 \cos W_2) = E_1(\cos W_1 - \cos W_2 \cos W_0)$$
$$= E_2(\cos W_2 - \cos W_0 \cos W_1).$$

Werden nun, wie in Taf. I. Fig. 2., durch die Pfeilspitzen die positiven Richtungen der drei Geraden angegeben, so ist

$$W_0 + W_1 + W_2 = 360^0,$$

und man findet nun leicht:

$$\cos W_0 - \cos W_1 \cos W_2 = -\sin W_1 \sin W_2,$$
$$\cos W_1 - \cos W_2 \cos W_0 = -\sin W_2 \sin W_0,$$
$$\cos W_2 - \cos W_0 \cos W_1 = -\sin W_0 \sin W_1;$$

also nach dem Obigen:

$$E_0 \sin W_1 \sin W_2 = E_1 \sin W_2 \sin W_0 = E_2 \sin W_0 \sin W_1$$

oder:

$$\frac{E_0}{\sin W_0} = \frac{E_1}{\sin W_1} = \frac{E_2}{\sin W_2},$$

worin man wieder sogleich einen einfachen trigonometrischen Satz erkennt.

Nach dem Obigen ist:

$$-E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos W_0 = -P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2,$$

also:

$$-E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 \pm 2E_1E_2 \mp 2E_1E_2(1 \mp \cos W_0)$$
$$= -P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2,$$

und folglich:

$$-E_0^2 + (E_1 + E_2)^2 - 4E_1E_2 \sin \tfrac{1}{2} W_0^2 = -P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2,$$
$$-E_0^2 + (E_1 - E_2)^2 + 4E_1E_2 \cos \tfrac{1}{2} W_0^2 = -P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2;$$

woraus, wenn man

$$E_0 + E_1 + E_2 = 2S$$

setzt, auf bekannte Weise sogleich erhalten wird:

$$38) \quad \begin{cases} \sin \frac{1}{2} W_0^2 = \dfrac{S(S-E_0)}{E_1E_2} - \dfrac{P_1E_1 + P_2E_2 - P_0E_0}{4E_1E_2}, \\ \cos \frac{1}{2} W_0^2 = \dfrac{(S-E_1)(S-E_2)}{E_1E_2} + \dfrac{P_1E_1 + P_2E_2 - P_0E_0}{4E_1E_2}; \end{cases}$$

woraus man, wenn der Kürze wegen

$$39) \quad Q = \sqrt{\left\{1 - \frac{P_1E_1 + P_2E_2 - P_0E_0}{4S(S-E_0)}\right\}\left\{1 + \frac{P_1E_1 + P_2E_2 - P_0E_0}{4(S-E_1)(S-E_2)}\right\}}$$

gesetzt wird, leicht die Formel

$$40) \ldots \sin W_0 = \frac{2\sqrt{S(S-E_0)(S-E_1)(S-E_2)}}{E_1 E_2} Q$$

erhält.

Eine noch weitere Ausführung dieses interessanten Gegenstandes würde keiner Schwierigkeit unterliegen, für jetzt aber hier zu weit führen.

II.

Entwicklung einer Function der vierten Rechnungsstufe in eine Reihe.

Von

Herrn Dr. *F. Paugger*
in Gratz.

Schon seit längerer Zeit beschäftige ich mich in meinen Mussestunden mit der Idee, die synthetischen Rechnungsoperationen über die Potenzstufe hinaus zu vermehren und die Gesetze aufzudecken, die alle Stufen gemeinsam durchziehen. In diesem Sinne habe ich auch bereits im Jahresbericht der Landstrasser k. k. Oberrealschule in Wien 1859 einen gedrängten, theilweise noch sehr unklaren Abriss einiger Ergebnisse dieses Studiums veröffentlicht. In diesem Aufsatze wurde die direkte Operation der vierten Rechnungsstufe durch den Ausdruck:

$$a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n\text{mal}}}}}}}} = b$$

definirt, mit

$$(1) \qquad a^4 n = b$$

bezeichnet und „a zur vierten (Stufe) direkt mit n (verbunden) gibt b“ ausgesprochen. Die beiden umgekehrten Operationen dieser Stufe, die in der dritten Stufe beziehungsweise dem Radiziren und Logarithmiren entsprechen und aus (1) erhalten werden, wenn man daraus ein Mal a, das andere Mal n darstellt, wurden mit:

$$b\lfloor n = a \tag{2}$$

und

$$b^{-4}a = n \tag{3}$$

bezeichnet und respective mit „b zur vierten invers mit n gibt a" und „b zur vierten indirekt mit a gibt n" ausgesprochen. Spezialwerthe, welche diese Operationen bei Spezialisirung der darin vorkommenden Operirenden annehmen, und auf die wir uns in der Folge stillschweigend oder ausdrücklich beziehen werden, sind:

$$a^40 = 1 \text{ und } 0^4a = 0, \tag{4}$$

$$a^41 = a \quad „ \quad 1^4a = 1, \tag{5}$$

$$a^4(-n) = 1^{-3}(a^4n) = 0. \tag{6}$$

Der zweite Theil in Gleichung (6) heisst in gewöhnlichen Zeichen $\log 1$ für die Basis a^4n und die Gleichung hat ihre Richtigkeit für alle reellen positiven Werthe von (a^4n).

Betrachtet man die in (1), (2) und (3) angeführten Operationen als Funktionen, was zur weiteren Entwicklung der Gesetze der vierten Rechnungsstufe nothwendig ist, so erhält man drei, den Funktionen der dritten Stufe x^m, a^x und $\log x$ ganz analoge Funktionen, nämlich:

$$x^4n = y, \tag{7}$$

$$a^4x = z, \tag{8}$$

$$a^{-4}x = v. \tag{9}$$

Weil nun die Brauchbarkeit und der ganze Nutzen einer jeden Funktion von ihrer Berechenbarkeit für alle Werthe der darin vorkommenden Veränderlichen abhängt und diese gewöhnlich durch die Entwicklung dieser Funktion in eine Reihe nach steigenden oder fallenden Potenzen der Veränderlichen bewerkstelligt wird, so war es ganz natürlich mein Hauptstreben, diese Reihenentwicklung an den Funktionen der vierten Stufe vorzunehmen. Gegenwärtiger Aufsatz ist nun dazu bestimmt, diese Entwicklung an der einfachsten jener drei Funktionen, der unter (7) angeführten, die in der dritten Stufe dem Binomial-Theorem entspricht, in eine Reihe nach ganzen additiven Exponenten der Veränderlichen für den Fall zu liefern, dass dabei n eine ganze positive Zahl sei. Suchen wir zu dem Ende das Differenzial der Funktion x^4n, so brauchen wir nur in der von Herrn Oettinger im Archiv der Mathematik und Physik. Thl. XXII. p. 401. entwickelten Formel:

$$\partial x_1^{x_2^{x_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}}} = x_1^{x_2^{x_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}}} . x_2^{x_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}} . x_3^{x_4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}} \ldots . x_{n-1}^{x_n} . x_n$$

$$\times \left\{ lx_1 . lx_2 . lx_3 \ldots . lx_{n-1} . \partial lx_n + lx_1 . lx_2 \ldots . lx_{n-2} . \partial lx_{n-1} \right.$$
$$+ \frac{lx_1 \ldots . lx_{n-3} . \partial lx_{n-2}}{x_n} + \frac{lx \ldots . lx_{n-4} . \partial lx_{n-3}}{x_n x_{n-1}^{x_n}}$$
$$\left. + \ldots + \frac{\partial lx_1}{x_n^{x_n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}}} \right\}$$
$$x_n^{x_{n-1}^{x_{n-2}} \ldots x_3^{x_2}}$$

$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = x$ zu setzen, und man erhält nach einigen Umformungen in der oben angeführten Bezeichnungsweise mit Berücksichtigung von (4) und (5):

(10)

$$\partial(x^4 n) = (x^4 n)(x^4[n-1])(x^4[n-2]) \ldots . (x^4 1)(x^4 0)(lx)^{n-1} \frac{\partial x}{x}$$
$$+ (x^4 n)(x^4[n-1])(x^4[n-2]) \ldots . (x^4 2)(x^4 1)(lx)^{n-2} \frac{\partial x}{x}$$
$$+ (x^4 n)(x^4[n-1]) \ldots . (x^4 3)(x^4 2)(lx)^{n-3} \frac{\partial x}{x}$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ (x^4 n)(x^4[n-1])(x^4[n-2]) lx \frac{\partial x}{x}$$
$$+ (x^4 n)(x^4[n-1]) \frac{\partial x}{x} .$$

Wollte man aus dieser Formel die höheren Differenziale ableiten und die Entwicklung der Funktion $(x^4 n)$ nach Maclaurin's Reihe vornehmen, so würden alle Differenzialquotienten, nachdem man darin $x = 0$ gesetzt, unbestimmt sein, ein Zeichen, dass diese Funktion in vorstehender Form nicht entwickelbar ist. Man erinnere sich, dass Aehnliches bei der ihr analogen Funktion in der dritten Rechnungsstufe (x^m) der Fall ist. Setzen wir, um diesem Umstande zu begegnen, an die Stelle von x die Exponentielle e^x, wodurch der Allgemeinheit nicht geschadet wird; bezeichnen wir ferner $(e^x)^4 n$ durch u_n, $(e^x)^4 (n-1)$ durch u_{n-1} u. s. w. und das Produkt $u_n u_{n-1} \ldots . u_r$ mit $P_n{}^r$, so geht (10) über in:

(11)

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = P_n{}^0 x^{n-1} + P_n{}^1 x^{n-2} + P_n{}^2 x^{n-3} + \ldots . + P_n{}^{n-2} x + P_n{}^{n-1} .$$

Nach mehrmaliger Differenziation hat man:

(12)

$$\frac{\partial^m u_n}{\partial x^m} = \frac{\partial^{m-1} P_n^0}{\partial x^{m-1}} x^{n-1} + \frac{\partial^{m-1} P_n^1}{\partial x^{m-1}} x^{n-2} + \ldots + \frac{\partial^{m-1} P_n^{n-1}}{\partial x^{m-1}}$$

$$+\binom{m-1}{1}\left[(n-1)\frac{\partial^{m-2} P_n^0}{\partial x^{m-2}} x^{n-2} + (n-2)\frac{\partial^{m-2} P_n^1}{\partial x^{m-2}} x^{n-3} + \ldots + 1!\frac{\partial^{m-2} P_n^{n-2}}{\partial x^{m-2}}\right]$$

$$+\binom{m-1}{2}\left[(n-1)(n-2)\frac{\partial^{m-3} P_n^0}{\partial x^{m-3}} x^{n-3} + (n-2)(n-3)\frac{\partial^{m-3} P_n^1}{\partial x^{m-3}} x^{n-4}\right.$$

$$\left. + \ldots + 2!\frac{\partial^{m-3} P_n^{n-3}}{\partial x^{m-3}}\right]$$

$$+ \quad . \quad . \quad .

für $n=3$:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = P_3{}^0 x^2 + P_3{}^1 x + P_3{}^2,$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = \frac{\partial P_3{}^0}{\partial x} x^2 + \frac{\partial P_3{}^1}{\partial x} x + \frac{\partial P_3{}^2}{\partial x} + 2P_3{}^0 x + P_3{}^1,$$

$$\frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 P_3{}^0}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 P_3{}^1}{\partial x^2} x + \frac{\partial^2 P_3{}^2}{\partial x^2} + 4\frac{\partial P_3{}^0}{\partial x} x + 2\frac{\partial P_3{}^1}{\partial x} + 2P_3{}^0,$$

$$\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4} = \frac{\partial^3 P_3{}^0}{\partial x^3} x^2 + \frac{\partial^3 P_3{}^1}{\partial x^3} x + \frac{\partial^3 P_3{}^2}{\partial x^3} + 6\frac{\partial^2 P_3{}^0}{\partial x^2} x + 3\frac{\partial^2 P_3{}^1}{\partial x^2} + 6\frac{\partial P_3{}^0}{\partial x};$$

. . . . . .

Die Einfachheit und Gesetzmässigkeit dieser Formeln fällt nun zur Genüge in die Augen.

Setzt man in (12) $x=0$, für welchen Werth wir $\left(\frac{\partial^m u_n}{\partial x^m}\right)$ zur Reihenentwicklung nach Maclaurin's Theorem brauchen, so erhält man:

$$(14)\quad \left(\frac{\partial^m u_n}{\partial x^m}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{m-1} P_n{}^{n-1}}{\partial x^{m-1}}\right)_0 + (m-1)\left(\frac{\partial^{m-2} P_n{}^{n-2}}{\partial x^{m-2}}\right)_0 + (m-1)(m-2)\left(\frac{\partial^{m-3} P_n{}^{n-3}}{\partial x^{m-3}}\right)_0 + \ldots + \frac{(m-1)!}{(m-n)!}\left(\frac{\partial^{m-n} P_n{}^0}{\partial x^{m-n}}\right)_0.$$

Gibt man, der Anschaulichkeit des sich ergebenden Gesetzes wegen, der Reihe für $u_1 = e^x$ die Form:

$$u_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!} x + \frac{\alpha_2}{2!} x^2 + \frac{\alpha_3}{3!} x^3 + \ldots,$$

worin natürlich $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$ ist; setzt man ferner:

(15)

$$u_2=\beta_0+\frac{\beta_1}{1!}x+\frac{\beta_2}{2!}x^2+\frac{\beta_3}{3!}x^3+\ldots.+\frac{\beta_m}{m!}x^m+\ldots.,$$

$$u_3=\gamma_0+\frac{\gamma_1}{1!}x+\frac{\gamma_2}{2!}x^2+\frac{\gamma_3}{3!}x^3+\ldots.+\frac{\gamma_m}{m!}x^m+\ldots.,$$

$$u_4=\delta_0+\frac{\delta_1}{1!}x+\frac{\delta_2}{2!}x^2+\frac{\delta_3}{3!}x^3+\ldots.+\frac{\delta_m}{m!}x^m+\ldots.,$$

. . . . . .

$$u_n=\nu_0+\frac{\nu_1}{1!}x+\frac{\nu_2}{2!}x^2+\frac{\nu_3}{3!}x^3+\ldots.+\frac{\nu_m}{m!}x^m+\ldots.,$$

so sind die Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \nu$ nichts anderes, als die entsprechenden Differenzialquotienten der Funktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots. u_n$, wenn man darin $x=0$ setzt, und können unmittelbar aus (14) erhalten werden. Zuvörderst folgt aus (4):

$$\alpha_0=\beta_0=\gamma_0=\delta_0=\ldots.=\nu_0=1.$$

Mit Hilfe von (13) und (14) erhält man:

(16)

$$\beta_m=\Sigma\left[\binom{m-1}{\varrho}\beta_{m-\varrho-1}\alpha_\varrho\right]+(m-1)\Sigma\left[\binom{m-2}{\varrho}\beta_{m-\varrho-2}\alpha_\varrho\right],$$

$$\gamma_m=\Sigma\left[\binom{m-1}{\varrho}\gamma_{m-\varrho-1}\beta_\varrho\right]+(m-1)\Sigma\left[\frac{(m-2)!}{c!\,b!\,a!}\gamma_c.\beta_b.\alpha_a\right]$$
$$+(m-1)(m-2)\Sigma\left[\frac{(m-3)!}{c!\,b!\,a!}\gamma_c.\beta_b.\alpha_a\right],$$

$$\delta_m=\Sigma\left[\binom{m-1}{\varrho}\delta_{m-\varrho-1}\gamma_\varrho\right]+(m-1)\Sigma\left[\frac{(m-2)!}{d!\,c!\,b!}\delta_d.\gamma_c.\beta_b\right]$$
$$+(m-1)(m-2)\Sigma\left[\frac{(m-3)!}{d!c!b!a!}\delta_d.\gamma_c.\beta_b.\alpha_a\right]+\frac{(m-1)!}{(m-4)!}\Sigma\left[\frac{(m-4)!}{d!c!b!a!}\delta_d.\gamma_c.\beta_b.\alpha_a\right]$$

allgemein:

$$\nu_m=\Sigma\left[\binom{m-1}{\varrho}\nu_{m-\varrho-1}\mu_\varrho\right]+(m-1)\Sigma\left[\frac{(m-2)!}{n!\,m_1!\,l!}\nu_n\mu_{m_1}\lambda_l\right]$$
$$+\frac{(m-1)!}{(m-3)!}\Sigma\left[\frac{(m-3)!}{n!\,m_1!\,l!\,k!}\nu_n\mu_{m_1}\lambda_l\varkappa_k\right]$$
$$+\ldots.+\frac{(m-1)!}{(m-s)!}\Sigma\left[\frac{(m-s)!}{n!\,m_1!\,l!\,k!\ldots.}\nu_n\mu_{m_1}\lambda_l\varkappa_k\ldots.\right]$$
$$+\ldots.+\frac{(m-1)!}{(m-n)!}\Sigma\left[\frac{(m-n)!}{n!\,m_1!\ldots.b!\,a!}\nu_n\mu_{m_1}\ldots.\beta_b\alpha_a\right],$$

worin jedesmal die Summe der innerhalb des Zeichens Σ im Nenner als Faktoriellen vorkommenden Zahlen gleich sein muss der im zugehörigen Zähler als solche vorkommenden Zahl, also: $m_1+n+l+k+\ldots.=m-s$. Auf diese Weise erhält man, auf fünf Glieder berechnet:

(17)

$$u_1=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\ldots.,$$

$$u_2=1+\frac{1}{1!}x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{10}{3!}x^3+\frac{41}{4!}x^4+\frac{196}{5!}x^5+\ldots.,$$

$$u_3=1+\frac{1}{1!}x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{16}{3!}x^3+\frac{101}{4!}x^4+\frac{756}{5!}x^5+\ldots.,$$

$$u_4=1+\frac{1}{1!}x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{16}{3!}x^3+\frac{125}{4!}x^4+\frac{1101}{5!}x^5+\ldots.,$$

$$u_5=1+\frac{1}{1!}x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{16}{3!}x^3+\frac{125}{4!}x^4+\frac{1296}{5!}x^5+\ldots.,$$

. . . . . .

Wie aus den angeführten Reihen zu ersehen ist, wiederholen sich in jeder späteren Reihe einige anfängliche Coëfficienten der früheren Reihe, und zwar in jeder nächst folgenden um 1 mehr als in der unmittelbar vorhergehenden; diese befolgen das Gesetz:

$$2^0,\ 3^1,\ 4^2,\ 5^3,\ 6^4,\ldots.;$$

dabei ist in der Reihe u_n der Coëfficient von x^n (gleich $\frac{(n+1)^{n-1}}{n!}$) der letzte, der diesem Gesetze folgt.

Für $n=\infty$ erhält man somit:

$$u_\infty=1+\frac{2^0}{1!}x+\frac{3^1}{2!}x^2+\frac{4^2}{3!}x^3+\frac{5^3}{4!}x^4+\frac{6^4}{5!}x^5+\ldots. \text{ in inf.},$$

welche Reihe augenfällig für jeden reellen positiven Werth von x divergirt, wie zu erwarten war. Die anfänglich erscheinende Divergenz der unter (17) angeführten Reihen geht in den späteren Gliedern in Convergenz über.

Eine andere Entwickelung der Funktion u_n nach dem Satze der unbestimmten Coëfficienten erhält man mit Zuhilfenahme der Formel (11) auf folgende Weise.

Diese Formel nimmt unter Berücksichtigung der Gleichung $P_n^r=u_n u_{n-1}\ldots u_r$ folgende Gestalt an:

$$(18)\quad \frac{\partial u_n}{\partial x} = u_n u_{n-1}\{1 + u_{n-2}[x + u_{n-3}(x^2 + u_{n-4}\{x^3 + \ldots.\})]\}.$$

Setzt man:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots.,\\
u_2 &= 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots.,\\
u_3 &= 1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \ldots.,\\
u_4 &= 1 + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \delta_3 x^3 + \ldots.,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
u_n &= 1 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \nu_3 x^3 + \ldots.,
\end{aligned}$$

so erhält man aus (18)

für $n = 1$:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \ldots. = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots.;$$

für $n = 2$:

$$\beta_1 + 2\beta_1 x + 3\beta_3 x^2 + \ldots. = \{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots.\}.\{1 + \beta_1 x + \ldots.\};$$

für $n = 3$:

$$\gamma_1 + 2\gamma_2 x + 3\gamma_3 x^2 + \ldots.$$
$$= (1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots.)(1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots.)[1 + (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots.)x];$$

für $n = 4$:

$$\delta_1 + 2\delta_2 x + 3\delta_3 x^2 + \ldots. = (1 + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \ldots.)(1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots.)$$
$$\times\{1 + (1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots.)[x + (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots.)x^2]\},$$

. . . . . .

Führt man die angezeigten Rechnungen aus und setzt die Coëfficienten der gleichnamigen Glieder einander gleich, so findet man leicht folgende Relationen:

$\alpha_1 = 1,$	$\beta_1 = 1,$
$2\alpha_2 = \alpha_1,$	$2\beta_2 = \beta_1 + 2\alpha_1,$
$3\alpha_3 = \alpha_2,$	$3\beta_3 = \beta_2 + \beta_1 . 2\alpha_1 + 3\alpha_2,$
$4\alpha_4 = \alpha_3,$	$4\beta_4 = \beta_3 + \beta_2 . 2\alpha_1 + \beta_1 . 3\alpha_2 + 4\alpha_3,$
. . . .	. . . . .

$\gamma_1 = 1,$	$\delta_1 = 1,$
$2\gamma_2 = \gamma_1 + 2\beta_1,$	$2\delta_2 = \delta_1 + 2\gamma_1,$
$3\gamma_3 = \gamma_2 + \gamma_1 . 2\beta_1 + 3\beta_2,$	$3\delta_3 = \delta_2 + \delta_1 . 2\gamma_1 + 3\gamma_2,$
$4\gamma_4 = \gamma_3 + \gamma_2 . 2\beta_1 + \gamma_1 . 3\beta_2 + 4\beta_3,$	$4\delta_4 = \delta_3 + \delta_2 . 2\gamma_1 + \delta_1 . 3\gamma_2 + 4\gamma_3,$
. . . . .	. . . . .

allgemein:

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= 1, \\
2\nu_2 &= \nu_1 + 2\mu_1, \\
3\nu_3 &= \nu_2 + \nu_1 . 2\mu_1 + 3\mu_2, \\
4\nu_4 &= \nu_3 + \nu_2 . 2\mu_1 + \nu_1 . 3\mu_2 + 4\mu_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Diese Relationen unter den Coëfficienten der Reihen für u_1, u_2, u_3, ... sind eben so einfach, als sie leicht zu handhaben sind bei der Berechnung derselben.

Noch einfacher und in ganz independenter Form erhält man die Coëfficienten der Reihe für u_n auf folgendem Wege der Induction. Es ist:

$$u_1 = e^x = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots.$$

Setzt man in dieser Gleichung statt x überall $x.e^x$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
u_2 = e^{x.e^x} = \frac{1}{0!} &+ \frac{x^1}{1!}\left(\frac{1^0x^0}{0!} + \frac{1^1x^1}{1!} + \frac{1^2x^2}{2!} + \ldots.\right) \\
&+ \frac{x^2}{2!}\left(\frac{2^0x^0}{0!} + \frac{2^1x^1}{1!} + \frac{2^2x^2}{2!} + \ldots.\right) \\
&+ \frac{x^3}{3!}\left(\frac{3^0x^0}{0!} + \frac{3^1x^1}{1!} + \frac{3^2x^2}{2!} + \ldots.\right) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und wenn man diess ausführt und ordnet:

$$\begin{aligned}
u_2 = \frac{1}{0!} &+ \frac{1^0}{1!\,0!}x + \left(\frac{1^1}{1!\,1!} + \frac{2^0}{2!\,0!}\right)x^2 \\
&+ \left(\frac{1^2}{1!\,2!} + \frac{2^1}{2!\,1!} + \frac{3^0}{3!\,0!}\right)x^3 + \left(\frac{1^3}{1!3!} + \frac{2^2}{2!2!} + \frac{3^1}{3!1!} + \frac{4^0}{4!0!}\right)x^4 \\
&+ \left(\frac{1^4}{1!\,4!} + \frac{2^3}{2!3!} + \frac{3^2}{3!2!} + \frac{4^1}{4!1!} + \frac{5^0}{5!0!}\right)x^5 + \ldots.
\end{aligned}$$

Man hat ferner

$$u_3 = e^{x \cdot e^x \cdot e^x} = \frac{1}{0!} + \frac{x \cdot e^{x \cdot e^x}}{1!} + \frac{x^2 \cdot e^{2x \cdot e^x}}{2!} + \frac{x^3 \cdot e^{3x \cdot e^x}}{3!} + \frac{x^4 e^{4x \cdot e^x}}{4!} + \ldots.$$

d. i.

$$u_3 = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!}\left(\frac{1^0 x^0 e^{0 \cdot x}}{0!} + \frac{1^1 x^1 e^{1x}}{1!} + \frac{1^2 x^2 e^{2x}}{2!} + \frac{1^3 x^3 e^{3x}}{3!} + \ldots.\right)$$

$$+ \frac{x^2}{2!}\left(\frac{2^0 x^0 e^{0x}}{0!} + \frac{2^1 x^1 e^{1x}}{1!} + \frac{2^2 x^2 e^{2x}}{2!} + \frac{2^3 x^3 e^{3x}}{3!} + \ldots.\right)$$

$$+ \frac{x^3}{3!}\left(\frac{3^0 x^0 e^{0x}}{0!} + \frac{3^1 x^1 e^{1x}}{1!} + \frac{3^2 x^2 e^{2x}}{2!} + \frac{3^3 x^3 e^{3x}}{3!} + \ldots.\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und wenn man so fortfährt:

$$u_3 = \frac{1}{0!} + \frac{1^0}{1!0!}x + \left(\frac{1^1 1^0}{1!1!0!} + \frac{2^0}{2!0!}\right)x^2 + \left(\frac{1^1 1^1}{1!1!1!} + \frac{1^2 2^0}{1!2!0!} + \frac{2^1 0^0}{2!1!0!} + \frac{3^0}{3!0!}\right)x^3$$

$$+ \left(\frac{1^1 1^2}{1!1!2!} + \frac{1^2 2^1}{1!2!1!} + \frac{1^3 3^0}{1!3!0!} + \frac{2^1 1^1}{2!1!1!} + \frac{2^2 2^0}{2!2!0!} + \frac{3^1 1^0}{3!1!0!} + \frac{4^0}{4!0!}\right)x^4$$

$$+ \left(\frac{1^1 1^3}{1!1!3!} + \frac{1^2 2^2}{1!2!2!} + \frac{1^3 3^1}{1!3!1!} + \frac{1^4 4^0}{1!4!0!} + \frac{2^1 1^2}{2!1!2!} + \frac{2^2 2^1}{2!2!1!} + \frac{2^3 3^0}{2!3!0!}\right.$$

$$\left. + \frac{3^1 1^1}{3!1!1!} + \frac{3^2 2^0}{3!2!0!} + \frac{4^1 1^0}{4!1!0!} + \frac{5^0}{5!0!}\right)x^5$$

$$+ \left(\frac{1^1 1^4}{1!1!4!} + \frac{1^2 2^3}{1!2!3!} + \frac{1^3 3^2}{1!3!2!} + \frac{1^4 4^1}{1!4!1!} + \frac{1^5 5^0}{1!5!0!} + \frac{2^1 1^3}{2!1!3!} + \frac{2^2 2^2}{2!2!2!}\right.$$

$$+ \frac{2^3 3^1}{2!3!1!} + \frac{2^4 4^0}{2!4!} + \frac{3^1 1^2}{3!1!2!} + \frac{3^2 2^1}{3!2!1!} + \frac{3^3 3^0}{3!3!0!} + \frac{4^1 1^1}{4!1!1!}$$

$$\left. + \frac{4^2 2^0}{4!2!0!} + \frac{5^1 1^0}{5!1!0!} + \frac{6^0}{6!0!}\right)x^6$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Entwickelt man u_4 auf dieselbe Weise, so erhält man nach gehöriger Reduktion und Ordnung:

$$u_4 = \frac{1}{0!} + \frac{1^0}{1!0!}x + \left(\frac{1^1 1^0}{1!1!0!} + \frac{2^0}{2!0!}\right)x^2 + \left(\frac{1^1 1^1 1^0}{1!1!1!0!} + \frac{1^2 2^0}{1!2!0!} + \frac{2^1 1^0}{2!1!0!} + \frac{3^0}{3!0!}\right)x^3$$
$$+ \left(\frac{1^1 1^1 1^1}{1!1!1!1!} + \frac{1^1 2^2 0}{1!1!2!0!} + \frac{1^2 2^1 1^0}{1!2!1!0!} + \frac{1^3 3^0}{1!3!0!} + \frac{2^1 1^1 1^0}{2!1!1!0!} + \frac{2^2 2^0}{2!2!0!} + \frac{3^1 1^0}{3!1!0!} + \frac{4^0}{4!0!}\right)x^4$$
$$+ \left(\frac{1^1 1^1 1^2}{1!1!1!2!} + \frac{1^1 2^2 1}{1!1!2!1!} + \frac{1^1 3^3 0}{1!1!3!0!} + \frac{1^2 2^1 1^1}{1!2!1!1!} + \frac{1^2 2^2 2^0}{1!2!2!0!} + \frac{1^3 3^1 1^0}{1!3!1!0!} + \frac{1^4 4^0}{1!4!0!} + \frac{2^1 1^1 1^1}{2!1!1!1!} + \frac{2^1 1^2 2^0}{2!1!2!0!} + \frac{2^2 2^1 1^0}{2!2!1!0!} + \frac{2^3 3^0}{2!3!0!} + \frac{3^1 1^1 1^0}{3!1!1!0!} + \frac{3^2 2^0}{3!2!0!} + \frac{4^1 1^0}{4!1!0!} + \frac{5^0}{5!0!}\right)x^5$$
$$+ \left(\frac{1^1 1^1 1^3}{1!1!1!3!} + \frac{1^1 2^2 2}{1!1!2!2!} + \frac{1^1 3^3 1}{1!1!3!1!} + \frac{1^1 4^4 0}{1!1!4!0!} + \frac{1^2 2^1 1^2}{1!2!1!2!} + \frac{1^2 2^2 2^1}{1!2!2!1!} + \frac{1^2 2^3 3^0}{1!2!3!0!} + \frac{1^3 3^1 1^1}{1!3!1!1!} + \frac{1^3 3^2 2^0}{1!3!2!0!} + \frac{1^4 4^1 1^0}{1!4!1!0!} + \frac{1^5 5^0}{1!5!0!} + \frac{2^1 1^1 1^2}{2!1!1!2!} + \frac{2^1 1^2 2^1}{2!1!2!1!} + \frac{2^1 1^3 3^0}{2!1!3!0!} + \frac{2^2 2^1 1^1}{2!2!1!1!} + \frac{2^2 2^2 2^0}{2!2!2!0!} + \frac{2^3 3^1 1^0}{2!3!1!0!} + \frac{2^4 4^0}{2!4!0!} + \frac{3^1 1^1 1^1}{3!1!1!1!} + \frac{3^1 1^2 2^0}{3!1!2!0!} + \frac{3^2 2^1 1^0}{3!2!1!0!} + \frac{3^3 3^0}{3!3!0!} + \frac{4^1 1^1 1^0}{4!1!1!0!} + \frac{4^2 2^0}{4!2!0!} + \frac{5^1 1^0}{5!1!0!} + \frac{6^0}{6!0!}\right)x^6$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man allgemein:

$$u_n = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_\varrho x^\varrho + \ldots,$$

so hat man:

$$A_\varrho = \Sigma\left(\frac{\alpha^\beta . \beta^\gamma . \gamma^\delta \ldots . \mu^\nu}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta! \ldots . \mu!\,\nu!}\right),$$

in welchem Ausdrucke $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \mu, \nu$ der Anzahl nach n nicht übersteigen dürfen und an die Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots . + \mu + \nu = \varrho$$

gebunden sind; den Werth 0 kann jedoch nur ν erhalten.

Aus der ganzen Entwicklung dieser Funktion wird man entnommen haben, dass sich dabei eben so schöne, als einfache Gesetze für die Coëfficienten der Reihe ergeben haben, die der Hauptsache nach von den sogenannten Polynomial-Coëfficienten abhängig sind, so wie, wenn auch in anderer Weise, die Coëfficienten

der ihr analogen Funktion der dritten Stufe $(a+x)^m$ durch die davon benannten Binomial-Coëfficienten gebildet werden. Eine tiefere Untersuchung der Coëfficienten jener Reihe wird noch manche interessante Gesetze zu Tage fördern, und es lässt sich hoffen, dass, wenn auch die beiden anderen Funktionen der vierten Rechnungsstufe eine ähnliche Bearbeitung werden erfahren haben, dadurch nicht bloss die Analysis, sondern auch die Elemente um eine nicht uninteressante Partie werden bereichert sein.

III.

Ueber die merkwürdigen Eigenschaften der drei simultanen Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} a=\pm\dfrac{u-vw}{\sqrt{(1-v^2)(1-w^2)}}, \\ b=\pm\dfrac{v-uw}{\sqrt{(1-u^2)(1-w^2)}}, \\ c=\pm\dfrac{w-uv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}. \end{cases}$$

Von

Herrn *Franz Unferdinger*

an der k. k. Marine-Sternwarte zu Triest.

Indem wir für den Anfang in der Auswahl der Vorzeichen keinerlei Beschränkung festsetzen, erheben wir die vorstehenden Gleichungen zum Quadrat und ziehen sie von der identischen $1=1$ ab, wodurch wir alsbald erhalten:

$$(2)\qquad \begin{cases} 1-a^2=\dfrac{(1-v^2)(1-w^2)-(u-vw)^2}{(1-v^2)(1-w^2)}, \\ 1-b^2=\dfrac{(1-u^2)(1-w^2)-(v-uw)^2}{(1-u^2)(1-w^2)}, \\ 1-c^2=\dfrac{(1-u^2)(1-v^2)-(w-uv)^2}{(1-u^2)(1-v^2)}; \end{cases}$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(3)\qquad \begin{aligned} Z &= (1-v^2)(1-w^2)-(u-vw)^2 \\ &= (1-u^2)(1-w^2)-(v-uw)^2 \\ &= (1-u^2)(1-v^2)-(w-uv)^2 \\ &= 1-u^2-v^2-w^2+2uvw \end{aligned}$$

setzt:

$$(4)\qquad \begin{cases} 1-a^2=\dfrac{Z}{(1-v^2)(1-w^2)}, \\ 1-b^2=\dfrac{Z}{(1-u^2)(1-w^2)}, \\ 1-c^2=\dfrac{Z}{(1-u^2)(1-v^2)}; \end{cases}$$

aus diesen letzteren folgt unmittelbar durch Division:

$$(5)\qquad \frac{1-a^2}{1-u^2}=\frac{1-b^2}{1-v^2}=\frac{1-c^2}{1-w^2},$$

und diese Gleichung besteht also, es mag in den Gleichungen (1) was immer für eine Auswahl der Vorzeichen getroffen werden.

Machen wir jetzt die Voraussetzung, dass in den zweiten Theilen der Gleichungen (1) die Zahl der Minuszeichen ungerade sei, so dass also entweder alle drei Vorzeichen — oder zwei + und eins — sind, so wird, wenn man zur Abkürzung

$$U^2=(1-u^2)(1-v^2)(1-w^2)$$

setzt, immer

$$abcU^2=-(u-vw)(v-uw)(w-uv)$$

oder

$$\begin{aligned} abcU^2 &= \frac{(uvw-u^2)(uvw-v^2)(uvw-w^2)}{uvw} \\ &= \frac{(uvw)^3-(u^2+v^2+w^2)(uvw)^2+(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)uvw-u^2v^2w^2}{uvw} \\ &= (uvw)^2-(u^2+v^2+w^2)uvw+(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)-uvw; \end{aligned}$$

nun ist

$$U^2 = 1 - (u^2 + v^2 + w^2) + (u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) - u^2v^2w^2,$$

folglich, wenn man von dieser Gleichung die vorhergehende subtrahirt:

$$U^2(1 - abc) = (1 - u^2v^2w^2) + uvw(1 - uvw) - (u^2 + v^2 + w^2)(1 - uvw)$$
$$= (1 - uvw)(1 - u^2 - v^2 - w^2 + 2uvw),$$

und man hat also, mit Rücksicht auf die Gleichung (3) die Relation:

$$U^2(1 - abc) = Z(1 - uvw), \tag{7}$$

welche immer Giltigkeit hat, sobald in den Ausgangsgleichungen (1) die Minuszeichen in ungerader Anzahl vorkommen, was offenbar auf vier verschiedene Arten möglich ist.

Nun geben die Gleichungen (4) mit Leichtigkeit:

$$\frac{1-a^2}{1-u^2} = \frac{Z}{U^2}, \quad \frac{1-b^2}{1-v^2} = \frac{Z}{U^2}, \quad \frac{1-c^2}{1-w^2} = \frac{Z}{U^2};$$

also

$$U^2 = \frac{1-u^2}{1-a^2}Z = \frac{1-v^2}{1-b^2}Z = \frac{1-w^2}{1-c^2}Z;$$

ersetzt man hierin U^2 durch seinen aus (7) folgenden Werth und kürzt ab, so erhält man:

$$\frac{1-u^2}{1-a^2} = \frac{1-v^2}{1-b^2} = \frac{1-w^2}{1-c^2} = \frac{1-uvw}{1-abc}, \tag{8}$$

dann ist aber auch

$$\frac{1-u^2}{1-a^2} = \frac{1-v^2}{1-b^2} = \frac{1-w^2}{1-c^2} = \frac{1-u^2-v^2-w^2+2uvw}{1-a^2-b^2-c^2+2abc},$$

oder, wenn man analog mit (3)

$$Z' = 1 - a^2 - b^2 - c^2 + 2abc \tag{9}$$

setzt:

$$\frac{1-u^2}{1-a^2} = \frac{1-v^2}{1-b^2} = \frac{1-w^2}{1-c^2} = \frac{Z}{Z'}, \tag{10}$$

und die Giltigkeit dieser letzten Relation ist wieder nur an die Bedingung gebunden, dass in den Gleichungen (1) die Anzahl der Minuszeichen ungerade ist.

Aus der ersten der Gleichungen (4) findet man leicht:

$$\frac{Z}{(1-u^2)^2} = \frac{(1-a^2)(1-v^2)(1-w^2)}{(1-u^2)^2},$$

oder, weil nach (8)

$$\frac{(1-v^2)(1-w^2)}{(1-u^2)^2} = \frac{(1-b^2)(1-c^2)}{(1-a^2)^2}$$

ist:

$$\frac{Z}{(1-u^2)^2} = \frac{(1-b^2)(1-c^2)}{1-a^2}, \text{ ebenso wird:}$$

$$\frac{Z}{(1-v^2)^2} = \frac{(1-a^2)(1-c^2)}{1-b^2},$$

$$\frac{Z}{(1-w^2)^2} = \frac{(1-a^2)(1-b^2)}{1-c^2};$$

da nun aus den Gleichungen (10) folgt:

$$(1-u^2)\frac{Z'}{Z} = 1-a^2,$$

$$(1-v^2)\frac{Z'}{Z} = 1-b^2,$$

$$(1-w^2)\frac{Z'}{Z} = 1-c^2;$$

so erhält man durch reihenweise Multiplication dieser drei Gleichungen mit den drei vorhergehenden:

$$\frac{Z'}{1-u^2} = (1-b^2)(1-c^2),$$

$$\frac{Z'}{1-v^2} = (1-a^2)(1-c^2),$$

$$\frac{Z'}{1-w^2} = (1-a^2)(1-b^2)$$

oder:

$$(11) \qquad \begin{cases} 1-u^2 = \dfrac{Z'}{(1-b^2)(1-c^2)}, \\ 1-v^2 = \dfrac{Z'}{(1-a^2)(1-c^2)}, \\ 1-w^2 = \dfrac{Z'}{(1-a^2)(1-b^2)}. \end{cases}$$

Vergleicht man diese drei Gleichungen mit jenen (4), so sieht man, dass sie daraus durch einfache Vertauschung der Unbekannten u, v, w mit den Bekannten a, b, c abgeleitet werden können; überhaupt bleiben alle vorhergehenden Relationen, wie

(5), (8), (10), auch dann noch giltig, wenn gleichzeitig a mit u, b mit v, c mit w vertauscht wird, und diese merkwürdige Beziehung wird immer stattfinden, sobald in den Gleichungen (1) die Anzahl der Minuszeichen ungerade ist.

Werden die Gleichungen (4) und (11) der Ordnung nach mit einander multiplicirt, so gibt jedes Product auch die Relation:

$$(12)\quad ZZ'=(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-u^2)(1-v^2)(1-w^2),$$

und wenn man die Gleichungen (4) für sich, die Gleichungen (11) für sich mit einander multiplicirt, so folgt:

$$(13)\quad \begin{cases} Z^3=(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)\{(1-u^2)(1-v^2)(1-w^2)\}^2, \\ Z'^3=(1-u^2)(1-v^2)(1-w^2)\{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)\}^2. \end{cases}$$

Bestimmt man aus den drei Gleichungen (11) die Unbekannten u, v, w, so ergibt sich, weil

$$(14)\quad \begin{cases} (1-b^2)(1-c^2)-Z'=(a-bc)^2, \\ (1-a^2)(1-c^2)-Z'=(b-ac)^2, \\ (1-a^2)(1-b^2)-Z'=(c-ab)^2 \end{cases}$$

ist:

$$(15)\quad \begin{cases} u=\pm\dfrac{a-bc}{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}, \\ v=\pm\dfrac{b-ac}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}}, \\ w=\pm\dfrac{c-ab}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}; \end{cases}$$

wobei jedoch zur richtigen Auswahl der Vorzeichen noch folgende Betrachtung nothwendig ist. Da dieses Endergebniss unserer Rechnung an die Bedingung geknüpft ist, dass die Anzahl der Minuszeichen in den Gleichungen (1) ungerade ist, so kann man zu denselben nur dann gelangen, wenn man von einem der folgenden vier Gleichungensysteme ausgeht:

$$(A)\quad \begin{cases} a=-\dfrac{u-vw}{\sqrt{(1-v^2)(1-w^2)}}, \\ b=-\dfrac{v-uw}{\sqrt{(1-u^2)(1-w^2)}}, \\ c=-\dfrac{w-uv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}. \end{cases} \qquad (B)\quad \begin{cases} a=-\dfrac{u-vw}{\sqrt{(1-v^2)(1-w^2)}}, \\ b=+\dfrac{v-uw}{\sqrt{(1-u^2)(1-w^2)}}, \\ c=+\dfrac{w-uv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}. \end{cases}$$

$$(C)\quad \begin{cases} a = +\dfrac{u-vw}{\sqrt{(1-v^2)(1-w^2)}}, \\ b = -\dfrac{v-uw}{\sqrt{(1-u^2)(1-w^2)}}, \\ c = +\dfrac{w-uv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}. \end{cases} \qquad (D)\quad \begin{cases} a = +\dfrac{u-vw}{\sqrt{(1-v^2)(1-w^2)}}, \\ b = +\dfrac{v-uw}{\sqrt{(1-u^2)(1-w^2)}}, \\ c = -\dfrac{w-uv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}. \end{cases}$$

Umgekehrt: da die Gleichungen (15), a, b, c als die Unbekannten betrachtet, mit den Gleichungen (1) ganz übereinstimmen, so wird man von jenen zu diesen nur dann zurückkehren können, wenn in (15) die Anzahl der Minuszeichen ungerade ist; man hat also zu den vier Systemen (A), (B), (C), (D) folgende vier Auflösungen:

$$(A')\quad \begin{cases} u = -\dfrac{a-bc}{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}, \\ v = -\dfrac{b-ac}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}}, \\ w = -\dfrac{c-ab}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}. \end{cases} \qquad (B')\quad \begin{cases} u = -\dfrac{a-bc}{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}, \\ v = +\dfrac{b-ac}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}}, \\ w = +\dfrac{c-ab}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}. \end{cases}$$

$$(C')\quad \begin{cases} u = +\dfrac{a-bc}{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}, \\ v = -\dfrac{b-ac}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}}, \\ w = +\dfrac{c-ab}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}. \end{cases} \qquad (D')\quad \begin{cases} u = +\dfrac{a-bc}{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}, \\ v = +\dfrac{b-ac}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}}, \\ w = -\dfrac{c-ab}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}. \end{cases}$$

Das System (A) bleibt ungeändert, wenn man gleichzeitig u mit v und a mit b oder u mit w und a mit c oder v mit w und b mit c vertauscht, und da diese Eigenschaft offenbar auch den Auflösungen dieses Systems zukommen muss, indem die Auflösungen nur als eine andere Form der gegebenen Gleichungen zu betrachten sind, so sieht man, dass nur (A') als Auflösung des Systems (A) gelten kann. — Das System (B) geht aus dem System (A) hervor, wenn man gleichzeitig $-b$ und $-c$ an die Stelle von b und c setzt. Nimmt man dieselbe Vertauschung in dem System (A') vor, so erhält man jenes (B'), folglich gehört

(B′) als Auflösung zu dem System (B). — Ersetzt man in dem System (A) gleichzeitig a und c durch $-a$ und $-c$, so erhält man das System (C), und dieselbe Vertauschung in (A′) vorgenommen gibt (C′), folglich ist (C′) die Lösung des Systems (C). Auf ähnliche Art findet man (D′) als Lösung des Systems (D).

Um nun auch auf diejenigen Fälle zu kommen, in welchen in den Ausgangsgleichungen (1) die Anzahl der Minuszeichen gerade ist, setzen wir in den vier Systemen (A), (B), (C), (D) $-a$ an die Stelle von a, dadurch verwandeln sich dieselben in die folgenden vier neuen Systeme (E), (F), (G), (H), und nimmt man dieselbe Verwandlung in den Systemen (A′), (B′), (C′), (D′) vor, so gelangt man unmittelbar zu den ihnen beziehungsweise entsprechenden Auflösungen (E′), (F′), (G′), (H′), womit alle Zeichencombinationen der Ausgangsgleichungen (1) erschöpft sind.

$$(E)\quad \begin{cases} a = +\dfrac{u - vw}{\sqrt{(1-v^2)(1-w^2)}}, \\ b = -\dfrac{v - uw}{\sqrt{(1-u^2)(1-w^2)}}, \\ c = -\dfrac{w - uv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}. \end{cases} \qquad (F)\quad \begin{cases} a = +\dfrac{u - vw}{\sqrt{(1-v^2)(1-w^2)}}, \\ b = +\dfrac{v - uw}{\sqrt{(1-u^2)(1-w^2)}}, \\ c = +\dfrac{w - uv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}. \end{cases}$$

$$(G)\quad \begin{cases} a = -\dfrac{u - vw}{\sqrt{(1-v^2)(1-w^2)}}, \\ b = -\dfrac{v - uw}{\sqrt{(1-u^2)(1-w^2)}}, \\ c = +\dfrac{w - uv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}. \end{cases} \qquad (H)\quad \begin{cases} a = -\dfrac{u - vw}{\sqrt{(1-v^2)(1-w^2)}}, \\ b = +\dfrac{v - uw}{\sqrt{(1-u^2)(1-w^2)}}, \\ c = -\dfrac{w - uv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}. \end{cases}$$

$$(E')\quad \begin{cases} u = +\dfrac{a + bc}{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}, \\ v = -\dfrac{b + ac}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}}, \\ w = -\dfrac{c + ab}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}. \end{cases} \qquad (F')\quad \begin{cases} u = +\dfrac{a + bc}{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}, \\ v = +\dfrac{b + ac}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}}, \\ w = +\dfrac{c + ab}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}. \end{cases}$$

$$(G')\quad \begin{cases} u=-\dfrac{a+bc}{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}, \\ v=-\dfrac{b+ac}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}}, \\ w=+\dfrac{c+ab}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}, \end{cases} \qquad (H')\quad \begin{cases} u=-\dfrac{a+bc}{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}, \\ v=+\dfrac{b+ac}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}}, \\ w=-\dfrac{c+ab}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}. \end{cases}$$

Auch die vier letzten Systeme (E), (F), (G), (H) haben eine gemeinschaftliche Auflösung, welche aus jener (14) der Systeme (A), (B), (C), (D) hervorgeht, indem man $-a$ an die Stelle von a setzt. Dadurch verwandelt sich Z' in

$$(16)\qquad Z_1 = 1-a^2-b^2-c^2-2abc,$$

und man hat:

$$(17)\qquad \begin{cases} 1-u^2=\dfrac{Z_1}{(1-b^2)(1-c^2)}, \\ 1-v^2=\dfrac{Z_1}{(1-a^2)(1-c^2)}, \\ 1-w^2=\dfrac{Z_1}{(1-a^2)(1-b^2)}. \end{cases}$$

IV.

Eine Notiz über Wendelinien.

Von

Herrn *E. Bacaloglo*

in Leipzig.

Die Flächen, deren Hauptkrümmungsradien entgegengesetzte Vorzeichen haben, bieten in allen ihren Punkten wirkliche Wendepunkte. Nimmt man nämlich die Berührungsebene parallel mit der der Figur an, bezeichnen OR_1, OR_2 (Taf. I. Fig. 3.) die Richtungen der Hauptschnitte, OP_1, OP_2 die der normalen Schnitte, für welche $\varrho = \infty$ wird, OS_1, OS_2 die Durchschnittscurven der Berührungsebene mit der Fläche, so befinden sich in der Umgebung des Punktes O alle Bogenelemente der durch O gelegten normalen Schnitte in dem spitzen Winkel α z. B. ($=90^0$, wenn $R_1 = R_2$), über der Berührungsebene, und wenden dieser ihre convexe Seite zu; dagegen befinden sich unter dieser Ebene, derselben wieder die convexe Seite zuwendend, alle Bogenelemente, die in dem Raume β liegen; das Element der Curven S_1S_1, S_2S_2, einen Wendepunkt bei O darbietend, dient als Uebergang von dem einen dieser Systeme zu dem andern, und desshalb mögen diese Curven Wendelinien heissen. Von Interesse sind dieselben für die Rotationsfläche der Kettenlinie

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}),$$

wenn die Berührungsebene durch den Scheitel der Kettenlinie gelegt wird. Die Gleichung der Wendecurve lautet:

$$y = \sqrt{(y_1 + a)^2 - a^2},$$

wenn $NP = y_1$ gesetzt wird. Also sind die Ordinaten PM der Curve OS_1 gleich den entsprechenden Bogenlängen ON der Kettenlinie. Die Differenz $MN = y - y_1$, welche bei O Null ist, wächst und erreicht für $x = \infty$ den Werth $y - y_1 = a$. Denn es ist

$$y-y_1=a\{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\frac{a}{a+y_1}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1.1}{1.2}\left(\frac{a}{a+y_1}\right)^3-\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1.1.3}{1.2.3}\left(\frac{a}{a+y_1}\right)^5$$
$$-\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1.1.3.5}{1.2.3.4}\left(\frac{a}{a+y_1}\right)^7-\ldots\ldots\};$$

der rechte Theil dieser Gleichung reducirt sich auf a für $y_1=\infty$.

V.

Ueber Fusspunktcurven und Fusspunktflächen.

Von

Herrn *E. Bacaloglo*

in Leipzig.

A.

I. Man bestimmt bekanntlich die Fusspunktcurve einer gegebenen Curve

(1) . . . . . $y=f(x)$

durch Elimination von x und y aus dieser Gleichung und denen der Tangente und einer auf dieser Senkrechten

(2) . . . . . $y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x)$,

(3) . . . . . $y'=-\frac{dx}{dy}x'$;

wo die Gleichung (2) durch folgende:

(4) $$x'x+y'y=x'^2+y'^2$$

ersetzt werden kann und der gegebene Pol als Coordinatenanfang angenommen wurde.

Wendet man dieses Verfahren auf die Linien zweiten Grades, deren Gleichung wie folgt geschrieben werden kann:

(5) . . . . $y^2+Ax^2+2By+2Cx+D=0$,

au, so findet man:

$$(6)\quad A(x'^2+y'^2)^2+2(ABy'+Cx')(x'^2+y'^2)-(Bx'-Cy')^2 + D(x'^2+Ay'^2)=0,$$

oder durch Anwendung von Polarcoordinaten:

$$(7)\quad Ar'^2+2(AB\sin\varphi'+C\cos\varphi')r'+(D-B^2)\cos^2\varphi' + (AD-C^2)\sin^2\varphi'+2BC\sin\varphi'\cos\varphi'=0,$$

welche Gleichung die Fusspunktcurve einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel darstellt, jenachdem $A \gtreqless 0$ ist.

II. Bezeichnen m, n die Coordinaten des Mittelpunktes (Ellipse, Hyperbel) oder die des Scheitels (Parabel), so ergeben sich folgende specielle Gleichungen:

$$(8)\quad r'=m\cos\varphi'+n\sin\varphi'\pm\sqrt{a^2\cos^2\varphi'+b^2\sin^2\varphi'},$$

$$(9)\quad r'=m\cos\varphi'+n\sin\varphi'\pm\sqrt{a^2\cos^2\varphi'-b^2\sin^2\varphi'},$$

$$(10)\quad r'=m\cos\varphi'+n\sin\varphi'-\frac{p}{2}\cdot\frac{\sin^2\varphi'}{\cos\varphi'}.$$

Hieraus folgt zunächst, dass die Fusspunktcurven der Ellipse und Hyperbel geschlossene Curven sind, die der Parabel aber in's Unendliche fortschreitende Zweige besitzen. Eine Symmetrie der Gestalt findet nur dann statt, wenn $m=0$ oder $n=0$; für die Parabel muss $n=0$ sein. Die Anomalie φ' ist zwischen gewissen, leicht zu berechnenden, durch die Geraden TT', tt' (Taf. I. Fig. 4.) angegebenen Grenzen enthalten, welche Geraden auf den vom Pole gezogenen Tangenten senkrecht stehen; für die Hyperbel ist überdies φ' absolut genommen kleiner als die Neigung der Asymptoten gegen die Y-Achse.

Die Gleichungen (8), (9) zeigen noch, dass ein auf der Verbindungslinie des Pols mit dem Mittelpunkte der Ellipse oder Hyperbel, als Durchmesser genommen, beschriebener Kreis, dessen Gleichung

$$(11)\quad \ldots\ldots\quad r_1=m\cos\varphi'+n\sin\varphi'$$

ist, den zwischen beiden Curventheilen enthaltenen Theil MN jedes Vectors ON halbirt. Dasselbe findet auch dann statt, wenn der Pol auf der gegebenen Curve oder innerhalb derselben liegt.

Aus der Gleichung (10) oder in rechtwinkligen Coordinaten

(12) . . . . $x'^2+y'^2=mx'+ny'-\frac{p}{2}\cdot\frac{y^2}{x}$,

ergiebt sich, dass die Fusspunktcurve der Parabel, wo auch der Pol liegen mag, immer eine Asymptote hat, welche in der Entfernung $\frac{p}{2}$, links vom Pole, senkrecht auf der Parabelachse steht und im Allgemeinen die Fusspunktcurve noch in einem gewissen Punkte schneidet.

Man sieht leicht ein, dass alle Fusspunktcurven der Linien zweiten Grades quadrirbar sind. So findet man für die Fusspunktcurve des Kreises, wenn der Pol auf dessen Umfange liegt:

(13)

$$r'=R(1+\cos\varphi')=2R\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\text{Fläche}=\int_0^{\pi} r'^2 d\varphi'=R^2\left\{\frac{3\varphi'}{2}+2\sin\varphi'+\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{2}\right\}_0^{\pi}=\tfrac{3}{4}\pi R^2,$$

$$\text{Umfang}=4R\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi'}{2}d\varphi'=8R(\sin\tfrac{\varphi'}{2})_0^{\pi}=8R.$$

Der Inhalt der Fusspunktcurve der Ellipse, wenn der Mittelpunkt als Pol betrachtet wird, ist $=\pi\frac{a^2+b^2}{2}$. In demselben Falle findet man für die Hyperbel:

$$\text{Fläche}=a^2(\sin\varphi'\cos\varphi'+\varphi')_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}+b^2(\sin\varphi'\cos\varphi'-\varphi')_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}$$

$$=ab+(a^2-b^2)\operatorname{arctg}\frac{a}{b}.$$

Für die Lemniscate reducirt sich dieser Ausdruck auf a^2.

III. Betrachtet man den Mittelpunkt der Hypocycloide

(14) . . . . . $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$

als Pol, so findet man für deren Fusspunktcurve in Polarcoordinaten die Gleichung

(15) . . . . . $r=\frac{c\cdot\sin 2\varphi}{2}$,

wo $c=OX=ST$ (Taf. I. Fig. 5.), und für die Länge des Bogens den Ausdruck

$$(16)\quad c\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\tfrac{3}{4}\sin^2 2\varphi}\,.\,d\varphi \text{ oder } \frac{c}{2}\int_0^{\psi}\sqrt{1-\tfrac{3}{4}\sin^2\psi}\,.\,d\psi,$$

wenn man $\psi=2\varphi$ als die Variabele betrachtet, welcher Ausdruck bekanntlich die Hälfte des Bogens einer Ellipse darstellt, deren grosse Achse $=2c=YY'$, die kleine aber $=c=BB'$, wo die Bögen von B aus nach Y gemessen werden. Der ganze Umfang der Curve (15) ergiebt sich hiernach gleich dem Umfange der in Rede stehenden Ellipse.

Da der Krümmungshalbmesser der Hypocycloide (14) $MN=3.OP$ ist, also $OQ=\frac{1}{4}ON$, so folgt, dass der geometrische Ort der Durchschnittspunkte der Evolutenvectoren ON und der Evolvententangenten ST wieder eine Hypocycloide ist, deren Parameter $=\frac{c}{2}$ und welche die Hypocycloide YMX zur Evolute hat.

IV. Das Product rr' aus den Vectoren einer Curve und ihrer Fusspunktcurve ist nur dann constant, wenn die Basis eine gleichseitige Hyperbel ist, und zwar gleich dem Quadrate a^2 der Halbachse, vorausgesetzt, dass der Pol im Mittelpunkte liegt. Denn es ist

$$(17)\ldots rr'=r^3\frac{d\varphi}{ds}=\frac{r^3}{\sqrt{r^2+\frac{dr^2}{d\varphi^2}}}=\text{einer Constanten } a^2$$

zu setzen, woraus

$$d\varphi=\frac{a^2dr}{r\sqrt{r^4-a^4}},\quad r^2\cos 2(\varphi+\alpha)=a^2$$

oder

$$x^2-y^2=a^2.$$

V. Die Gleichung der Fusspunktcurve kann noch direct in Polarcoordinaten durch Elimination von r und φ aus den Gleichungen

$$(18)\quad r'=r\cos(\varphi-\varphi'),\quad r=f(\varphi),\quad \operatorname{tang}(\varphi-\varphi')=\frac{dr}{rd\varphi}$$

bestimmt werden. So ergiebt sich für die Fusspunktcurve der Lemniscate:

$$r=a\sqrt{\cos 2\varphi},\quad \operatorname{tang}(\varphi-\varphi')=-\operatorname{tang}2\varphi$$

$$\varphi=\tfrac{1}{3}\varphi'\quad\text{und}\quad r'=a\cos^{\frac{3}{2}}\tfrac{2}{3}\varphi'.$$

Die Relation $\varphi' = 3\varphi$ giebt ein leichtes Mittel zur Construction der Tangente in einem Lemniscatenpunkte. Ebenso ist für die Fusspunktcurve der logarithmischen Spirale:

$$r = ae^{m\varphi}, \quad \operatorname{tang}(\varphi - \varphi') = m, \quad \varphi = \varphi' + \operatorname{arctg} m,$$

$$r' = \frac{a}{\sqrt{1+m^2}} e^{m(\varphi' + \operatorname{arctg} m)} = \frac{a}{\sqrt{1+m^2}} e^{m\varphi'};$$

eine der gegebenen ähnliche Spirale. Auf dieselbe Weise ergiebt sich für die Fusspunktcurve der Linie $r\cos^{\frac{2}{3}}\frac{2}{3}\varphi = a$ die Gleichung $r' = a\cos^{\frac{1}{3}}3\varphi'$.

VI. Bemerkt man, dass die Flächenelemente einer Curve, ihrer Fusspunktcurve und des zwischen der gegebenen Curve und ihrer Evolute enthaltenen Raumes respective durch

$$(19) \quad . \quad . \quad d\Omega = \frac{r^2 d\varphi}{2}, \quad d\alpha = \frac{r'^2 d\varphi'}{2}, \quad d\sigma = \frac{\varrho^2 d\omega}{2}$$

dargestellt werden und dass

$$\varrho d\omega = ds, \quad d\varphi' = d\omega, \quad r' = r.\frac{rd\varphi}{ds};$$

so folgt:

$$(20) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\Omega^2 = d\alpha . d\sigma.$$

Betrachtet man Ω, α, σ als Variabele und integrirt durch Einführung der willkührlichen Function $\varphi(c)$, so ergiebt sich, wenn man identisch

$$4cd\Omega^2 = (d\alpha + cd\sigma)^2 - (d\alpha - cd\sigma)^2$$

setzt und $d\alpha = cd\sigma$ annimmt, zunächst

$$(21) \quad . \quad . \quad 2\sqrt{c}\Omega = \alpha + c\sigma + \varphi(c), \quad \alpha = c\sigma + \psi(c),$$

und durch Differentiation in Bezug auf c:

$$\Omega = \sqrt{c}(\sigma + \varphi'(c)), \quad 0 = \sigma + \psi'(c),$$

woraus

$$\psi(c) = -\varphi(c) + 2c\varphi'(c)$$

und zuletzt

$$(22) \quad . \quad . \quad \begin{cases} \Omega = -2c^{\frac{1}{2}}\varphi''(c), \quad \sigma = -\varphi'(c) - 2c\varphi''(c), \\ \alpha = -\varphi(c) + c\varphi'(c) - 2c^2\varphi''(c); \end{cases}$$

welches System von Gleichungen der Differentialgleichung (20) genügt; denn es ist:

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} d\Omega &= -[3\varphi''(c)+2c\varphi'''(c)]\sqrt{c}\,dc,\\ d\alpha &= -[3\varphi''(c)+2c\varphi'''(c)]c\,dc,\\ d\sigma &= -[3\varphi''(c)+2c\varphi'''(c)]\,dc. \end{aligned}\right.$$

Als Folge des Obigen ergiebt sich, dass die vom Leitstrahl der Fusspunktcurve beschriebene Fläche nicht in einem constanten Verhältnisse zu derjenigen steht, welche der Leitstrahl der Basis beschreibt, denn man gelangt alsdann auf constante Werthe von Ω, σ, α. Man kann wohl aber den Pol so wählen, dass bestimmte Flächentheile in einem constanten Verhältnisse stehen. So findet man z. B. durch directe Rechnung (Formel (8)), dass die Gesammtfläche der Fusspunktcurve einer Ellipse das k-fache der der Ellipse ist, wenn der Pol (m, n) auf einem Kreise liegt, dessen Gleichung

$$(24)\qquad m^2+n^2=2kab-(a^2+b^2)$$

ist, wo der Coordinatenanfang im Ellipsenmittelpunkte liegt und für einen äusseren Pol das Stück *ORBMO* (Taf. I. Fig. 4.) noch besonders gerechnet ist.

VII. Die oben aufgestellte Formel (21):

$$\alpha=2\sqrt{c}\Omega-c\sigma-\varphi(c)$$

führt gleichfalls zu den bekannten Sätzen über die Constanz des Flächeninhaltes einer Fusspunktcurve bei variirendem Pole. Bezeichnen nämlich m, n dessen Coordinaten in Bezug auf einen festen Punkt, so stellen sich Ω und $\varphi(c)$, mithin auch α, als Functionen von m, n heraus, die in Bezug auf diese Grössen immer dieselbe Form behalten, von welcher Natur auch die Basis sein mag. Präciser ergiebt sich dieses aus der Relation:

$$(25)\qquad r_2=m\cos\varphi+n\sin\varphi+r_1,$$

wenn r_1, r_2 die derselben Anomalie φ entsprechenden Vectoren zweier Fusspunktcurven derselben Basis und m, n die relativen Coordinaten der Pole bezeichnen (vergl. Crelle Bd. 50.). So folgt aus den Formeln (8), (9), (10), wenn F, F_1, F_2 den gesammten Flächeninhalt der respectiven Fusspunktcurven bezeichnen:

(26)

$$F=\frac{\pi}{2}(m^2+n^2+a^2+b^2),$$

$$F_1=\frac{\pi}{4}([m-\tfrac{p}{2}]^2+n^2-p^2),$$

$$F_2=m^2\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b}+\frac{ab}{a^2+b^2}\right)+n^2\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b}-\frac{ab}{a^2+b^2}\right)+ab+(a^2-b^2)\operatorname{arctg}\frac{a}{b};$$

welche Gleichungen die nöthigen Bedingungen für die Constanz von F, F_1, F_2 enthalten.

VIII. Eine von der zu der Constanz des Inhalts einer Fusspunktcurve zwischen bestimmten Grenzen führenden Aufgabe etwas verschiedene ist die unter der Formel (24) enthaltene, welche allgemeiner durch

$$\alpha_1^2 = k . \Omega_1^2 \tag{27}$$

ausgedrückt wird, worin k eine positive Zahl ist und die beigesetzten Indices die Grenzen angeben. Der entsprechende Satz ist ebenso allgemein, und man findet für den durch obige Gleichung bestimmten Ort, wie auch die Basis beschaffen sein mag, eine Ellipse (Kreis); denn es folgt daraus in Verbindung mit (25):

(28)

$$m^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2\varphi d\varphi + n^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2\varphi d\varphi + 2mn \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi$$
$$+ 2m \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_1 \cos\varphi d\varphi + 2n \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_1 \sin\varphi d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_1^2 d\varphi$$
$$= k\{m(y_1 - y_2) - n(x_1 - x_2) + x_1 y_1 - x_2 y_2 + 2\int_{x_1}^{x_2} y dx\},$$

wo der Kürze wegen die der Basis entsprechenden rechtwinkligen Coordinaten beibehalten wurden. Man kann sich dabei leicht überzeugen, dass 1) das Grössenverhältniss und die Lage der Achsen der beiden Aufgaben entsprechenden Ellipsen für dieselben Grenzen identisch sind; 2) dass die Mittelpunkte dieser beiden Ellipsen im Allgemeinen zusammenfallen; und 3) der Flächeninhalt der Fusspunktcurve variirt, wenn der Pol auf der Ellipse (28) sich bewegt, dagegen das Verhältniss $\frac{\alpha}{\Omega}$ constant bleibt.

Der obigen analog ist die Aufgabe, den Pol so zu bestimmen, dass $\alpha_1^2 = \Omega_1^2 + \sigma_1^2$ u. s. w. So findet man in Bezug auf die Ellipse, dass der Inhalt der Fusspunktcurve gleich ist dem Inhalte der ersteren zu dem ihrer Evolute addirt, wenn der Pol auf dem Kreise vom Radius

$$\frac{a-b}{\sqrt{ab}} \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2} - \frac{(a-b)^2}{4}}$$

liegt.

IX. Eliminirt man x, y, z aus den Gleichungen

$$\varphi(x, z)=0, \quad \psi(y, z)=0, \tag{29}$$

$$\frac{x'-x}{dx}=\frac{y'-y}{dy}=\frac{z'-z}{dz}, \tag{30}$$

$$x'dx+y'dy+z'dz=0, \tag{31}$$

woraus $x'x+y'y+z'z=x'^2+y'^2+z'^2$, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x', y', z', welche die Fusspunktencurve einer krummen Linie von doppelter Krümmung darstellen. So findet man für die Fusspunktcurve einer cylindrischen Spirale, vorausgesetzt, dass der Pol auf der Cylinderachse liegt, eine auf einem einfachen Umdrehungshyperboloide liegende Spirale; dasselbe hat zum Kehlkreis den durch den gegebenen Pol gelegten senkrechten Schnitt des Cylinders. Stellen nämlich die Gleichungen

$$x=R\cos\frac{z}{aR}, \quad y=R\sin\frac{z}{aR}$$

die cylindrische Spirale dar, so wird nach (30), (31):

$$\frac{x'-x}{y}=\frac{y'-y}{x}=\frac{z-z'}{aR}, \quad x'y-y'x=aRz'.$$

Aus ersterer Gleichung folgt:

$$x'x+y'y=R^2, \quad x'^2+y'^2=R^2+\frac{(z-z')^2}{a^2}, \tag{32}$$

woraus

$$y=R\frac{Ry'+ax'z'}{x'^2+y'^2}, \quad x=R\frac{Rx'-ay'z'}{x'^2+y'^2}$$

und zuletzt

$$x'^2+y'^2=R^2+a^2z'^2, \tag{33}$$

welche Gleichung ein einfaches Rotationshyperboloid darstellt. Die zweite Gleichung (32) giebt übrigens in Verbindung mit (33):

$$z=(1+a^2)z',$$

woraus

$$z'=\frac{aR}{1+a^2}\operatorname{arctang}\left(\frac{Ry'+ax'z'}{Rx'-ay'z'}\right). \tag{34}$$

Hieraus ergiebt sich für die Projection der gesuchten Linie auf der XY-Ebene, durch Einführung von Polarcoordinaten, folgende Gelichung:

$$(35)\quad \sqrt{r^2-R^2}=\frac{a^2R}{1+a^2}\arccos\left(\frac{R}{r}\cos\varphi-\frac{\sqrt{r^2-R^2}}{r}\sin\varphi\right),$$

und, wenn $R=r\cos\psi$ gesetzt wird:

$$(36)\quad \ldots\quad \sqrt{r^2-R^2}=\frac{a^2R}{1+a^2}(\varphi+\psi).$$

Man erkennt darin eine Spirale (Taf. I. Fig. 6.), welche aus der Evolvente des Kehlkreises durch Verkürzung aller Kreistangenten um den $\frac{1}{1+a^2}$ten Theil abgeleitet werden kann.

B.

I. Die Gleichung der Fusspunktfläche einer gegebenen Fläche

$$(37)\quad \ldots\quad z=f(x,y)$$

lässt sich durch Elimination von x, y, z aus dieser Gleichung, der ihrer Berührungsebene

$$(38)\quad \ldots\quad z'-z=p(x'-x)+q(y'-y),$$

und den Gleichungen einer auf diese Ebene vom gegebenen Pole gefällten Senkrechten

$$(39)\quad \ldots\quad x'=-pz',\quad y'=-qz'$$

finden, wo p, q die partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$; x', y', z' aber die laufenden Coordinaten der Fusspunktfläche bezeichnen und der gegebene Pol als Coordinatenanfang angenommen wurde. Die Gleichung (38) kann noch durch folgende:

$$(40)\quad \ldots\quad x'x+y'y+z'z=x'^2+y'^2+z'^2$$

ersetzt werden.

II. Man findet durch geometrische Betrachtungen oder durch Rechnung, wenn man das analytische Kennzeichen $p+aq=b$ der Cylinderflächen in Betracht zieht, woraus

$$(41)\quad \ldots\quad x'+ay'+bz'=0,$$

dass deren Fusspunktflächen sich auf ebene Curven, die Fusspunktcurven der Durchschnittslinie der Cylinderfläche mit einer auf ihre Erzeugende senkrecht durch den Pol gelegten Ebene, reduciren.

Es ergiebt sich ferner in Bezug auf die Kegelflächen

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=f\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right), \quad p(x-\alpha)+q(y-\beta)=z-\gamma$$

durch Combination dieser Gleichungen mit (39), (40) folgende Relation:

$$(42) \qquad (x'-\frac{\alpha}{2})^2+(y'-\frac{\beta}{2})^2+(z'-\frac{\gamma}{2})^2=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4},$$

woraus der Satz: Die Fusspunktflächen der Kegelflächen reduciren sich auf sphärische Curven, auf einer Kugel liegend, deren Durchmesser gleich dem Abstande des Poles vom Kegelmittelpunkte ist, und deren Mittelpunkt in der Mitte der Verbindungslinie dieser beiden Punkte liegt. Diese Curven sind die Durchschnittslinien der erwähnten Kugel mit einem zu dem gegebenen supplementären Kegel, welcher den Pol zu seinem Mittelpunkte hat.

Für die Kegelflächen zweiten Grades

$$\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2=\left(\frac{z-\gamma}{c}\right)^2$$

ergiebt sich

$$\frac{x'}{z'}=-\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\cdot\frac{c^2}{a^2}, \quad \frac{y'}{z'}=-\frac{y-\beta}{z-\gamma}\cdot\frac{c^2}{b^2},$$

woraus die Gleichung des supplementären Kegels:

$$(43) \quad \ldots\ldots \quad a^2x'^2+b^2y'^2=c^2z'^2.$$

Die Gleichungen (42), (43) stellen die gesuchte Fusspunktcurve dar, welche ein sphärischer Kegelschnitt ist.

Es reduciren sich allgemeiner auf krumme Linien die Fusspunktflächen aller abwickelbaren Flächen, und zwar liegen jene auf einem supplementären Kegel zu demjenigen, welcher seine Erzeugenden parallel zu denen der gegebenen Fläche haben würde, wie dies aus der die abwickelbaren Flächen charakterisirenden Relation

$$(44) \quad \ldots \quad p=\varphi(q), \quad \text{woraus} \quad \frac{x'}{z'}=\varphi\left(\frac{y'}{z'}\right),$$

sich herausstellt. Dieser supplementäre Kegel hat seinen Mittelpunkt am Pole selbst.

Einem Satze von Raabe (Crelle's Journal Bd. 50.) zufolge wird die Directrixfläche einer Fläche durch Verdoppelung

des Radiusvectors des entsprechenden Fusspunktortes bestimmt, woraus folgt, dass auch erstere, in Bezug auf die abwickelbaren Flächen, sich auf krumme Linien reduciren, auf derselben Kugelfläche mit der Fusspunktcurve liegend.

Das Product

$$(45) \quad \ldots \quad rr' = \frac{(z - px - qy)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

aus den entsprechenden Vectoren einer Fläche und ihrer Fusspunktfläche ist constant für die beiden Rotationshyperboloide der gleichseitigen Hyperbel.

III. Der Neigungswinkel des Leitstrahles gegen die Berührungsebene bleibt constant für alle sich entsprechenden Punkte M, M'.... einer Fläche F und ihrer successiven Fusspunktflächen, und die Normale in einem Punkte der Fusspunktfläche $n$ter Ordnung geht durch die Mitte des Leitstrahles des entsprechenden Punktes der Fusspunktfläche der $(n-1)$ten Ordnung. Man denke sich eine, die Fläche F in der Nähe des Punktes M umhüllende Kegelfläche. Die Fusspunktcurve (II., (42)) dieser letztern, welche eine sphärische Curve ist, liegt zugleich auf der Fusspunktfläche F'. Geht man zur Grenze über, so reducirt sich jene sphärische Curve auf das gemeinschaftliche Element M' der Fläche F' und der Kugel, deren Durchmesser gleich ist dem Leitstrahle des Punktes M, und giebt mithin die Richtung der gemeinschaftlichen Berührungsebene. Daraus folgt: 1) dass die Normale des Punktes M' durch die Mitte des Leitstrahles OM geht (wenn O den Pol bezeichnet), und mithin der erwähnte Winkel constant bleibt, und 2) dass die successiven Normalen der Punkte M, M'.... in einer Ebene liegen, welche durch den Pol geht, und gegen einander gleich geneigt sind.

Analytisch lässt sich derselbe Satz durch Umkehrung der Aufgabe der Fusspunktflächen beweisen, d. i. wenn man zu der Fusspunktfläche F' die Basis F sucht. F ergiebt sich alsdann, als Umhüllungsfläche der durch (40) dargestellten Ebenen, durch Elimination von x', y', z' aus (40), aus der Gleichung der Fläche F' und den aus (40) durch partielle Differentiation abgeleiteten Gleichungen

$$(46) \qquad x + p'z = 2(x' + p'z'), \quad y + q'z = 2(y' + q'z'),$$

welche zeigen, dass die Projectionen der Normale zur Fläche F' durch die Mitte der Projectionen des Radiusvectors der Fläche F gehen, womit der Satz völlig bewiesen ist.

IV. Werden die Gleichungen (39) nach x' und y' differenzirt, indem der Reihe nach y' und x' als constant betrachtet wird, so ergiebt sich:

$$(47)\quad \begin{cases} r\dfrac{dx}{dx'}+s\dfrac{dy}{dx'}=\dfrac{p'x'-z'}{z'^2}, & r\dfrac{dx}{dy'}+s\dfrac{dy}{dy'}=\dfrac{q'x'}{z'^2}, \\ s\dfrac{dx}{dx'}+t\dfrac{dy}{dx'}=\dfrac{p'y'}{z'^2}, & s\dfrac{dx}{dy'}+t\dfrac{dy}{dy'}=\dfrac{q'y'-z'}{z'^2}; \end{cases}$$

hieraus durch Multiplication der ersten mit der letzten dieser Gleichungen und Subtraction des Productes der beiden mittleren:

$$(48)$$

$$\frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'}-\frac{dx}{dy'}\frac{dy}{dx'}=\frac{(p'x'-z')(q'y'-z')-p'q'x'y'}{z'^4(rt-s^2)}=\frac{1+pp'+qq'}{z'^2(rt-s^2)}.$$

Differenzirt man auf ähnliche Weise die Gleichungen (46), so findet man:

$$(49)\quad \begin{cases} (1+pp')\dfrac{dx}{dx'}+qp'\dfrac{dy}{dx'}=2(1+p'^2+r'z')-r'z, \\ (1+pp')\dfrac{dx}{dy'}+qp'\dfrac{dy}{dy'}=2(p'q'+s'z')-s'z, \\ pq'\dfrac{dx}{dx'}+(1+qq')\dfrac{dy}{dx'}=2(p'q'+s'z')-s'z, \\ pq'\dfrac{dx}{dy'}+(1+qq')\dfrac{dy}{dy'}=2(1+q'^2+t'z')-t'z; \end{cases}$$

hieraus folgt wie früher:

$$(1+pp'+qq')\left(\frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'}-\frac{dx}{dy'}\frac{dy}{dx'}\right)$$

$$=4(1+p'^2+r'z')(1+q'^2+t'z')-4(p'q'+s'z')^2+(r't'-s'^2)z^2$$

$$-2[(1+p'^2+r'z')t+(1+q'^2+t'z')r'-2s'(p'q'+s'z')]z,$$

oder

$$(50)\quad \frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'}-\frac{dx}{dy'}\frac{dy}{dx'}=\frac{4(r't'-s'^2)}{1+pp'+qq'}$$

$$\times\left[\left(\frac{z-2z'}{2}\right)^2-\frac{(1+p'^2)t'+(1+q'^2)r'-2p'q's'}{r't'-s'^2}\cdot\frac{z-2z'}{2}+\frac{1+p'^2+q'^2}{r't'-s'^2}\right].$$

Bezeichnen R_1, R_2 und R_1', R_2' die respectiven Hauptkrümmungsradien der Basis und der Fusspunktfläche, ϱ, ϱ' die entsprechenden Vectoren, so kann vorstehende Gleichung, da

$$(z-2z')\sqrt{1+p'^2+q'^2}=\varrho$$

ist, wie folgt geschrieben werden:

$$(51)\quad \frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'}-\frac{dx}{dy'}\frac{dy}{dx'}=\frac{4(r't'-s'^2)(R_1'-\frac{\varrho}{2})(R_2'-\frac{\varrho}{2})}{(1+p'^2+q'^2)(1+pp'+qq')}.$$

Daraus ergiebt sich in Verbindung mit (48), und da

$$\cos\chi=\frac{1+pp'+qq'}{\sqrt{1+p^2+q^2}.\sqrt{1+p'^2+q'^2}},$$

wenn χ den Winkel (ϱ, ϱ') oder den der entsprechenden Normalen bezeichnet, folgende bemerkenswerthe Relation:

$$(52)\quad \frac{(R_1'-\frac{\varrho}{2})(R_2'-\frac{\varrho}{2})}{\frac{1}{4}R_1'R_2'}=\frac{R_1R_2}{\varrho^2}.$$

Man findet ferner, wenn dF, dF' die entsprechenden Flächenelemente bezeichnen:

$$dF'=\frac{\frac{1}{4}R_1'R_2'}{(R_1'-\frac{\varrho}{2})(R_2'-\frac{\varrho}{2})}\cdot\frac{1+pp'+qq'}{\sqrt{1+p^2+q^2}.\sqrt{1+p'^2+q'^2}}dF,$$

oder

$$(53)\quad \ldots\ldots\ldots\quad \frac{dF}{dF'}=\frac{R_1R_2}{\varrho\varrho'}.$$

V. Wendet man die Formeln (39), (40) auf die Flächen zweiten Grades an, deren Gleichung

$$(54)\qquad Ax^2+By^2+Cz^2+2Dx+2Ey+2Fz+1=0;$$

so ergiebt sich successive:

$$p=-\frac{Ax+D}{Cz+F},\quad q=-\frac{By+E}{Cz+F};$$

$$Cx'z-Az'x=Dz'-Fx',\quad Bz'y-Cy'z=Fy'-Ez';$$

$$x=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)BCx'+(Ex'-Dy')Cy'-(Dz'-Fx')Bz'}{BCx'^2+ACy'^2+ABz'^2},$$

$$y=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)ACy'-(Ex'-Dy')Cx'+(Fy'-Ez')Az'}{BCx'^2+ACy'^2+ABz'^2},$$

$$z=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)ABz'-(Fy'-Ez')Ay'+(Dz'-Fx')Bx'}{BCx'^2+ACy'^2+ABz'^2};$$

hieraus durch Substitution in (54) und nach gehöriger Hebung:

(55)

$$ABC(x'^2+y'^2+z'^2)^2 - A(Fy'-Ez')^2 - B(Dz'-Fx')^2 - C(Ex'-Dy')^2 + 2(BCDx'+ACEy'+ABFz')(x'^2+y'^2+z'^2) + BCx'^2+ACy'^2+ABz'^2=0,$$

oder in Polarcoordinaten mit Weglassung der Striche:

(56)

$$ABCr^2+2(BCD\sin\theta\cos\varphi+ACE\sin\theta\sin\varphi+ABF\cos\theta)r + (BC-BF^2-CE^2)\sin^2\theta\cos^2\varphi+(AC-AF^2-CD^2)\sin^2\theta\sin^2\varphi + (AB-AE^2-BD^2)\cos^2\theta+2(AEF\sin\varphi+BDF\cos\varphi)\sin\theta\cos\theta + 2CDE\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta=0.$$

Bezeichnen l, m, n die Coordinaten des Mittelpunktes der drei centralen Flächen, oder die des Scheitels der zwei nicht centralen Flächen zweiten Grades, so ergeben sich, wenn zur Abkürzung

(57) $$r_1=l\sin\theta\cos\varphi+m\sin\theta\sin\varphi+n\cos\theta$$

gesetzt wird, folgende specielle Gleichungen:

(58) $$r=r_1\pm\sqrt{a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+c^2\cos^2\theta},$$

(59) $$r=r_1\pm\sqrt{a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi-c^2\cos^2\theta},$$

(60) $$r=r_1\pm\sqrt{-a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi-b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+c^2\cos^2\theta},$$

(61) $$r=r_1-\frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}(a\cos^2\varphi\pm b\sin^2\varphi).$$

Es folgt hieraus: 1) dass die Fusspunktflächen der centralen Flächen geschlossene, die der nicht centralen aber, wegen des im Nenner vorkommenden $\cos\theta$, offene Flächen sind; 2) dass der zwischen beiden Theilen der Fusspunktfläche einer centralen Fläche zweiten Grades liegende Theil des Vectors r von einer Kugel (57) halbirt wird, welche dieselbe Bedeutung hat, wie die durch (42) dargestellte.

VI. Betrachtet man den Mittelpunkt des dreiachsigen Ellipsoids als Pol und bezeichnet mit r_2 den Vector der entsprechenden Fusspunktfläche, so wird nach (58):

(62) . . . . . $$r=r_1\pm r_2,$$

und der sämmtliche Körperinhalt einer beliebigen Fusspunktfläche des Ellipsoids:

$$W = \tfrac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r_1^3 \sin\theta d\theta d\varphi + \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r_1^2 r_2 \sin\theta d\theta d\varphi + \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r_1 r_2^2 \sin\theta d\theta d\varphi + \tfrac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r_2^3 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

In dieser Formel sind die zwei mittleren Doppelintegrale für die angegebenen Grenzen gleich Null. Man kann nämlich, da die Grenzen von θ und φ von einander unabhängig sind, diese Integrale auf folgende Weise schreiben:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r_1^2 r_2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (l\sin\theta\cos\varphi + m\sin\theta\sin\varphi + n\cos\theta)^2 . \sqrt{a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + c^2\cos^2\theta} . \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \begin{cases} l^2 \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sqrt{c^2 + (a^2-c^2)\sin^2\theta - [(2a^2-b^2-c^2)\sin^2\theta + c^2]\sin^2\varphi + (a^2-b^2)\sin^2\theta\sin^4\varphi}\, d\varphi . \sin\varphi \\ -m^2 \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sqrt{c^2 + (b^2-c^2)\sin^2\theta - [(2b^2-a^2-c^2)\sin^2\theta + c^2]\cos^2\varphi - (a^2-b^2)\sin^2\theta\cos^4\varphi}\, d\varphi . \cos\varphi \\ +\frac{n^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sqrt{c^2 + (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - 2c^2)\sin^2\theta - (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - c^2)\sin^4\theta}\, d\theta . \sin^2\theta \\ +lm \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta - (a^2-b^2)\sin^2\theta\sin^2\varphi}\, d\varphi . \sin^2\varphi \\ +n \int_0^{2\pi} (l\cos\varphi + m\sin\varphi)\, d\varphi \int_0^{\pi} \sqrt{c^2 + (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - c^2)\sin^2\theta}\, . \sin^2\theta d\theta . \sin\theta ; \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r_1 r_2^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} (l\sin\theta\cos\varphi + m\sin\theta\sin\varphi + n\cos\theta) \\ \times (a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + c^2\cos^2\theta)\sin\theta d\theta d\varphi \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} l\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi}(a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + c^2\cos^2\theta)d.\sin\varphi \\ -m\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi}(a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + c^2\cos^2\theta)d.\cos\varphi \\ +\frac{n}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}(a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + c^2\cos^2\theta)d.\sin^2\theta; \end{array} \right.$$

und diese sämmtlichen inneren Integrale sind gleich Null, da die neuen Variabeln $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\theta$.... sowohl für die untere, als auch für die obere Grenze dieselben Werthe erhalten. Dagegen haben das erste und letzte Integral in (63) eine ganz specielle Bedeutung, und wenn V das Volumen der Kugel (42), (57), Ω das der Fusspunktfläche des Ellipsoids für den Mittelpunkt bezeichnet, so ergiebt sich:

(64) . . $$W = 2V + \Omega = \frac{\pi}{3}(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}} + \Omega;$$

hieraus der Satz: Das von der Fusspunktfläche eines Ellipsoids begrenzte Volumen ist constant für alle Pole, welche auf einer mit der gegebenen Fläche concentrischen Kugel ($l^2+m^2+n^2=$ einer Constanten) liegen, und gleich der Summe aus dem Viertel des Volumens dieser Kugel und dem der Fusspunktfläche für den Mittelpunkt.

Dieser Satz kann durch folgende, mit (25) analoge Relation:

(65) . . . $$r_2 = l\sin\theta\cos\varphi + m\sin\theta\sin\varphi + n\cos\theta + r_1,$$

woraus

(66)

$$V = \tfrac{1}{3}l^3\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin^4\theta\cos^3\varphi d\theta d\varphi + \tfrac{1}{3}m^3\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin^4\theta\sin^3\varphi d\theta d\varphi$$

$$+\tfrac{1}{3}n^3\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos^3\theta\sin\theta d\theta d\varphi + \tfrac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_1{}^3\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$+l^2m\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin^4\theta\sin\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi + \ldots,$$

für alle Flächen zwischen bestimmten Grenzen verallgemeinert werden. Setzt man nämlich vorstehenden Ausdruck für das Volumen V einer Constanten gleich, so erhält man die Gleichung der Fläche, auf der der Pol liegen muss, damit V constant bleibt.

Diese Fläche ist im Allgemeinen vom dritten Grade und kann sich für gewisse Grenzen auf den zweiten Grad reduciren.

VI.

Einiges über sphärische Curven.

Von

Herrn *E. Bacaloglo*

in Leipzig.

I. Einige von den auf solche Curven sich beziehenden Aufgaben, welche unter andern hauptsächlich von Gudermann für ein specielles, dazu geeignetes Coordinatensystem behandelt wurden, lassen sich auch direct für gewöhnliche sphärische Coordinaten auflösen.

Bezeichnet zunächst α das Azimuth der Durchschnittslinie der Ebene eines grossen Kreises mit der XY-Ebene, β den Neigungswinkel dieser beiden Ebenen, so ist die Gleichung desselben:

(1) . . . . . $\operatorname{tang}\psi' = \operatorname{tang}\beta \sin(\varphi' - \alpha)$.

Soll dieser Kreis die in gemeinen sphärischen Coordinaten gegebene Curve

(2) . . . . . $f(\varphi, \psi)=0$

berühren, so gelten die Gleichungen:

(3) $\text{tang}\,\psi=\text{tang}\,\beta\sin(\varphi-\alpha),\quad \frac{1}{\cos^2\psi}\frac{d\psi}{d\varphi}=\text{tang}\,\beta\cos(\varphi-\alpha),$

woraus die Gleichung der sphärischen Tangente zu der Curve (2):

(4) . . $\text{tang}\,\psi'=\text{tang}\,\psi\cos(\varphi'-\varphi)+\frac{\sin(\varphi'-\varphi)}{\cos^2\psi}\frac{d\psi}{d\varphi}.$

Für die sphärische Normale in demselben Punkte (φ, ψ), d. i. den zum Kreise (4) senkrechten grossen Kreis, gelten, wenn φ_1, ψ_1 die laufenden Coordinaten, α_1, β_1 die Constanten desselben bezeichnen, die Gleichungen:

(5) (6)

$$\text{tang}\,\beta\,\text{tang}\,\beta_1\cos(\alpha-\alpha_1)+1=0,\quad \text{tang}\,\psi_1=\frac{\text{tang}\,\psi}{\sin(\varphi-\alpha_1)}\sin(\varphi_1-\alpha_1);$$

von denen erstere die Bedingung der Perpendicularität zweier grossen Kreise ausdrückt. Die Gleichung (6) giebt:

$$\text{tang}\,\psi_1=\text{tang}\,\psi\{\cos(\varphi_1-\varphi)+\sin(\varphi_1-\varphi)\,\text{cotang}(\varphi-\alpha_1)\}.$$

Es folgt aber auch aus (5) in Verbindung mit (3):

$$0=\frac{\text{tang}^2\psi\cos(\alpha-\alpha_1)}{\sin(\varphi-\alpha)\sin(\varphi-\alpha_1)}+1=\sin^2\psi\,\text{cotang}(\varphi-\alpha)\,\text{cotang}(\varphi-\alpha_1)+1,$$

so dass

(7) . . . . $\frac{d\psi}{d\varphi}\text{tang}\,\psi\,\text{cotang}(\varphi-\alpha_1)+1=0.$

Es wird demnach die Gleichung der Normale:

(8) $\text{tang}\,\psi_1=\text{tang}\,\psi\cos(\varphi_1-\varphi)-\sin(\varphi_1-\varphi)\frac{d\varphi}{d\psi}.$

Differenzirt man diese letztere Gleichung in Bezug auf φ und ψ, indem man ψ als die independente Variabele betrachtet, so erhält man:

(9) $\sec^2\psi+\frac{d\varphi^2}{d\psi^2}=\text{tang}(\varphi_1-\varphi)\left\{\frac{d^2\varphi}{d\psi^2}-\text{tang}\,\psi\frac{d\varphi}{d\psi}\right\}.$

Die Elimination von φ und ψ aus (2), (8) und (9) würde zu der Gleichung der Evolute führen.

II. Zur Bestimmung des sphärischen Krümmungshalbmessers ϱ dient die Formel:

$$\cos\varrho = \sin\psi\sin\psi_1 + \cos\psi\cos\psi_1\cos(\varphi_1 - \varphi). \tag{10}$$

Es ist leicht nachzuweisen:

Erstens: dass der Krümmungshalbmesser die Evolute jederzeit berührt. Denn es ergiebt sich aus (8) durch Differentiation nach φ_1 und ψ_1:

$$\sec^2\psi_1 \frac{d\psi_1}{d\varphi_1} = -\operatorname{tang}\psi\sin(\varphi_1 - \varphi) - \cos(\varphi_1 - \varphi)\frac{d\varphi}{d\psi}$$

und durch Elimination von $\frac{d\varphi}{d\psi}$ aus dieser Gleichung und (8):

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\psi_1\cos(\varphi - \varphi_1) + \frac{\sin(\varphi - \varphi_1)}{\cos^2\psi_1}\frac{d\psi_1}{d\varphi_1}, \tag{11}$$

welche Gleichung nach (4) die Tangente zu der Curve (φ_1, ψ_1) darstellt.

Zweitens: dass das Bogenelement der Evolute gleich der Differenz zweier successiver Krümmungshalbmesser ist, und zwar wächst jenes, wenn der Krümmungshalbmesser abnimmt und umgekehrt. Man findet nämlich mit Hülfe der Formeln (10), (11):

$$-\sin\varrho\frac{d\varrho}{d\psi_1} = \frac{\cos\psi}{\cos\psi_1}\sin(\varphi - \varphi_1)\frac{d\psi_1}{d\varphi_1}\left(1 + \cos^2\psi_1\frac{d\varphi_1^2}{d\psi_1^2}\right).$$

Es folgt aber auch aus denselben Formeln:

$$\sin\varrho = \frac{\cos\psi}{\cos\psi_1}\sin(\varphi - \varphi_1)\frac{d\psi_1}{d\varphi_1}\sqrt{1 + \cos^2\psi_1\frac{d\varphi_1^2}{d\psi_1^2}},$$

woraus

$$d\varrho = -\sqrt{d\psi_1^2 + \cos^2\psi_1 d\varphi_1^2}, \tag{12}$$

und in der That drückt der Theil rechts das Bogenelement der Curve (φ_1, ψ_1) aus *).

*) Ich will bei dieser Gelegenheit in Bezug auf die Krümmungshalbmesser der Flächen Folgendes bemerken, was auch als Zusatz zu meinem frühern Aufsatze „Ueber die Krümmung der Flächen“ (Schlömilch's Zeitschr. für Mathem. u. Phys. IV. S. 312.) betrachtet werden kann. Bezeichnet ϱ den Krümmungshalbmesser eines normalen Schnittes im Azimuthe φ, so ist bekanntlich:

III. Man kann leicht mit Hülfe der Gleichungen (8), (9), (10) den Werth des Krümmungshalbmessers in φ und ψ ausgedrückt, wie folgt, erhalten:

$$\cos\varrho = \frac{\cos\psi_1\cos(\varphi_1-\varphi)}{\cos\psi}\left(1-\sin\psi\cos\psi\tang(\varphi_1-\varphi)\frac{d\varphi}{d\psi}\right)$$

$$= \frac{\cos\psi_1\cos(\varphi_1-\varphi)}{\cos\psi}\cdot\frac{\frac{d^2\varphi}{d\psi^2}-\tang\psi\frac{d\varphi}{d\psi}-\sin\psi\cos\psi\frac{d\varphi}{d\psi}\left(\frac{d\varphi^2}{d\psi^2}+\sec^2\psi\right)}{\frac{d^2\varphi}{d\psi^2}-\tang\psi\frac{d\varphi}{d\psi}}$$

$$= \frac{\cos\psi_1}{\cos\psi}\cdot\frac{\frac{d^2\varphi}{d\psi^2}-\tang\psi\frac{d\varphi}{d\psi}-\sin\psi\cos\psi\frac{d\varphi}{d\psi}\left(\frac{d\varphi^2}{d\psi^2}+\sec^2\psi\right)}{\sqrt{\left(\frac{d^2\varphi}{d\psi^2}-\tang\psi\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2+\left(\frac{d\varphi^2}{d\psi^2}+\sec^2\psi\right)}},$$

so dass

(13)

$$\cos\varrho = \pm\frac{\frac{d^2\varphi}{d\psi^2}-\tang\psi\frac{d\varphi}{d\psi}-\sin\psi\cos\psi\frac{d\varphi}{d\psi}\left(\frac{d\varphi^2}{d\psi^2}+\sec^2\psi\right)}{\sqrt{\begin{array}{l}\left(\frac{d^2\varphi}{d\psi^2}-\tang\psi\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2+\cos^2\psi\left(1+\frac{d\varphi^2}{d\psi^2}\right)\left(\frac{d\varphi^2}{d\psi^2}+\sec^2\psi\right)^2 \\ -2\sin\psi\cos\psi\frac{d\varphi}{d\psi}\left(\frac{d^2\varphi}{d\psi^2}-\tang^2\psi\frac{d\varphi}{d\psi}\right)\left(\frac{d\varphi^2}{d\psi^2}+\sec^2\psi\right)\end{array}}},$$

hieraus folgt aber:

$$\tang\varrho = \pm\frac{\left(1+\frac{d\varphi^2}{d\psi^2}\cos^2\psi\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\varphi}{d\psi^2}\cos\psi-2\frac{d\varphi}{d\psi}\sin\psi-\frac{d\varphi^3}{d\psi^3}\cos^2\psi\sin\psi},$$

$\frac{1}{\varrho}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2}$, woraus $\varrho=\frac{R_1R_2}{\frac{R_1+R_2}{2}-\frac{R_1-R_2}{2}\cos 2\varphi}$.

Betrachtet man nun den Brennpunkt eines Kegelschnittes, dessen grosse Halbachse $=\frac{R_1+R_2}{2}$, die kleine aber $=\sqrt{R_1R_2}$, oder, was dasselbe, dessen Parameter und Excentricität respective $\frac{4R_1R_2}{R_1+R_2}$, $\frac{R_1-R_2}{R_1+R_2}$ sind, als Pol, so drücken die Vectoren dieses Kegelschnittes das Gesetz aus, nach welchem die Krümmungshalbmesser an einem Flächenpunkte variiren, vorausgesetzt, dass die Anomalie des Kegelschnittes doppelt so schnell wächst wie das Azimuth φ.

oder, wenn man φ für die independente Variabele nimmt:

$$(14)\qquad \operatorname{tang}\varrho = \pm \frac{(\cos^2\psi + \frac{d\psi^2}{d\varphi^2})^{\frac{3}{2}}}{\sin\psi\cos^2\psi + 2\sin\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2} + \cos\psi\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}}.$$

Das Doppelzeichen entspricht den beiden supplementären Krümmungshalbmessern, da jede sphärische Curve offenbar zwei gleiche, aber entgegengesetzt liegende sphärische Evoluten hat.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden durch (8), (9) oder durch die daraus folgenden Gleichungen:

$$(15)\ \ldots\ \operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = -\frac{d\psi}{d\varphi}\cdot\frac{1 + \sec^2\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}}{\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \operatorname{tang}\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}},$$

$$\operatorname{tang}\psi_1 = \pm\frac{1 + \frac{d\psi^2}{d\varphi^2} + 2\operatorname{tang}^2\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2} - \operatorname{tang}\psi\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \operatorname{tang}\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}\right)^2 + \frac{d\psi^2}{d\varphi^2}(1 + \sec^2\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2})^2}}$$

bestimmt.

Wendet man die Formel (14) auf die Curven an, deren Gleichungen respective

$$(16)\qquad \psi = m\varphi,\quad \sin\psi = m\sin\varphi,\quad \cos\psi = m\cos\varphi$$

sind *), so ergiebt sich für die entsprechenden Krümmungshalbmesser ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3:

$$(17)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\varrho_1 = \pm\dfrac{1}{\sin\psi}\cdot\dfrac{(m^2+\cos^2\psi)^{\frac{3}{2}}}{2m^2+\cos^2\psi}, \\ \operatorname{tang}\varrho_2 = \pm\dfrac{1}{\sin\psi\cos\psi}\cdot\dfrac{(m^2-\sin^2\psi+\cos^4\psi)^{\frac{3}{2}}}{1-3m^2+2\sin^2\psi-\cos^4\psi}, \\ \operatorname{tang}\varrho_3 = \pm\dfrac{(m^2-\cos^4\psi)^{\frac{3}{2}}}{m^2-3m^2\sin^2\psi-\cos^4\psi}. \end{cases}$$

---

*) In Bezug auf ihre Projectionen von Herrn Prof. Drobisch in seinen „Neuen Zusätzen zum Florentiner Problem“ (Berichte der k. sächs. Ges. der Wissensch. 18. März 1854) in sehr eleganter Weise behandelt. Es mag mir erlaubt sein, zu den darin, unter andern, angeführten interessanten Relationen zwischen den Leitstrahlen r, r', r'' der orthographischen, stereographischen und centralen Projection einer sphärischen Curve [No. 4. Formel (1)....(9)] noch folgende, zwar ein

Für die sphärische Ellipse, deren Gleichung:

$$(18) \quad \ldots \quad \cos^2\psi\left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2 a}+\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2 b}\right)=1$$

oder

$$\frac{\cos^2\psi}{2}\left[\left(\frac{1}{\sin^2 a}+\frac{1}{\sin^2 b}\right)+\left(\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{\sin^2 b}\right)\cos 2\varphi\right]=1,$$

wo a, b die beiden sphärischen Halbachsen bezeichnen, und der Mittelpunkt derselben mit dem Pole der XY-Ebene zusammenfällt, ergiebt sich:

$$(19) \quad \ldots \quad \operatorname{tang}\varrho$$

$$=\pm\frac{(\operatorname{tang}^2\psi+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{\sin^2 b}\right]^2\cos^2\psi\sin^2 2\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{tang}^4\psi-\left(\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{\sin^2 b}\right)\operatorname{tang}^2\psi\cos 2\varphi-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{\sin^2 b}\right)^2\sin^2 2\varphi}$$

$$=\pm\frac{(\operatorname{tang}^2\psi+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{\sin^2 b}\right]^2\cos^2\psi\sin^2 2\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{cotang}^2 a\operatorname{cotang}^2 b}$$

$$=\pm\frac{(\sec^2 a\sec^2 b\sin^2\psi-1)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b}.$$

Die Krümmungshalbmesser der Scheitel sind folglich $\frac{\operatorname{tang}^2 b}{\operatorname{tang} a}$ und $\frac{\operatorname{tang}^2 a}{\operatorname{tang} b}$.

IV. Für den Durchschnittspunkt der Tangente (1), (4) mit einer auf sie vom Pole der XY-Ebene gefällten Senkrechten gilt die Gleichung

$$\varphi'-\alpha=\frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \varphi'-\varphi=\frac{\pi}{2}-(\varphi-\alpha),$$

woraus nach (3):

$$(20) \quad \ldots \quad \operatorname{tang}(\varphi'-\varphi)=\frac{1}{\sin\psi\cos\psi}\cdot\frac{d\psi}{d\varphi};$$

hieraus in Verbindung mit (4):

---

geringeres praktisches Interesse darbietende, doch ihrer Einfachheit wegen erwähnenswerthe Relation $\frac{r''+r}{r''-r}=\frac{a^2}{r'^2}$ hinzuzufügen, wo a den Radius der Kugel bezeichnet.

(21)

$$\cos(\varphi'-\varphi)\tang\psi'=\tang\psi,\quad \sin(\varphi'-\varphi)\tang\psi'=\frac{1}{\cos^2\psi}\cdot\frac{d\psi}{d\varphi},$$

$$\tang^2\psi'=\tang^2\psi+\sec^4\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2},\quad \sin 2(\varphi'-\varphi)\tang^2\psi'=\frac{2\tang\psi}{\cos^2\psi}\cdot\frac{d\psi}{d\varphi}.$$

Die Elimination von φ und ψ aus (2) und zweien unter den Gleichungen (4), (20), (21) führt zu der Gleichung der sphärischen Fusspunktcurve. So findet man durch Anwendung der ersten und letzten der Formeln (21) in Verbindung mit (18) die Fusspunktcurve der sphärischen Ellipse.

Die letzte Gleichung (21) giebt in Verbindung mit (18):

$$\tang 2\varphi=\frac{\sin 2\varphi'.\tang^2\psi'}{\cos 2\varphi'\tang^2\psi'-\left(\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{\sin^2 b}\right)}$$

$$=\frac{2\sin\varphi'\cos\varphi'\tang^2\psi'}{\cotang^2 b-\sin^2\varphi'\tang^2\psi'-(\cotang^2 a-\cos^2\varphi'\tang^2\psi')},$$

woraus

$$\tang^2\varphi-\frac{\cotg^2 a-\cos^2\varphi'\tang^2\psi'-(\cotg^2 b-\sin^2\varphi'\tang^2\psi')}{\sin\varphi'\cos\varphi'\tang^2\psi'}.\tang\varphi-1=0.$$

Man findet aber auch aus der ersten Gleichung (21) und (18), wenn man erstere quadrirt:

$$\tang^2\varphi-\frac{2\sin\varphi'\cos\varphi'\tang^2\psi'}{\cotg^2 b-\sin^2\varphi'\tang^2\psi'}\tang\varphi+\frac{\cotg^2 a-\cos^2\varphi'\tang^2\psi'}{\cotg^2 b-\sin^2\varphi'\tang^2\psi'}=0.$$

Man kann vorstehenden Gleichungen folgende Gestalt geben:

$$\tang^2\varphi-\frac{A-B}{C}\tang\varphi-1=0,\quad \tang^2\varphi-\frac{2C}{B}\tang\varphi+\frac{A}{B}=0$$

und sich leicht überzeugen, dass die daraus gezogenen Werthe von $\tang\varphi$ identisch werden, wenn zugleich $A=0$ und $B=0$, oder wenn $C=0$, oder $(A-B)^2+4C^2=0$, oder $C^2-AB=0$; da die drei ersteren Bedingungen nicht bestehen können, so bleibt die letzte allein, woraus die Gleichung der gesuchten Fusspunktencurve:

$$(22)\quad \ldots\quad \tang^2\psi'\left(\frac{\cos^2\varphi'}{\cotang^2 a}+\frac{\sin^2\varphi'}{\cotang^2 b}\right)=1.$$

Bezeichnet R den Halbmesser der Kugel, so ergiebt sich leicht durch Anwendung der bekannten Formel

$$\sqrt{x^2+y^2}=R\,\mathrm{cotang}\,\psi'$$

für die centrale Projection der vorstehenden Curve die Gleichung:

$$(23)\quad\ldots\quad (x^2+y^2)^2=\frac{R^2}{\mathrm{cotang}^2a}x^2+\frac{R^2}{\mathrm{cotang}^2b}y^2,$$

welche die Fusspunktcurve der centralen Projection der Ellipse (18) selbst, vom Mittelpunkte aus, darstellt.

Die Curve (22) kann noch als die Durchschnittslinie der Kugel vom Radius R mit der Fläche

$$(24)\quad\ldots\quad \frac{x^2}{\mathrm{cotang}^2a}+\frac{y^2}{\mathrm{cotang}^2b}=\frac{(R^2-z^2)^2}{z^2}$$

betrachtet werden. Diese Fläche ist symmetrisch gegen die XY-Ebene, ihre Asymptotenebene; hat den Coordinatenanfang zu ihrem Mittelpunkte, schneidet die Kugel nach den zwei gleichen Curven (22), welche die beiden Fusspunktencurven der sphärischen Ellipse sind, und hat überdies mit jener noch die beiden Pole der XY-Ebene gemein. Ihre ebenen Schnitte, parallel zur XY-Ebene, sind Ellipsen; dagegen geben alle durch die Z-Achse gelegten Ebenen ein System von zwei Hyperbeln, welche in Taf. I. Fig. 7. dargestellt sind. Der supplementäre Kegel zu demjenigen, dessen Scheitel der Kugelmittelpunkt und dessen Directrix die Linie (22), schneidet die Fläche (24) und ist zugleich ihr Asymptotenkegel; der Mittelpunkt dieses letztern fällt auch mit dem Kugelmittelpunkte zusammen.

Die durch Formel (23) ausgedrückte Eigenschaft der sphärischen Fusspunktcurve der sphärischen Ellipse kommt nicht speciell dieser Curve zu, sondern es gilt allgemein der Satz: Die centrale Projection der sphärischen Fusspunktcurve einer jeden sphärischen Curve auf der durch den Pol gelegten Berührungsebene der Kugel fällt mit der Fusspunktcurve der centralen Projection der gegebenen sphärischen Curve, in Bezug auf denselben Pol, zusammen. Man braucht dafür nur zu bemerken, dass die auf den Berührungskreis der gegebenen Curve durch die Achse gelegte senkrechte Ebene zugleich auch auf der Projectionsebene, und mithin auf der Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen, d. i. auf der Tangente an die centrale Projection der sphärischen Curve, senkrecht steht. Es wird dadurch das Aufsuchen der sphärischen Fusspunktcurven auf das der ebenen zurückgeführt.

Es sei z. B. gesucht die sphärische Fusspunktencurve der sphärischen Ellipse in Bezug auf den einen ihrer Brennpunkte.

Bezeichnen a, b die beiden Halbachsen, c die Excentricität dieser letztern, R den Kugelhalbmesser, so ist bekanntlich die Fusspunktcurve ihrer centralen Projection ein Kreis vom Radius $= R.\frac{\text{tang}(a+c)+\text{tang}(a-c)}{2}$.

Trägt man diesen Kreis auf die Kugel zurück, so ergiebt sich, durch rein geometrische Betrachtungen, dass die gesuchte Fusspunktcurve wieder eine Ellipse ist, deren kleine Halbachse $= a$, die grosse aber b' durch die Formel

$$\text{tang}\, b' = \cos c.\sqrt{[\text{tang}\, c + \text{tang}(a-c)][\text{tang}(a+c) - \text{tang}\, c]}$$

$$= \frac{\sin a}{\sqrt{\cos(a+c).\cos(a-c)}} = \frac{\sin a}{\sqrt{\cos^2 c - \sin^2 a}}$$

oder

$$\sin b' = \frac{\sin a}{\cos c}$$

gegeben ist, was auch von Gudermann auf anderem Wege gefunden ist.

Als zweites Beispiel diene die Loxodrome

$$(25) \quad \ldots\ldots \quad \cos\psi(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) = 2,$$

deren orthographische, stereographische und centrale Projection respective durch die Gleichungen

$$r_1(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) = 2R, \quad Rr_2(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) = R^2 + r_2^2$$

und

$$(a') \quad \ldots\ldots \quad r(e^{\varphi} - e^{-\varphi}) = 2R$$

dargestellt werden. Bestimmt man die Fusspunktcurve dieser letztern, nach einer an anderm Orte gegebenen Methode, durch Elimination von ϱ, φ aus der letzten Gleichung und den beiden folgenden:

$$r' = r\cos(\varphi - \varphi'), \quad \text{tang}(\varphi - \varphi') = \frac{dr}{rd\varphi};$$

so ergiebt sich zunächst:

(26)

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi' - \varphi\right) = -\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} = \sqrt{-1}.\,\text{tang}(\varphi\sqrt{-1}).$$

Hieraus erhellt, dass die Differenz $\varphi' - \varphi < \frac{\pi}{2}$ und $> \frac{\pi}{4}$ und zwar $= \frac{\pi}{2}$ für $\varphi = 0$ und $= \frac{\pi}{4}$ für $\varphi = \alpha$ wird. Hat man aus (26) den Werth von $\varphi = f(\varphi')$, so wird

$$r' = r\cos(\varphi - \varphi') = \frac{2R\cos[f(\varphi') - \varphi']}{e^{f(\varphi')} - e^{-f(\varphi')}},$$

und durch Uebertragung auf die Kugel:

$$\operatorname{cotang}\psi'(e^{f(\varphi')} - e^{-f(\varphi')}) = 2R\cos[f(\varphi') - \varphi'],$$

welche Gleichung die gesuchte sphärische Fusspunktcurve darstellt. Die nähere Bestimmung von $f(\varphi')$ hängt von der Auflösung der Gleichung (26) ab.

V. Man kann ähnliche Untersuchungen über sphärische Evoluten anstellen. So findet man in Bezug auf die stereographische Projection, dass die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte einer sphärischen Curve und ihrer Projection zwar auf demselben Meridiankreise liegen, nicht aber auch dieselbe Breite haben. Man findet nämlich durch Anwendung der bekannten Formeln:

$$(27)\quad X = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Psi}{2}\right)\cos\Phi, \quad Y = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Psi}{2}\right)\sin\Phi;$$

wenn der Kürze wegen der Kugelradius $= 1$ gesetzt wird und

x, y, φ, ψ die Coordinaten eines Punktes der gegebenen sphärischen Curve;

x', y', φ', ψ' die des entsprechenden Krümmungsmittelpunktes der stereographischen Projection dieser Curve;

x_1, y_1, φ_1, ψ_1 die des sphärischen Krümmungsmittelpunktes, welcher demselben Punkte x, y entspricht,

bezeichnen:

$$\operatorname{tang}(\varphi' - \varphi) = \frac{y'\cos\varphi - x'\sin\varphi}{y'\sin\varphi + x'\cos\varphi}.$$

Es ist dann weiter:

$$y' = y + \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad x' = x - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\psi}{d\varphi}\sin\varphi - \cos\psi\cos\varphi}{\frac{d\psi}{d\varphi}\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)\cdot\frac{\cos^2\psi+(1+\sin\psi)\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}+\cos\psi\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}}{\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi\right)^3};$$

und hieraus folgt:

$$\frac{y'\cos\varphi - x'\sin\varphi}{} = -\frac{\cos^2\psi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)}\cdot\frac{\frac{d\psi}{d\varphi}\left(1+\sec^2\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2\psi+(1+\sin\psi)\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}+\cos\psi\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}},$$

$$\frac{y'\sin\varphi + x'\cos\varphi}{} = \frac{\cos^2\psi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)}\cdot\frac{\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}\tang\psi+\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}}{\cos^2\psi+(1+\sin\psi)\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}+\cos\psi\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}};$$

so dass zuletzt

$$\tang(\varphi'-\varphi) = -\frac{\frac{d\psi}{d\varphi}\left(1+\sec^2\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}\right)}{\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+\tang\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}},$$

welche Formel mit der im Frühern zur Bestimmung der geographischen Länge des sphärischen Krümmungsmittelpunktes (φ_1, ψ_1) gegebenen vollkommen übereinstimmt. — Die Bestimmung von ψ' ist complicirter, und da das Resultat kein besonderes Interesse bietet, so mögen hier ganz kurz nur die Hauptformeln angegeben werden. So folgt durch Anwendung derselben Formeln (27):

$$\sin\psi' = \operatorname{tang}^2(\varphi'-\varphi)\frac{\cos^2(\varphi'-\varphi)-(y'\sin\varphi+x'\cos\varphi)^2}{\sin^2(\varphi'-\varphi)+(y'\cos\varphi-x'\sin\varphi)^2}$$

$$=\frac{(1+\sin\psi)^2\left[\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+\operatorname{tng}\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}+\cos\psi(1+\sec^2\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2})\right]^2-\cos^2\psi\left[\left(\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+\operatorname{tng}\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}\right)^2+\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}(1+\sec^2\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2})^2\right]}{(1+\sin\psi)^2\left[\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+\operatorname{tng}\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}+\cos\psi(1+\sec^2\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2})\right]^2+\cos^2\psi\left[\left(\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+\operatorname{tng}\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}\right)^2+\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}(1+\sec^2\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2})^2\right]},$$

so dass

$$\operatorname{tang}\psi'=\frac{\operatorname{tng}\psi\left(\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+\operatorname{tng}\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}\right)+\frac{1+\sec^2\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}}{1+\sin\psi}\cdot\frac{(1+\sin\psi)\left(\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+\operatorname{tng}\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}\right)+\frac{1}{2}[(1+\sin\psi)^2-\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}]\cos\psi(1+\sec^2\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2})}{\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+\operatorname{tng}\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}+\cos\psi(1+\sec^2\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2})}}{\sqrt{\left(\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+\operatorname{tng}\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}\right)^2+\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}(1+\sec^2\psi\frac{d\psi^2}{d\varphi^2})^2}},$$

welche Formel mit der a. a. O. für $\operatorname{tang}\psi_1$ gegebenen vergleichbar ist. Da $(1+\sin\psi)^2-\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}<2(1+\sin\psi)$ oder $-(\cos^2\psi+\frac{d\psi^2}{d\varphi^2})<0$ ist, so können ψ' und ψ_1 nie identisch werden.

Da der sphärische Krümmungsmittelpunkt auf demselben Meridiankreise mit dem entsprechenden der stereographischen Projectionscurve liegt, so folgt, dass der geometrische Ort der Verbindungslinien dieser beiden Punkte eine Keilfläche ist, deren geradlinige Directrix die Achse der Kugel ist.

Man kann sich nach dem Vorangegangenen die Frage stellen, ob es nicht einen andern Punkt auf der Achse giebt, für welchen zugleich $\varphi'=\varphi_1$ und $\psi'=\psi_1$ wird; die Antwort ist jedoch verneinend. Man geht dazu von den Transformationsformeln,

$$X=\frac{a\cos\Psi}{a+\sin\Psi}\cos\Phi,\quad Y=\frac{a\cos\Psi}{a+\sin\Psi}\sin\Phi$$

aus, wo a eine gewisse Länge, vom Kugelmittelpunkte aus gemessen, bedeutet. Die Rechnung ist der frühern ganz ähnlich, nur sind die Formeln länger. Man gelangt zu dem Endresultate:

$$\operatorname{tang}(\varphi'-\varphi)=-\frac{d\psi}{d\varphi}\cdot\frac{1+a\sin\psi}{a+\sin\psi}$$
$$\times\frac{(a+\sin\psi)^2+\sec^2\psi\,\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}(1+a\sin\psi)^2}{\left(\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+\operatorname{tng}\psi\,\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}\right)(1+a\sin\psi)(a+\sin\psi)+\sec\psi\,\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}(a^2-1)},$$

woraus man erkennt, dass die Identität von φ' mit φ_1 die Bedingung $a=1$ erfordert, so dass diese Eigenschaft der stereographischen Projection ausschliesslich zukommt; alsdann ist aber ψ' von ψ_1 verschieden.

Der geometrische Ort der Berührenden an eine krumme Linie von doppelter Krümmung ist bekanntlich eine Abwickelungsfläche, deren Charakteristik die erwähnte krumme Linie ist; der geometrische Ort der successiven Durchschnittslinien der Normalebenen derselben Curve ist ebenfalls eine Abwickelungsfläche, deren Erzeugende respective senkrecht zu denen der ersteren sind. Da die Normalebenen einer sphärischen Curve durch den Mittelpunkt der Kugel gehen (die Gleichung derselben ist $x'dx+y'dy+z'dz=0$); so reducirt sich für diese die zweite der genannten Flächen auf eine Kegelfläche; denkt man sich eine zu dieser supplementäre Kegelfläche, so sind ihre Erzeugenden parallel zu den Tangenten an die sphärische Curve; auf der ersteren Kegelfläche liegt noch die Fusspunktcurve der von diesen Tangenten gebildeten Abwickelungsfläche.

VII.

Ueber das bestimmte Integral

$$\int_0^{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}} (a-bx^n)^{\frac{p}{q}} x^{m-1}\,dx.$$

Von

Herrn *E. Bacaloglo*

in Leipzig.

Dieses Integral kann, unabhängig von den, Integralen dieser Form zukommenden Transformationsformeln, allemal direct bestimmt werden, wenn $\frac{p}{q}$ und n positive Zahlen sind. Es ist nämlich, wenn man $bx^n = u$ setzt:

$$\int_0^{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}} (a-bx^n)^{\frac{p}{q}} x^{m-1}\,dx = \frac{1}{nb^{\frac{m}{n}}} \int_0^a (a-u)^{\frac{p}{q}} u^{\frac{m}{n}-1}\,du$$

$$= \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{nb^{\frac{m}{n}}} \iint u^{\frac{m}{n}-1} v^{\frac{p}{q}-1}\,du\,dv,$$

wo die Bedingung

$$u + v \leqq a$$

hinzugefügt werden muss. Daraus folgt nach einem von Dirichlet gegebenen Satze:

(1)

$$\int_0^{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}} (a-bx^n)^{\frac{p}{q}} x^{m-1}\,dx = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{nb^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{p}{q}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)}\, a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},$$

wo Γ die bekannten Euler'schen Integrale bedeutet.

$$\int_0^{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}} (a-bx^n)^{\frac{p}{q}} x^{m-1}dx.$$

Zusätze. I. Vorstehende Formel lässt sich auch dann anwenden, wenn $\frac{p}{q}$ negativ, zugleich aber $\frac{m}{n}>1$ und $\frac{p}{q}<1$ ist. Denn es ist, wenn man $a-bx^n=z^q$ setzt:

$$\int (a-bx^n)^{-\frac{p}{q}} x^{m-1}dx = -\frac{q}{n\sqrt[n]{b^m}} \int (a-z^q)^{\frac{m}{n}-1} z^{q-p-1}dz,$$

woraus die Bedingung $\frac{m}{n}>1$ und $q>p$.

II. Die Formel (1) kann durch folgende:

$$\int_0^{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}} (a-bx^n)^{\frac{p}{q}} x^{m-1}dx = \frac{p}{q}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{b^m}}\cdot\frac{\Gamma(1+\frac{m}{n}).\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)}{\Gamma(1+\frac{m}{n}+\frac{p}{q})} a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

ersetzt werden, welche für den Fall, wo $m=n$, anwendbar ist.

III. Wenn die Grössen a, b die unter dem $\int$ Zeichen stehenden Factoren des bestimmten Integrales

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx \tag{2}$$

respective auf Null reduciren, so kann in manchen Fällen, vorausgesetzt, dass $f(x)$, $\varphi(x)$ algebraische Functionen sind, folgende Bemerkung von Nutzen sein. Man kann nämlich

$$f(x)=(x-a)^p.F(x),\quad \varphi(x)=(x-b)^q.\Phi(x)$$

setzen, indem man, grösserer Allgemeinheit wegen, a, b als vielfache Wurzeln der Gleichungen $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ betrachtet. Wird ferner zur Abkürzung $F(x)\Phi(x)=U$, $(x-a)^p(x-b)^q=V$ gesetzt, so folgt nach bekannten Sätzen:

$$\int f(x)\varphi(x)dx = U_1V-U_2V'+U_3V''-\ldots+(-1)^{p+q}U_{p+q+1}V^{(p+q)};$$

woraus, wenn man $q>p$ voraussetzt, was, ohne die Allgemeinheit dieser Zahlen zu beeinträchtigen, auch den Fall der Gleichheit nicht ausschliesst, und mit Rücksicht auf die Grenzen:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = (-1)^p\left[U_{p+1}V^{(p)}-U_{p+2}V^{(p+1)}+\ldots\pm U_qV^{(q-1)}\right]_a$$
$$+(-1)^q\left[U_{q+1}V^{(q)}-\ldots\pm U_{p+q-1}V^{(p+q)}\right]_a^b. \tag{3}$$

Jedenfalls bietet diese Formel nur dann einen Vortheil, wenn $p+q$ eine kleine Zahl ist; denn alsdann bricht die rechts stehende Reihe bald ab, was bei der gewöhnlichen Entwicklung von (2) im Allgemeinen nicht stattfindet.

VIII.

Die Zahlenformel für den mittleren Krümmungshalbmesser des Erdsphäroids.

Von

Herrn *Theodor Andres*,

k. k. Hauptmann im 16. Linien-Infanterie-Regiment.

Bessel hat in den astronomischen Nachrichten Nr. 333 und 438. numerische Formeln zur Berechnung der Krümmungshalbmesser des Erdsphäroids entwickelt. — Bei Berechnung der hiezu nöthigen Erddimensionen aus den bis dahin vorgenommenen Gradmessungen ging derselbe von der Relation $s=\int\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ aus, während Brünnow in seinem Werke über die sphärische Astronomie einen anderen Weg einschlägt, um die grosse Erdachse und deren Excentricität zu finden. Ich wiederhole hier kurz diese Entwickelung, um dann zu zeigen, wie aus den damit gewonnenen Gleichungen die Zahlenformel des mittleren Krümmungshalbmessers abgeleitet werden kann.

I.

Setzen wir wie gewöhnlich die halbe grosse und halbe kleine Achse des Erdsphäroids $= a$ und b; ferner

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2} \text{ und } \alpha=\frac{a-b}{a}. \quad \ldots\ldots \quad (0)$$

Bezeichnen wir ferner die Coordinaten eines Punktes A (Taf. I. Fig. 8.) auf der Erdoberfläche mit x und y, wobei die Achse der X in der Aequator-Ebene, jene der Y in der senkrecht darauf stehenden und durch den Mittelpunkt gehenden Ebene liegt, so ist die verbesserte geographische Breite $ANM = \varphi'$ und die beobachtete $ARM = \varphi$ gegeben durch:

$$\text{tang}\,\varphi' = \frac{y}{x}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{tang}\,\varphi = -\frac{dx}{dy}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aus der bekannten Gleichung:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

findet sich:

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{dx}{dy}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Mit Zuziehung von (2) und (4) ergiebt sich aus (3):

$$x^2 = \frac{a^2}{1 + \frac{b^2}{a^2}\text{tang}^2\varphi},$$

und für b^2 den Werth aus (0) und $\text{tang}^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$ gesetzt und reducirt:

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Ebenso findet man:

$$y = x\,\text{tang}\,\varphi' = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}. \quad \ldots\ldots \quad (II)$$

In der bekannten Formel für den Krümmunghalbmesser r der Ellipse $= \frac{(a^2 - e^2x^2)^{\frac{1}{2}}}{ab}$ den in (I) für x gefundenen Werth gesetzt, gibt:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ist g die mittlere Länge eines Meridiangrades in irgend einem Längenmaass und φ die Breite seiner Mitte, so ist:

$$g = \frac{\pi a(1-e^2)}{180(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Für einen zweiten Meridiangrad, dessen mittlere Länge g_1 und dessen mittlere Breite φ_1 sei, hat man:

$$g_1 = \frac{\pi a(1-e^2)}{180(1-e^2\sin^2\varphi_1)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Daher aus (6) und (7):

$$e^2 = \frac{g_1^{\frac{2}{3}} - g^{\frac{2}{3}}}{g_1^{\frac{2}{3}}\sin^2\varphi_1 - g^{\frac{2}{3}}\sin^2\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{III})$$

II.

Sind r' und r'' die Halbmesser für den **grössten** und **kleinsten** Krümmungskreis irgend eines Punktes, dessen Polhöhe $=\varphi$ ist, so hat man den **mittleren** Krümmungshalbmesser R gegeben durch:

$$R = \frac{r'' + r'}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Der Halbmesser für den kleinsten Krümmungskreis, d. i. für den Meridian, folgt aus der Gleichung (5), nemlich:

$$r'' = a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}. \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Zur Entwickelung des Halbmessers r' für den grössten Krümmungskreis, d. i. für die auf dem Meridian senkrecht stehende Curve, ist nur zu bedenken, dass derselbe die Normale ac ist.

Setzen wir in Taf. I. Fig. 9.

$$ab = n,\ bc = n',\ ak = y,\ ok = x,\ bk = m;$$

und Winkel $abk = \varphi$ = der Polhöhe;

so ist:

$$n = \frac{m}{\cos\varphi} \text{ und } n' = \frac{x-m}{\cos\varphi};$$

daher:

$$r' = n + n' = \frac{x}{\cos\varphi}.$$

Für x den Werth (I) gesetzt:

$$r' = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = a(1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}. \quad \ldots \quad (10)$$

Verrichten wir nun in (9) und (10)

1stens die Potenzirung } behalten aber nur noch die 4te Potenz
2tens die Multiplication } der kleinen Grösse e bei

und setzen

3tens statt $\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$,

„ $\sin^4\varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi$;

so erhalten wir, Alles gehörig reducirt:

(11)

$$r'' = a[1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{64}e^4 \ldots . - (\frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{16}e^4)\cos 2\varphi + \frac{15}{64}e^4\cos 4\varphi \ldots .],$$

(12)

$$r' = a[1 + \frac{e^2}{4} + \frac{9}{64}e^4 \ldots . - (\frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{16}e^4)\cos 2\varphi + \frac{3}{64}e^4\cos 4\varphi \ldots .];$$

hieraus folgt als arithmetisches Mittel:

(13)

$$R = a[1 + \frac{3}{64}e^4 \ldots . - \cos 2\varphi(\frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{16}) + \frac{9}{64}e^4\cos 4\varphi \ldots .],$$

worin nach den von Bessel nach der Methode der kleinsten Quadratsummen bearbeiteten zehn Gradmessungen ist:

$$\log a = \overset{+}{6}.514\ 8235 \quad \text{oder} \quad a = 3272077.14 \text{ Toisen}$$

und

$$\log e = \bar{8}.912\ 2052.$$

Führen wir diese Werthe in (13) ein, so ergiebt sich:

$$R = a[1.0000021 - 0.0033455\cos 2\varphi + 0.0000063\cos 4\varphi \ldots .]$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} R = 3272141 \text{ Tois.} - 10946.73\cos 2\varphi + 20.61\cos 4\varphi, \\ \qquad\qquad \text{oder logarithmisch dargestellt:} \\ R = \overset{+}{6}.5148321 - \overset{+}{4}.039\ 2845\cos 2\varphi + \overset{+}{1}.314\ 1640\cos 4\varphi \end{array}\right\} \quad (14)$$

Geben wir diesen Formeln die folgende, zum Gebrauch bequemere Form, indem $\varrho =$ dem bekannten Factor 206264.806 durch dieselben dividirt wird, so haben wir mit Zuziehung von (9) und (10)

$$\frac{\varrho}{r''} = \frac{\varrho}{a} \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{1 - e^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

und

$$\frac{\varrho}{r'} = \frac{\varrho}{a} \cdot (1 - e \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} \cdot \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Erheben wir weiter zur Potenz, verrichten die angezeigte Division in (15), behalten die 4ten Potenzen von e bei, setzen statt $\sin^2\varphi$ und $\sin^4\varphi$ die gleichen Ausdrücke der vielfachen Winkel und reduciren, so erhalten wir:

(15′)

$$\frac{\varrho}{r''} = \frac{\varrho}{a}\left[1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{25}{64}e^4 + \left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{9}{16}e^4\right)\cos 2\varphi + \frac{3}{64}e^4 \cos 4\varphi \ldots.\right]$$

und

(16′)

$$\frac{\varrho}{r'} = \frac{\varrho}{a}\left[1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 + \left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{16}e^4\right)\cos 2\varphi - \frac{1}{64}e^4 \cos 4\varphi \ldots.\right].$$

Hierin die numerischen Werthe von a, e und ϱ substituirt gibt:

$$\frac{\varrho}{r''} = 0.063\,1442 + 0.000\,3171 \cos 2\varphi + 0.000\,0001 \cos 4\varphi.$$

$$\frac{\varrho}{r'} = 0.062\,9352 + 0.000\,1054 \cos 2\varphi - 0.000\,0001 \cos 4\varphi;$$

woraus für den mittleren Krümmungshalbmesser folgt:

$$\frac{\varrho}{R} = 0''.063\,0384 + 0''.000\,2112 \cos 2\varphi, \quad \ldots \quad (17)$$

oder logarithmisch dargestellt:

$$\frac{\varrho}{R} = \bar{8}.799\,6045 + \bar{6}.324\,6939 \cos 2\varphi.$$

Bei'm Gebrauch dieser Formel (17) ist nicht zu übersehen, dass das R in Toisen ausgedrückt ist, oder dass die in Gradmass zu verwandelnde Dreiecksseite in Toisen gegeben sein muss.

Aus (17) folgt durch Differentiation:

$$d.\left(\frac{\varrho}{R}\right) = (-0.0002112 \sin 2\varphi\, d\varphi . \sin 1'').2 \ldots (18)$$

$d.\left(\frac{\varrho}{R}\right)$ erreicht, abgesehen von $d\varphi$, für $\varphi = 45^0$ seinen grössten Werth. — Setzen wir daher $\varphi = 45^0$ und $d\varphi = 10$ Minuten, so ist nur:

$$d\left(\frac{\varrho}{R}\right) = -0.0000012;$$

für $d\varphi = 1$ Minute ist:

$$d\left(\frac{\varrho}{R}\right) = -0.0000001,$$

woraus man erkennt, wie wenig ein Fehler von φ auf die Richtigkeit von $\frac{\varrho}{R}$ influirt, und dass es genügt, wenn man bei der Berechnung von $\frac{\varrho}{R}$ die Minute von φ sicher gestellt hat.

In der unten mitgetheilten Tafel habe ich daher die $\frac{\varrho}{R}$ für alle Orte Deutschlands, von 43° bis 56° Polhöhe von 10 zu 10 Minuten berechnet und tabellarisch dargestellt, indem man für die dazwischen liegenden Minuten interpolirt, und $\frac{\varrho}{R}$ bis auf sechs Dezimalstellen ganz sicher erhält.

III.

Zur Berechnung der Länge irgend eines Grades im Meridian benutzt man die Gleichung (6), worin φ die mittlere Breite des Meridianbogens für irgend einen Grad bedeutet, und worin der Ausdruck

$$\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = r''$$

ist; daher mit Hinblick auf (11):

$$G = \frac{a\pi}{180}[1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{64}e^4 \ldots . - (\frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{16}e^4)\cos 2\varphi + \frac{15}{64}\cos 4\varphi \ldots .],$$

und für a, e und π die Zahlwerthe substituirt:

$$G = 57013.11 \text{ Tois.} - 286.34 \cos 2\varphi + 0.61 \cos 4\varphi.$$

Die hier abgeleiteten Formeln stimmen mit jenen von Bessel auf eine andere Art entwickelten vollkommen überein.

Die Gewichte repetirter Winkel. Hat man für eine n_1 fache Repetition erhalten an Winkelmass $= a_1$, für $n_2 = a_2$, für $n_3 = a_3$ u. s. w.; so ist nach der Methode der kleinsten Quadratsummen der wahrscheinlichste Werth des Winkels:

$$x = \frac{[na]}{[n^2]}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

daher das Gewicht desselben:

$$g = \frac{[n^2]^2}{[n]^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Würde aber nur Eine Repetitionsbeobachtung gemacht, oder würde überhaupt nur Eine Repetitionsbeobachtung zu Grunde gelegt, so folgt aus (2) $g = n^2$.

Es ist daher naturgemässer, die Gewichte repetirter Winkel den Quadraten der Repetitionszahlen, und nicht wie es bisher fast alle Autoren gethan haben und noch thun, den 1sten Potenzen derselben proportional zu setzen.

Dafür spricht auch noch der Umstand, dass ein aus mehreren Repetitionsbeobachtungen wirklich berechneter Winkel, indem man die Gewichte den Quadraten der Repetitionszahlen proportional setzt, gezogenes Resultat mit dem aus (1) gezogenen Resultat vollkommen übereinstimmt; im entgegengesetzten Falle aber nicht. —

Ich habe beobachtet:

4facher Winkel = 287° 19′ 5″		Nach (1) hat man
6 „ „ 430 58 0		$x = \frac{8332^\circ\, 3' \, 20''}{116}$
8 „ „ 574 37 22.5		$x = 71^\circ\, 49' \, 41''\, 03$

Die Gewichte den Quadraten von n proportional gesetzt gibt, da man für die einfachen Winkel bekommt:

71° 49′ 46″.25	$x'' = \frac{6.25 \times 16 + 0.0 \times 36 + 0.31 \times 64}{16 + 36 + 64}$
40.00	
40.31	$x'' = 1.03$, daher
	$x = 71°49'41''.03$ (wie oben)

Die Gewichte hingegen den 1sten Potenzen von n proportional gesetzt, liefert:

$$\frac{6.25 \times 4 + 0.0 \times 6 + 0.31 \times 8}{4 + 6 + 8} = x''$$

$$x'' = 1.52,$$

also um 0″.49 zu gross.

Mittlerer Krümmungshalbmesser (R)

für alle Orte Deutschlands und zwar innerhalb der Polhöhe von 43° bis 56°; ϱ bedeutet den Factor 206264.806; die Differenzen für 1 Minute sind negativ zu nehmen.

Grad	Minute	Zahl $\frac{\varrho}{R}$; das R in Toisen verstanden	Differenz für 1 Minute	$\log \frac{\varrho}{R}$; R in Toisen	Gemeinschftl. Differenz für 1 Minute	$\log \frac{\varrho}{R}$; R in Metern	$\log \frac{\varrho}{R}$; R in Wien. Klft.
43°	0	0.063 0531		$\bar{8}$.799 7065		9.089 5265	$\bar{8}$.811 5475
			−1.2		−8.4		
	10	519	−1.2	6981	−8.2	5181	5391
	20	507	−1.2	6899	−8.2	5099	5309
	30	495	−1.3	6817	−9.0	5017	5227
	40	482	−1.2	6727	−8.3	4927	5137
	50	470	−1.2	6644	−8.3	4844	5054
44°	0	458	−1.3	6561	−8.8	4761	4971
	10	445	−1.2	6473	−8.3	4673	4883
	20	433	−1.2	6390	−8.3	4590	4800
	30	421	−1.3	6307	−9.0	4507	4717
	40	408	−1.2	6217	−8.3	4417	4627
	50	396	−1.2	6134	−8.2	4334	4544
45°	0	384	−1.2	6052	−8.3	4252	4462
	10	372	−1.2	5969	−8.3	4169	4379
	20	360	−1.3	5886	−8.9	4086	4296
	30	347	−1.2	5797	−8.2	3997	4207
	40	335	−1.2	5715	−8.3	3915	4125
	50	323	−1.3	5632	−9.0	3832	4042
46°	0	310	−1.2	5542	−8.3	3742	3952
	10	298	−1.2	5459	−8.3	3659	3869
	20	286	−1.2	5376	−8.2	3576	3786
	30	274	−1.3	5294	−9.0	3494	3704
	40	261	−1.2	5204	−8.2	3404	3614
	50	249	−1.2	5122	−8.3	3322	3532
47°	0	237	−1.2	5039	−8.2	3239	3449
	10	225	−1.3	4957	−9.0	3157	3367
	20	212	−1.2	4867	−8.3	3067	3277
	30	200	−1.2	4784	−8.3	2984	3194
	40	188	−1.2	4701	−8.3	2901	3111
	50	176	−1.3	4618		2818	3028
48°	0	163	−1.2	4529	−8.3	2729	2939
	10	151	−1.2	4446	−8.2	2646	2856
	20	139	−1.2	4364	−8.3	2564	2774
	30	127	−1.2	4281	−8.2	2481	2691
	40	115	−1.3	4199	−9.0	2399	2609
	50	102		4109		2309	2519

Grad	Minute	Zahl $\frac{\varrho}{R}$; das R in Toisen verstanden	Differenz für 1 Minute	$\log \frac{\varrho}{R}$; R in Toisen	Gemeinschaft. Differenz für 1 Minute	$\log \frac{\varrho}{R}$; R in Metern	$\log \frac{\varrho}{R}$; R in Wien. Klft.
49°	0	0.06300 90	−1.2	$\bar{8}$.799 4026	−8.3	$\bar{9}$.089 2226	8.811 2436
	10	78	−1.2	3943	−8.3	2143	2353
	20	66	−1.2	3860	−8.3	2060	2270
	30	54	−1.2	3778	−8.2	1978	2188
	40	42	−1.2	3695	−8.3	1895	2105
	50	30	−1.2	3612	−8.3	1812	2022
50°	0	17	−1.3	3522	−9.0	1722	1932
	10	05	−1.2	3440	−8.2	1640	1850
	20	0.06299 93	−1.2	3358	−8.3	1558	1768
	30	81	−1.2	3275	−8.3	1475	1685
	40	69	−1.2	3192	−8.3	1392	1602
	50	57	−1.2	3109	−8.3	1309	1519
51°	0	45	−1.2	3027	−8.2	1227	1437
	10	33	−1.2	2944	−8.3	1144	1354
	20	21	−1.2	2861	−8.3	1061	1271
	30	09	−1.2	2778	−8.3	0978	1188
	40	0.06298 97	−1.2	2695	−8.3	0895	1105
	50	85	−1.2	2613	−8.2	0813	1023
52°	0	73	−1.2	2530	−8.3	0730	0940
	10	61	−1.2	2447	−8.3	0647	0857
	20	49	−1.2	2364	−8.3	0564	0774
	30	37	−1.2	2281	−8.2	0481	0691
	40	25	−1.1	2199	−7.5	0399	0609
	50	14	−1.2	2124	−8.3	0324	0534
53°	0	02	−1.2	2041	−8.3	0241	0451
	10	0.06297 90	−1.2	1958	−8.3	0158	0368
	20	78	−1.2	1875	−8.3	0075	0285
	30	67	−1.1	1799	−7.6	9.088 9999	0209
	40	55	−1.2	1717	−8.2	9917	0127
	50	43	−1.2	1634	−8.3	9834	0044
54°	0	31	−1.1	1551	−7.6	9751	8.810 9961
	10	20	−1.2	1475	−8.3	9675	9885
	20	08	−1.2	1392	−8.3	9592	9802
	30	0.06296 96	−1.1	1309	−7.5	9509	9719
	40	85	−1.2	1234	−8.3	9434	9644
	50	73	−1.2	1151	−8.3	9351	9561
55°	0	62	−1.1	1075	−7.6	9275	9485
	10	50	−1.2	0992	−8.3	9192	9402
	20	39	−1.1	0916	−7.6	9116	9326
	30	27	−1.2	0833	−8.3	9033	9243
	40	16	−1.1	0757	−7.6	8957	9167
	50	05	−1.1	0682	−7.5	8882	9092

IX.

Ueber homofokale Paraboloide.

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

---

(1) $$\frac{y^2}{2p+4\varrho}+\frac{z^2}{2q+4\varrho}=x+\varrho,\quad \frac{y^2}{2p+4\mu}+\frac{z^2}{2q+4\mu}=x+\mu,$$

$$\frac{y^2}{2p+4\nu}+\frac{z^2}{2q+4\nu}=x+\nu.$$

Diese Gleichungen stellen drei homofokale Paraboloide vor, deren Parameter ϱ, μ, ν sind; die Flächen selbst sollen durch (ϱ), (μ), (ν) bezeichnet werden. Ein Punkt (ϱ, μ, ν) ist durch elliptische Coordinaten bestimmt, wenn die Parameter der drei durch ihn gehenden homofokalen Paraboloide gegeben sind. p und q sind constant. Durch Elimination ergibt sich aus (1):

(2) $$x=-\varrho-\mu-\nu-\frac{p}{2}-\frac{q}{2},$$

(3) $$y^2=\frac{1}{q-p}(p+2\varrho)(p+2\mu)(p+2\nu),$$

(4) $$z^2=\frac{1}{p-q}(q+2\varrho)(q+2\mu)(q+2\nu).$$

Wenn in (2) $x=$ const. ist, so ist auch $\varrho+\mu+\nu=$ const., oder:

> Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene senkrecht zur Hauptaxe, so ist die Summe der Parameter der drei durch ihn gelegten homofokalen Paraboloide constant.

Da sich durch zwei Punkte im Raume je drei homofokale Paraboloide legen lassen, so erhält man ein Parallelepiped, dessen Diagonale die Verbindungslinie beider Punkte ist. Die elliptischen Coordinaten derselben sollen (ϱ, μ, ν) und $(\varrho+d\varrho, \mu+d\mu, \nu+d\nu)$ sein, während drei anstossende Kanten des Parallelepipeds mit ds', ds'', ds''' bezeichnet werden. Nun erhalten wir durch Differenziation aus (2), (3), (4), indem x, y, z und ϱ, hierauf x, y, z und μ und endlich x, y, z und ν als variabel betrachtet werden:

$$dx=-d\varrho, \quad dy=\frac{\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu}}{\sqrt{q-p}}\frac{d\varrho}{\sqrt{p+2\varrho}},$$

$$dz=\frac{\sqrt{q+2\mu}\sqrt{q+2\nu}}{\sqrt{p-q}}\frac{d\varrho}{\sqrt{q+2\varrho}};$$

$$ds'=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=d\varrho\sqrt{\left\{1-\frac{(p+2\mu)(p+2\nu)}{(p+2\varrho)(p-q)}+\frac{(q+2\mu)(q+2\nu)}{(q+2\varrho)(p-q)}\right\}},$$

$$ds'=2d\varrho\frac{\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{\varrho-\nu}}{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{q+2\varrho}}. \tag{5}$$

Auf analoge Weise erhalten wir:

$$ds''=2d\mu\frac{\sqrt{\mu-\varrho}\sqrt{\mu-\nu}}{\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}}, \tag{6}$$

$$ds'''=2d\nu\frac{\sqrt{\nu-\varrho}\sqrt{\nu-\mu}}{\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\nu}}. \tag{7}$$

Die Werthe von ds'' und ds''' brauchen nicht besonders entwickelt zu werden, sondern ergeben sich zufolge der Gleichungen (1) aus (5) durch blosse Vertauschung der Buchstaben ϱ und μ, ϱ und ν.

Die Winkel, welche die Kanten ds', ds'', ds''' mit den Axen der x, y, z bilden, bezeichnen wir mit a, a', a''; $\alpha, \alpha', \alpha''$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$; so ist:

$$\cos a=\frac{dx}{ds'}, \quad \cos a'=\frac{dy}{ds'}, \quad \cos a''=\frac{dz}{ds'} \text{ u. s. f.}$$

oder:

(8)

$$\cos a=-\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{q+2\varrho}}{\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{\varrho-\nu}}, \quad \cos a'=\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\varrho}}{\sqrt{q-p}\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{\varrho-\nu}},$$

$$\cos a''=\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{q+2\mu}\sqrt{q+2\nu}\sqrt{p+2\varrho}}{\sqrt{p-q}\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{\varrho-\nu}};$$

(9)

$$\cos\alpha = -\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}}{\sqrt{\mu-\varrho}\sqrt{\mu-\nu}}, \quad \cos\alpha' = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\mu}}{\sqrt{q-p}\sqrt{\mu-\varrho}\sqrt{\mu-\nu}},$$

$$\cos\alpha'' = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{q+2\nu}\sqrt{p+2\mu}}{\sqrt{p-q}\sqrt{\mu-\varrho}\sqrt{\mu-\nu}};$$

(10)

$$\cos\mathfrak{a} = -\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\nu}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\nu-\varrho}}, \quad \cos\mathfrak{a}' = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\nu}}{\sqrt{q-p}\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\nu-\varrho}},$$

$$\cos\mathfrak{a}'' = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{q+2\mu}\sqrt{p+2\nu}}{\sqrt{p-q}\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\nu-\varrho}}.$$

Aus (8) und (9) folgt:

$$\cos a \,.\, \cos\alpha + \cos a' \,.\, \cos\alpha' + \cos a'' \,.\, \cos\alpha'' = 0.$$

Mithin stehen die Kanten ds' und ds'' auf einander senkrecht; ebenso schliesst man auch, dass die Winkel zwischen ds' und ds''', ds'' und ds''' Rechte sind, oder:

Drei homofokale Paraboloide, welche sich in einem Punkte schneiden, stehen auf einander senkrecht; also schneiden sie sich nach dem Satze von Dupin in ihren Krümmungslinien.

Es sei ***ABCD*** ein von vier Krümmungslinien auf dem Paraboloid (ϱ) gebildetes Viereck; die Coordinaten der Ecken bezeichnen wir mit x_a, y_a, z_a; x_b, y_b, z_b; x_c, y_c, z_c; x_d, y_d, z_d; die Punkte ***ABCD*** werden der Reihe nach durch die in denselben zusammentreffenden homofokalen Paraboloide bestimmt mit (ϱ, μ, ν); (ϱ, μ, ν'); (ϱ, μ', ν'); (ϱ, μ', ν); so ist:

$$x_a = -\varrho-\mu-\nu-\frac{p}{2}-\frac{q}{2}, \quad x_b = -\varrho-\mu-\nu'-\frac{p}{2}-\frac{q}{2},$$

$$x_c = -\varrho-\mu'-\nu'-\frac{p}{2}-\frac{q}{2}, \quad x_d = -\varrho-\mu'-\nu-\frac{p}{2}-\frac{q}{2},$$

$$x_a + x_c = x_b + x_d.$$

In einem von vier Krümmungslinien gebildeten Vierecke auf einem Paraboloid ist die Summe der Abstände zweier Gegenecken von irgend einer zur Hauptaxe senkrechten Ebene gleich der Summe der Abstände der beiden andern Gegenecken.

$$y_a = \sqrt{\frac{1}{q-p}}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu},$$

$$y_b = \sqrt{\frac{1}{q-p}}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu'},$$

$$y_c = \sqrt{\frac{1}{q-p}}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu'}\sqrt{p+2\nu'},$$

$$y_d = \sqrt{\frac{1}{q-p}}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu'}\sqrt{p+2\nu},$$

$y_a . y_c = y_b . y_d$, ebenso $z_a . z_c = z_b . z_d$.

In dem genannten Vierecke bilden die Entfernungen der Ecken von zwei durch den Ursprung gehenden Hauptebenen je eine Proportion.

$$AC^2 = (x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2 + (z_a - z_c)^2,$$

$$BD^2 = (x_b - x_d)^2 + (y_b - y_d)^2 + (z_b - z_d)^2.$$

Mit Hülfe der obigen Werthe von x_a, y_a, z_a; u. s. w. findet man hieraus nach einigen Reduktionen:

$$AC = BD.$$

In einem Krümmungslinien-Viereck auf einem Paraboloid sind zwei Gegenecken von einander so weit entfernt, als die beiden andern.

Solche Gegenecken sind also dasselbe bei den Paraboloiden, wie die korrespondirenden Punkte des Ivory bei den homofokalen centrischen Flächen zweiten Grades. Man vergleiche Chasles, sur l'attraction des éllipsoides. (Mémoires de l'Institut de France, tome IX.)

Aus $dx = -d\varrho$ folgt:

Die Projektion des Stücks der Normalen zwischen zwei unendlich nahen homofokalen Paraboloiden auf der Hauptaxe ist constant.

Aus (5), (6) und (7) lässt sich schliessen:

Die Entfernungen der vier Ecken eines Krümmungslinien-Vierecks von dem unendlich nahen einschliessenden Paraboloid bilden eine Proportion.

Bertrand hat im Journal von Liouville eine ähnliche Eigenschaft der Ellipsoide nachgewiesen.

Aus (8), (9), (10) ergibt sich:

Die Cosinus der Winkel, welche die Normalen in den Ecken eines Krümmungslinien-Vierecks auf einem Paraboloid mit einer Axe bilden, sind proportionirt.

Aus der bekannten Formel für die Hauptkrümmungs-Halbmesser R und R' eines Paraboloids findet man durch Einführung elliptischer Coordinaten leicht:

$$(11)\quad R=\frac{\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{\varrho-\nu}^3}{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{q+2\varrho}},\quad R'=\frac{\sqrt{\varrho-\mu}^3\sqrt{\varrho-\nu}}{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{q+2\varrho}}.$$

Hieraus lässt sich der Satz ableiten:

Die acht Hauptkrümmungs-Halbmesser in den Ecken eines Krümmungslinien-Vierecks auf einem Paraboloid theilen sich in zwei Gruppen; die vier Halbmesser in jeder Gruppe bilden eine Proportion.

Aus (8) und (11) folgt:

$$(12)\quad R'.\cos\alpha=-\tfrac{1}{2}(\varrho-\mu),\quad R.\cos\alpha=-\tfrac{1}{2}(\varrho-\nu).$$

R ist der Halbmesser des Kreises, welcher die Krümmungslinie $\varrho=$ const., $\mu=$ const. berührt, und R' der Halbmesser des Kreises, welcher die Krümmungslinie $\varrho=$ const., $\nu=$ const. berührt. Wir haben also nach (12) den Satz:

Längs einer Krümmungslinie auf einem Paraboloid ist die Projektion des Hauptkrümmungs-Halbmessers, dessen Ebene die Krümmungslinie senkrecht schneidet, auf der Hauptaxe constant.

Da nun zwei Gegenecken eines Krümmungslinien-Vierecks von einer zur Hauptaxe senkrechten Ebene zusammen so weit entfernt sind, als die beiden andern, so theilen sich die acht Krümmungsmittelpunkte, welche den vier Ecken eines Krümmungslinien-Vierecks auf einem Paraboloid entsprechen, in zwei Gruppen, wovon jede ein Viereck bildet. Die Summe der Entfernungen zweier Gegenecken eines solchen Vierecks von einer zur Hauptaxe senkrechten Ebene ist gleich der Summe der Entfernungen der beiden andern Gegenecken.

In der Abhandlung: „De curvis curvaturae et lineis brevissimis in superficiebus secundi gradus“ (Journal für reine und angewandte Mathematik. XXVI. p. 155.) hat Joachimsthal die Gleichung der geodätischen Linien auf

den Flächen zweiten Grades angegeben, woraus sich für das Paraboloid $\frac{y^2}{m}+\frac{z^2}{n}=x$ diese Form ableiten lässt:

$$1+\frac{4y^2}{m^2}+\frac{4z^2}{n^2}=C\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\frac{dy^2}{m}+\frac{dz^2}{n}}.$$

Um auf elliptische Coordinaten überzugehen, setzen wir hier nach (1):

$$m=2p+4\varrho, \quad n=2q+4\varrho$$

und für y und z ihre Werthe aus (3) und (4), so haben wir zunächst:

$$1+4\frac{y^2}{m^2}+4\frac{z^2}{n^2}=4\frac{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{(p+2\varrho)(q+2\varrho)}.$$

Wenn die geodätische Linie auf der Fläche (ϱ) liegt und ds ein Element derselben ist, so haben wir $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Die Werthe von dy und dz erhält man aus (3) und (4), indem y und z, μ und ν als variabel angesehen werden, also:

$$dy=\frac{\sqrt{p+2\varrho}}{\sqrt{q-p}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu}}((p+2\nu)d\mu+(p+2\mu)d\nu),$$

$$dz=\frac{\sqrt{q+2\varrho}}{\sqrt{p-q}\sqrt{q+2\mu}\sqrt{q+2\nu}}((q+2\nu)d\mu+(q+2\mu)d\nu),$$

$$\frac{dy^2}{m}+\frac{dz^2}{n}=\frac{dy^2}{2p+4\varrho}+\frac{dz^2}{2q+4\varrho}=-\frac{\mu-\nu}{(p+2\mu)(q+2\mu)}d\mu^2+\frac{\mu-\nu}{(p+2\nu)(q+2\nu)}d\nu^2.$$

Somit haben wir für die Gleichung der geodätischen Linien in elliptischen Coordinaten:

$$C=-4\frac{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}{(p+2\varrho)(q+2\varrho)ds^2}\left(\frac{d\mu^2}{(p+2\mu)(q+2\mu)}-\frac{d\nu^2}{(p+2\nu)(q+2\nu)}\right).$$

Im Punkte (ϱ, μ, ν) auf (ϱ) schneiden sich die beiden Krümmungslinien $\varrho=\text{const.}$, $\mu=\text{const.}$ und $\varrho=\text{const.}$, $\nu=\text{const.}$ Das Element der ersten Krümmungslinie haben wir mit ds''' und das der zweiten mit ds'' bezeichnet. Der Winkel zwischen ds''' und ds sei gleich i, so ist

$$\cos i = \frac{ds'''}{ds} \text{ oder } \cos^2 i = 4\frac{dv^2}{ds^2}\frac{(\varrho-v)(\mu-v)}{(p+2v)(q+2v)},$$

$$\sin i = \frac{ds''}{ds} \text{ oder } \sin^2 i = -4\frac{d\mu^2}{ds^2}\frac{(\varrho-\mu)(\mu-v)}{(p+2\mu)(q+2\mu)};$$

also

$$C = \frac{\varrho-\mu}{(p+2\varrho)(q+2\varrho)}\cos^2 i + \frac{\varrho-v}{(p+2\varrho)(q+2\varrho)}\sin^2 i$$

oder

$$\mu\cos^2 i + v\sin^2 i = C'. \tag{13}$$

Die neue Constante C' ist gleich $\varrho - C(p+2\varrho)(q+2\varrho)$.

Die Gleichung (13) entspricht der Liouville'schen Gleichung $\mu^2\cos^2 i + v^2\sin^2 i = \text{const.}$ für die centrischen Flächen zweiten Grades. Wenn die geodätische Linie auf (ϱ) gehörig verlängert die Krümmungslinie $\alpha = \text{const.}$ berührt, d. h. die Durchschnittslinie der homofokalen Paraboloide (ϱ) und $\frac{y^2}{2p+4\alpha} + \frac{z^2}{2q+4\alpha} = x+\alpha$, so ist im Berührungspunkte $i=0$; (13) verwandelt sich in $\alpha = C'$, also:

$$\mu\cos^2 i + v\sin^2 i = \alpha. \tag{14}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich viele Consequenzen ziehen für die geodätischen Linien des Paraboloids, wie aus der Liouville'schen Relation für diese Linien auf dem Ellipsoid und den Hyperboloiden (Journal von Liouville. 1846.).

Wir können aber noch eine allgemeinere Beziehung auffinden, welche die Gleichung (14) als speziellen Fall in sich begreift.

Es ist eine Ebene $Ax + By + Cz = \gamma$ gegeben, auf welcher sich ein Punkt M bewegt, dessen Coordinaten (x, y, z) oder (ϱ, μ, v) sind; die Normalen von (ϱ), (μ), (v) oder die Elemente ds', ds'', ds''' bilden in M mit der Ebene die Winkel i, i', i''; so ist:

$$\sin i = \frac{1}{\sqrt{1+A^2+B^2}}(A\cos\alpha + B\cos\alpha' + C\cos\alpha''),$$

$$\sin i' = \frac{1}{\sqrt{1+A^2+B^2}}(A\cos\alpha + B\cos\alpha' + C\cos\alpha''),$$

$$\sin i'' = \frac{1}{\sqrt{1+A^2+B^2}}(A\cos\alpha + B\cos\alpha' + C\cos\alpha'').$$

Mithin:

$$\varrho\sin^2 i + \mu\sin^2 i' + \nu\sin^2 i''$$

$$= \frac{1}{1+A^2+B^2}\Big\{ \begin{aligned} &(\varrho\cos^2\alpha + \mu\cos^2\alpha + \nu\cos^2\alpha)A^2 \\ &+ (\varrho\cos\alpha\cos\alpha' + \mu\cos\alpha\cos\alpha' + \nu\cos\alpha\cos\alpha')2AB \\ &+ (\varrho\cos\alpha\cos\alpha'' + \mu\cos\alpha\cos\alpha'' + \nu\cos\alpha\cos\alpha'')2A \end{aligned} \Big\}$$

$$+ \frac{1}{1+A^2+B^2}\Big\{ \begin{aligned} &(\varrho\cos^2\alpha' + \mu\cos^2\alpha' + \nu\cos^2\alpha')B^2 \\ &+ (\varrho\cos^2\alpha'' + \mu\cos^2\alpha'' + \nu\cos^2\alpha'') \\ &+ (\varrho\cos\alpha'\cos\alpha'' + \mu\cos\alpha'\cos\alpha'' + \nu\cos\alpha\cos\alpha'')2B \end{aligned} \Big\}.$$

Man findet nun mit Benützung der Gleichungen (8), (9) und (10) durch einige Rechnungen, deren Detail ich unterdrücke:

$$\varrho\cos^2\alpha + \mu\cos^2\alpha + \nu\cos^2\alpha = \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + \varrho + \mu + \nu = -x,$$

$$\varrho\cos\alpha\cos\alpha' + \mu\cos\alpha\cos\alpha' + \nu\cos\alpha\cos\alpha'$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{q-p}}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu} = -\tfrac{1}{2}y,$$

$$\varrho\cos\alpha\cos\alpha'' + \mu\cos\alpha\cos\alpha'' + \nu\cos\alpha\cos\alpha''$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{p-q}}\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{q+2\mu}\sqrt{q+2\nu} = -\tfrac{1}{2}z,$$

$$\varrho\cos^2\alpha' + \mu\cos^2\alpha' + \nu\cos^2\alpha' = -\frac{p}{4},$$

$$\varrho\cos^2\alpha'' + \mu\cos^2\alpha'' + \nu\cos^2\alpha'' = -\frac{q}{4},$$

$$\varrho\cos\alpha\cos\alpha'' + \mu\cos\alpha\cos\alpha'' + \nu\cos\alpha\cos\alpha'' = 0;$$

also

$$\varrho\sin^2 i + \mu\sin^2 i' + \nu\sin^2 i'' = \frac{1}{1+A^2+B^2}\Big\{-A^2x - ABy - Az - \frac{p}{4} - \frac{q}{4}\Big\}.$$

Da sich der Punkt auf der Ebene $Ax + By + Cz = \gamma$ bewegt, so ist:

$$(15) \qquad \varrho\sin^2 i + \mu\sin^2 i' + \nu\sin^2 i'' = -\frac{A\gamma + \frac{p}{4} + \frac{q}{4}}{1+A^2+B^2} = \text{const.}$$

Die Bestimmung der Constante ist sehr leicht; unter allen homo-

fokalen Paraboloiden ist Eines, welches die Ebene tangirt, α sei dessen Parameter; so ist im Berührungspunkte $i=90^0$, $i'=i''=0$, mithin verwandelt sich (15) in $\alpha=\text{const.}$, somit ist:

$$\varrho\sin^2 i+\mu\sin^2 i'+\nu\sin^2 i''=\alpha. \tag{16}$$

Das entsprechende Theorem von Chasles für die centrischen Flächen heisst:

$$\varrho^2\sin^2 i+\mu^2\sin^2 i'+\nu^2\sin^2 i''=\alpha^2.$$

Aus (16) findet man für die Gleichung des Kegels, dessen Spitze der Punkt (ϱ, μ, ν) ist und welcher die Fläche (α) tangirt, wenn die Normalen der Paraboloide (ϱ), (μ), (ν) als Coordinatenaxen angenommen werden:

$$\frac{\xi^2}{\varrho-\alpha}+\frac{\eta^2}{\mu-\alpha}+\frac{\zeta^2}{\nu-\alpha}=0. \tag{17}$$

Die Gleichung eines konzentrischen Kegels, welcher ein weiteres homofokales Paraboloid (β) tangirt, ist:

$$\frac{\xi^2}{\varrho-\beta}+\frac{\eta^2}{\mu-\beta}+\frac{\zeta^2}{\nu-\beta}=0. \tag{18}$$

Beide Kegel sind homofokal, die Gleichungen ihrer Fokallinien

$$\xi=\pm\sqrt{\frac{\varrho-\mu}{\mu-\nu}}\zeta,\quad y=0$$

sind von (α) und (β) unabhängig, also haben wir den Satz:

Alle konzentrischen Kegel, welche homofokale Paraboloide berühren, sind homofokal.

Die Fokallinien sind die geradlinigen Erzeugenden eines der drei durch die Spitze der Kegel gehenden Paraboloide.

(17) und (18) sind die Gleichungen einer gemeinschaftlichen Tangente der Paraboloide (α) und (β); da sie der Durchschnitt der homofokalen Kegel ist, welche sich senkrecht schneiden, und die durch die Tangente gelegten Tangential-Ebenen der Kegel zugleich die Paraboloide berühren, so schliesst man:

Zieht man durch eine gemeinschaftliche Tangente zweier homofokalen Paraboloide eine Tangential-Ebene des Einen, so ist sie zugleich Normal-Ebene des andern.

Die scheinbaren Umrisse beider Flächen stehen senkrecht auf einander; letztere erfüllen somit alle Bedingungen, welche

nöthig sind, um die zwei Mäntel der Fläche der Krümmungsmittelpunkte einer dritten Fläche (λ) vorstellen zu können. Bewegt sich nun eine Gerade so, dass sie eine gemeinschaftliche Tangente von zwei solchen Mänteln ist, so beschreibt der Berührungspunkt auf dem Einen Mantel eine geodätische Linie und auf dem andern eine Linie, die in sehr naher Verbindung steht mit ersterer und die wir desshalb konjugirte geodätische Linie nennen.

Aus der Gleichung

$$\varrho \sin^2 i + \mu \sin^2 i' + \nu \sin^2 i'' = \text{const.}$$

lassen sich die Relationen

$$\mu \sin^2 i' + \nu \sin^2 i'' = \text{const.}$$

als spezielle Fälle für die geodätischen Linien sowohl, als auch für die konjugirten geodätischen Linien auf den Paraboloiden ableiten. Da alle Tangenten einer geodätischen Linie auf (α) das homofokale Paraboloid (β) berühren und zwei aufeinanderfolgende Tangenten in einer Normalebene von (α) liegen, so ist $i=0$, also:

$$\mu \sin^2 i' + \nu \sin^2 i'' = \beta.$$

i' und i'' sind die Winkel, welche die Tangente der geodätischen Linie mit den Krümmungslinien $\mu = \text{const.}$ und $\nu = \text{const.}$ auf (α) bildet. Legt man aber durch die gemeinsamen Tangenten von (α) und (β) Normal-Ebenen an letztere Fläche, so ist ebenfalls $i=0$ und

$$\mu \sin^2 i' + \nu \sin^2 i'' = \alpha \tag{19}$$

die Gleichung der konjugirten geodätischen Linie auf (β). i' und i'' sind die Winkel, welche die konjugirte Tangente dieser Linie mit den Krümmungslinien $\mu = \text{const.}$ und $\nu = \text{const.}$ auf (β) bildet. Man vergleiche den ganz ähnlichen Beweis von Chasles für die Gleichung $\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$ der konjugirten geodätischen Linien auf den centrischen Flächen (Journal von Liouville. tome XI.). Wir ziehen auf (α) beliebig viele geodätische Linien, welche gehörig verlängert diejenige Krümmungslinie der Fläche tangiren, die ihr Durchschnitt mit (β) ist. Alle Tangenten einer solchen geodätischen Linie berühren (β) in einer konjugirten geodätischen Linie, die gehörig verlängert die genannte Krümmungslinie senkrecht trifft. Also haben alle konjugirten geodätischen Linien, für welche die Constante α in (19) denselben Werth hat, die Eigenschaft, dass sie auf Einer Krümmungslinie der Fläche senkrecht stehen. Aus (19) schliessen wir nun:

Zwei konjugirte geodätische Linien eines Paraboloids, welche auf Einer Krümmungslinie der Fläche

senkrecht stehen, bilden in ihrem Durchschnittspunkt mit einer zweiten Krümmungslinie gleiche Winkel.

In dem Parallelepiped, dessen Kanten ds', ds'', ds''' sind, und dessen Diagonale $= ds$ ist, soll letztere, gehörig verlängert, die homofokalen Paraboloide (α) und (β) berühren; die Winkel, welche ds mit ds', ds'', ds''' bildet, seien gleich i', i'', i'''; so haben wir nach (17) und (18):

$$\frac{\cos^2 i'}{\varrho-\alpha}+\frac{\cos^2 i''}{\mu-\alpha}+\frac{\cos^2 i'''}{\nu-\alpha}=0,$$

$$\frac{\cos^2 i'}{\varrho-\beta}+\frac{\cos^2 i''}{\mu-\beta}+\frac{\cos^2 i'''}{\nu-\beta}=0.$$

Durch Verbindung mit $\cos^2 i' + \cos^2 i'' + \cos^2 i''' = 1$ ergibt sich:

(20)

$$\cos^2 i' = \frac{(\varrho-\alpha)(\varrho-\beta)}{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)},\quad \cos^2 i'' = \frac{(\alpha-\mu)(\mu-\beta)}{(\varrho-\mu)(\mu-\nu)},\quad \cos^2 i''' = \frac{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)}{(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}.$$

Da nun die Projektion der drei Kanten ds', ds'', ds''' auf die Diagonale $ds = ds$ ist oder $ds = ds'.\cos i' + ds''.\cos i'' + ds'''.\cos i'''$, so finden wir, mit Benützung von (5), (6), (7):

$$(21)\quad ds = 2d\varrho\sqrt{\frac{(\varrho-\alpha)(\varrho-\beta)}{(p+2\varrho)(q+2\varrho)}} + 2d\mu\sqrt{\frac{(\mu-\alpha)(\mu-\beta)}{(p+2\mu)(q+2\mu)}} + 2d\nu\sqrt{\frac{(\nu-\alpha)(\nu-\beta)}{(p+2\nu)(q+2\nu)}}.$$

Diese Gleichung drückt das Element einer beliebigen Curve im Raume in elliptischen Coordinaten aus. Die Tangente im Punkte (ϱ, μ, ν) der Curve berührt die homofokalen Paraboloide (α) und (β), wobei natürlich die Parameter α und β im Allgemeinen nicht als konstant angenommen werden, sondern

$$\alpha = \varphi(\varrho, \mu, \nu) \quad \text{und} \quad \beta = \psi(\varrho, \mu, \nu)$$

zu setzen ist. φ und ψ sind Funktionen, die von der Natur der Curven abhängen. Liegt die Curve auf (ϱ), so wird $d\varrho = 0$ und $\varrho = \alpha$, also bezieht sich

$$(22)\quad ds = 2d\mu\sqrt{\frac{(\mu-\varrho)(\mu-\psi)}{(p+2\mu)(q+2\mu)}} + 2d\nu\sqrt{\frac{(\nu-\varrho)(\nu-\psi)}{(p+2\nu)(q+2\nu)}}$$

auf jede Linie des Paraboloids (ϱ). Bei den geodätischen Linien ist $\psi(\varrho, \mu, \nu) = \beta = \text{const.}$, mithin:

$$(23)\quad ds = 2d\mu\sqrt{\frac{(\mu-\varrho)(\mu-\beta)}{(p+2\mu)(q+2\mu)}} + 2d\nu\sqrt{\frac{(\nu-\varrho)(\nu-\beta)}{(p+2\nu)(q+2\nu)}}.$$

Bei den Krümmungslinien endlich ist entweder $\mu = \text{const.}$ oder $\nu = \text{const.}$, $\beta = \mu$, mithin:

$$(24)\quad ds = 2d\nu\sqrt{\frac{(\nu-\varrho)(\nu-\mu)}{(p+2\nu)(q+2\nu)}}.$$

Da in dem oben betrachteten Parallelepiped auch

$$ds = \frac{ds'}{\cos i'} = \frac{ds''}{\cos i''} = \frac{ds'''}{\cos i'''}$$

ist, so haben wir:

$$ds = 2d\varrho\frac{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{\Delta(\varrho)} = 2d\mu\frac{(\varrho-\mu)(\mu-\nu)}{\Delta(\mu)} = 2d\nu\frac{(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}{\Delta(\nu)},$$

$$\Delta(\varrho) = \sqrt{(p+2\varrho)(q+2\varrho)(\varrho-\alpha)(\varrho-\beta)},$$

$$\Delta(\mu) = -\sqrt{(p+2\mu)(q+2\mu)(\mu-\alpha)(\mu-\beta)},$$

$$\Delta(\nu) = \sqrt{(p+2\nu)(q+2\nu)(\nu-\alpha)(\nu-\beta)}.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich unmittelbar:

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varrho}{\Delta(\varrho)} + \dfrac{d\mu}{\Delta(\mu)} + \dfrac{d\nu}{\Delta(\nu)} = 0, \\ \dfrac{\varrho d\varrho}{\Delta(\varrho)} + \dfrac{\mu d\mu}{\Delta(\mu)} + \dfrac{\nu d\nu}{\Delta(\nu)} = 0, \\ \dfrac{\varrho^2 d\varrho}{\Delta(\varrho)} + \dfrac{\mu^2 d\mu}{\Delta(\mu)} + \dfrac{\nu^2 d\nu}{\Delta(\nu)} = \frac{1}{2}ds. \end{cases}$$

X.

Untersuchungen über einige Arten von Flächen.

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

Die Flächen, von deren Eigenschaften zunächst hier die Rede sein soll, sind in der Gleichung

$$\frac{x^n}{a}+\frac{y^n}{b}+\frac{z^n}{c}=1 \tag{1}$$

begriffen. Die Axen des Coordinatensystems sind zugleich die Axen der Flächen, deren Grösse gleich $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{c}$ ist. In der Gleichung (1) kann n eine beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl sein. Ebenso lassen sich die nachstehenden Formeln auch auf den Fall ausdehnen, wenn in der linken Seite der Gleichung der zweite, oder der zweite und dritte Summand negativ sind; man darf dann nur statt b oder b und c beziehungsweise $-b$ oder $-b$ und $-c$ setzen.

Die partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ nennen wir p und q, so ist:

$$p=-\frac{c}{a}\frac{x^{n-1}}{z^{n-1}},\quad q=-\frac{c}{b}\frac{y^{n-1}}{z^{n-1}}. \tag{2}$$

Wenn man hier $p=\text{const.}$ setzt, so ist auch $\frac{x}{z}=\text{const.}$ Nun ist p die Tangente des Winkels, welchen der Durchschnitt der Berührungsebene auf der xz-Ebene mit der x-Axe bildet. Alle

Berührungsebenen, für welche p konstant ist, hüllen einen Cylinder ein, der die Fläche (1) berührt und dessen Erzeugende parallel der xz-Ebene sind; die Berührungscurve hat also die Gleichung $\frac{x}{z} = \text{const.}$, mithin liegt sie in einer durch die y-Axe gehenden Ebene. Hierauf beruht der Satz:

Wenn man den Flächen (1) einen Berührungscylinder umschreibt, dessen Erzeugende parallel einer Hauptebene sind, so liegt die Berührungscurve in einer zu dieser Hauptebene senkrechten Ebene.

Wenn man in der Gleichung

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

x, y, z als konstant ansieht und x', y', z' als variabel, so stellt sie die Berührungsebene des Punktes (x, y, z) vor. Sind aber umgekehrt x', y', z' konstant und x, y, z variabel, so stellt die Gleichung den Berührungskegel der Fläche vor, dessen Spitze der Punkt (x', y', z') ist. Mit Benützung von (1) und (2) erhalten wir:

$$\frac{x^{n-1} \cdot x'}{a} + \frac{y^{n-1} \cdot y'}{b} + \frac{z^{n-1} \cdot z'}{c} = 1. \tag{3}$$

Diess ist die Gleichung der Fläche, auf welcher die Berührungscurve des Kegels liegt, der seine Spitze in (x', y', z') hat. Man kann diese Fläche die Polarfläche und die Spitze des Kegels den Pol nennen. Bewegt sich der Pol auf der Geraden

$$x' + \alpha z' = g, \quad y' + \beta z' = h; \tag{4}$$

so geht die Polarfläche durch die Curve

$$\frac{g}{a} x^{n-1} + \frac{h}{b} y^{n-1} = 1; \tag{5}$$

denn man findet durch Substitution der Werthe von g und h in (3):

$$\frac{g}{a} x^{n-1} + \frac{h}{b} y^{n-1} - 1 - \left(\frac{\alpha}{a} x^{n-1} + \frac{\beta}{b} y^{n-1} - \frac{1}{c} z^{n-1} \right) z' = 0.$$

Soll diese Gleichung von z' unabhängig sein, so muss die Relation (5) statt finden.

Die Curve (5) kann man die konjugirte Polare der Geraden (4) nennen. Da in (5) die Grössen α und β fehlen, so folgt daraus, dass allen Geraden (4), bei welchen g und h dieselben Werthe haben, oder die durch Einen Punkt der xy-Ebene gehen,

solche konjugirte Polaren entsprechen, die sich auf dieser Ebene in Einer Curve (5) projiciren, und also auf einem Cylinder liegen: oder:

Die konjugirten Polaren von allen Geraden, welche durch Einen Punkt in einer Hauptebene gehen, liegen auf einem Cylinder, dessen Erzeugende auf dieser Hauptebene senkrecht stehen.

Wir wollen annehmen, der Punkt $(x'y'z')$ bewege sich in der Ebene

$$\frac{x'}{\alpha}+\frac{y'}{\beta}+\frac{z'}{\gamma}=1, \tag{6}$$

so erhalten wir durch Elimination von x' aus (3) und (6):

$$\frac{x^{n-1}}{a}\alpha+\left(\frac{y^{n-1}}{b}-\frac{x^{n-1}}{a\beta}\alpha\right)y'+\left(\frac{z^{n-1}}{c}-\frac{x^{n-1}}{a\gamma}\alpha\right)z'=1.$$

Wenn diese Gleichung von y' und z' unabhängig sein soll, so muss sein:

$$x^{n-1}=\frac{a}{\alpha},\quad y^{n-1}=\frac{b}{\beta},\quad z^{n-1}=\frac{c}{\gamma}. \tag{7}$$

Bewegt sich der Pol in einer Ebene, so gehen die Polarflächen durch Einen Punkt.

Jedem Punkt entspricht also auf solche Art eine Ebene, die man seine Polarebene nennen kann.

Setzen wir in (6) $\alpha=$ const., so geht die Polarebene (6) durch Einen Punkt auf der x-Axe, und da in (7) x nun auch konstant ist, so bewegt sich der Pol in Einer zur x-Axe senkrechten Ebene:

Die Pole aller Ebenen, welche durch Einen Punkt einer Axe gehen, liegen in einer zu dieser Axe senkrechten Ebene. Ganz leicht folgt aus (6) und (7): Die Pole unter sich paralleler Polarebenen liegen auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden.

Betrachten wir in (3) x', y', z' als variabel, so bezieht sich diese Gleichung auf die Tangentialebene des Punkts (xyz). O sei der Ursprung oder Mittelpunkt der Fläche; die x-, y-, z-Axen werden von der Tangentialebene in den Punkten T, T', T'' getroffen, so haben wir aus (3):

$$OT=\frac{a}{x^{n-1}},\quad OT'=\frac{b}{y^{n-1}},\quad OT''=\frac{c}{z^{n-1}}. \tag{8}$$

Durch Vergleichung dieser Formeln mit (7) finden wir sogleich, dass $OT=\alpha$, $OT'=\beta$, $OT''=\gamma$ ist, wenn der Punkt (xyz) nicht auf der Fläche liegt. Nun folgt aus (6), dass α, β, γ die drei Abschnitte sind, welche die Polarebene des Punkts (xyz) auf den Axen bildet, mithin stellen die Gleichungen (8) allgemein die von einer beliebigen Ebene auf den Axen hervorgebrachten Abschnitte OT, OT', OT'' dar, ausgedrückt durch die Coordinaten x, y, z ihres Pols. Aus (8) folgt sogleich:

$$(9) \qquad \text{Tetraeder } OTT'T'' = \frac{abc}{3(xyz)^{n-1}}.$$

Setzt man hier $xyz=\text{const.}$, so ist auch der Inhalt dieses Tetraeders konstant:

Bewegt sich ein Punkt oder Pol auf der Fläche $xyz=\text{const.}$, so ist der Inhalt des von seiner Polarebene hinsichtlich der Flächen (1) von den drei Axen abgeschnittenen Tetraeders constant. Diese Polarebene tangirt also ebenfalls eine Fläche $xyz=\text{const.}$ Wir können leicht auf die Ebene übergehen, indem wir z. B. $z=0$ setzen; dann haben wir den Satz:

Bewegt sich ein Punkt auf einer gleichseitigen Hyperbel $xy=\text{const.}$, so ist der Inhalt des von seiner Polare hinsichtlich der Curve $\frac{x^n}{a}+\frac{y^n}{b}=1$ von den Axen abgeschnittenen Dreiecks constant; diese Polare tangirt also selbst wieder eine gleichseitige Hyperbel.

Ein spezieller Fall der Gleichung (9) ist:

Wenn sich ein Punkt auf dem Durchschnitt der Flächen (1) mit der Fläche $xyz=\text{const.}$ bewegt, so ist der Inhalt des von seiner Tangentialebene auf den Axen abgeschnittenen Tetraeders constant.

Wir bezeichnen das vom Ursprung auf die Ebene $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$ herabgelassene Perpendikel mit P, so ist

$$P=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

Die Gleichung (3) gibt also:

$$(10)\qquad P=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^{n-1}}{a}\right)^2+\left(\frac{y^{n-1}}{b}\right)^2+\left(\frac{z^{n-1}}{c}\right)^2}}.$$

Wenn der Punkt (xyz) nicht auf der Fläche (1) liegt, so ist P das vom Ursprung auf seine Polarebene gefällte Perpendikel; liegt der Punkt auf (1), so ist P das vom Ursprunge auf seine Tangentialebene gefällte Perpendikel. Setzt man in (10):

$$\left(\frac{x^{n-1}}{a}\right)^2+\left(\frac{y^{n-1}}{b}\right)^2+\left(\frac{z^{n-1}}{c}\right)^2=\text{const.},$$

so ist auch P constant, d. h.:

Bewegt sich ein Punkt oder Pol auf der Fläche $\frac{x^{2n-2}}{a^2}+\frac{y^{2n-2}}{b^2}+\frac{z^{2n-2}}{c^2}=\text{const.}$, so berührt seine Polarebene hinsichtlich der Fläche (1) eine Kugel. Bewegt er sich aber auf dem Durchschnitte beider Flächen, so berührt seine Tangentialebene eine Kugel.

Diese Durchschnittslinie kann man nach Analogie der Flächen zweiten Grades Poloide nennen; die Gleichungen dieser Curve sind also:

$$(11)\qquad \frac{x^n}{a}+\frac{y^n}{b}+\frac{z^n}{c}=1,\quad \frac{x^{2n-2}}{a^2}+\frac{y^{2n-2}}{b^2}+\frac{z^{2n-2}}{c^2}=\text{const.}$$

Aus (9) und (10) erhält man sogleich:

$$(12)\qquad \text{Dreieck } TT'T''=\frac{abc}{(xyz)^{n-1}P}.$$

Wir wollen annehmen, der Punkt $M(xyz)$ liege auf der Fläche (1) und seine Tangentialebene schneide die Axen in T, T', T''; man ziehe die Geraden MT, MT', MT'', so haben wir folgende Gleichungen:

$$(13)\qquad \begin{cases} \text{Dreieck } MTT'=OT\,.\,OT'\cdot\frac{z}{P}=\frac{abz}{(xy)^{n-1}P}, \\ \quad\text{„}\quad MTT''=OT\,.\,OT''\cdot\frac{y}{P}=\frac{acy}{(xz)^{n-1}P}, \\ \quad\text{„}\quad MT'T''=OT'\,.\,OT''\cdot\frac{x}{P}=\frac{bcx}{(yz)^{n-1}P}. \end{cases}$$

Wenn Op das von O auf die Ebene $TT'T''$ gefällte Perpendikel ist, so haben wir ferner:

$$(14)\quad \begin{cases} \text{Dreieck } \mathfrak{p}TT' = \dfrac{OT.OT'}{OT''}.P = \dfrac{ab}{c}P\left(\dfrac{z}{xy}\right)^{n-1}, \\ \quad\text{„}\quad \mathfrak{p}TT'' = \dfrac{OT.OT''}{OT'}.P = \dfrac{ac}{b}P\left(\dfrac{y}{xz}\right)^{n-1}, \\ \quad\text{„}\quad \mathfrak{p}T'T'' = \dfrac{OT'.OT''}{OT}.P = \dfrac{bc}{a}P\left(\dfrac{x}{yz}\right)^{n-1}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Normale:

$$x'-x+p(z'-z)=0,\quad y'-y+q(z'-z)=0$$

werden für den Punkt M der Fläche (1):

(15)

$$x'-\frac{c}{a}\left(\frac{x}{z}\right)^{n-1}z'=x-\frac{c}{a}\left(\frac{x}{z}\right)^{n-1}z,\quad y'-\frac{b}{a}\left(\frac{y}{z}\right)^{n-1}z'=y-\frac{b}{a}\left(\frac{y}{z}\right)^{n-1}z.$$

Die Normale von M schneide die xy-, xz-, yz-Ebenen in den Punkten N, N', N'', so ist:

$$(16)\quad MN=\frac{c}{z^{n-2}.P},\quad MN'=\frac{b}{y^{n-2}.P},\quad MN''=\frac{a}{x^{n-2}.P}.$$

$$(17)\quad MN.MN'.MN''=\frac{abc}{(xyz)^{n-2}.P^3}.$$

Aus (13) erhalten wir:

$$(18)\quad \Delta MT'T'.\Delta MT'T''.\Delta MT'T''=\frac{a^2b^2c^2}{(xyz)^{2n-3}.P^3},$$

aus (14):

$$(19)\quad \Delta\mathfrak{p}TT'.\Delta\mathfrak{p}TT''.\Delta\mathfrak{p}T'T''=\frac{abc}{(xyz)^{n-1}}P^3,$$

$$(20)\quad \frac{x^2}{MN''}+\frac{y^2}{MN'}+\frac{z^2}{MN}=P.$$

Wir bezeichnen die partiellen Differenzialquotienten $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ mit r, s, t und erhalten aus (2):

$$(21)\quad r=-(n-1)\frac{c^2}{ab}\frac{x^{n-2}}{z^{2n-1}}(b-y^n),\quad s=-(n-1)\frac{c^2}{ab}\frac{(xy)^{n-1}}{z^{2n-1}},$$

$$t=-(n-1)\frac{c^2}{ab}\frac{y^{n-2}}{z^{2n-1}}(a-x^n).$$

$$k=\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{c}{z^{n-1}.P}, \tag{22}$$

$$g=rt-s^2=(n-1)^2\frac{c^3}{ab}\frac{(xy)^{n-2}}{z^{3n-4}}, \tag{23}$$

$$h=(1+q^2)r+(1+p^2)t-2pqs \tag{24}$$

$$=-(n-1)\frac{c^2}{ab}\frac{(xy)^{n-2}}{z^{2n-1}}\left(\frac{a}{x^{n-2}}+\frac{b}{y^{n-2}}+\frac{c}{z^{n-2}}-x^2-y^2-z^2\right).$$

Die beiden Hauptkrümmungs-Halbmesser im Punkte (xyz) der Fläche (1) sind R und R';

$$\frac{1}{R.R'}=\frac{g}{k^4}=\frac{(n-1)^2}{abc}(xyz)^{n-2}.P^4, \tag{25}$$

(26)

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{h}{k^3}=-\frac{n-1}{abc}(xyz)^{n-2}P^3\left(\frac{a}{x^{n-2}}+\frac{b}{y^{n-2}}+\frac{c}{z^{n-2}}-x^2-y^2-z^2\right),$$

(27)

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{2}\frac{n-1}{abc}(xyz)^{n-2}P^3\left\{-\frac{a}{x^{n-2}}-\frac{b}{y^{n-2}}-\frac{c}{z^{n-2}}+x^2+y^2+z^2\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{\left(\frac{a}{x^{n-2}}+\frac{b}{y^{n-2}}+\frac{c}{z^{n-2}}-x^2-y^2-z^2\right)^2-\frac{4abc}{(xyz)^{n-2}P^2}}\right\}.$$

Die allgemeine Differenzialgleichung der Krümmungslinien ist:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\{(1+q^2)s-pqt\}+\frac{dy}{dx}\{(1+q^2)r-(1+p^2)t\}-(1+p^2)s+pqr=0,$$

$$(1+q^2)s-pqt=(n-1)\frac{c^3}{ab}\frac{(xy)^{n-1}}{z^{3n-3}}\left(\frac{y^{n-2}}{b}-\frac{z^{n-2}}{c}\right),$$

$$(1+q^2)r-(1+p^2)t=(n-1)\frac{c^2}{abz^{2n-1}}\{ay^{n-2}-bx^{n-2}$$
$$\left.+y^n\left(x^{n-2}-\frac{c}{b}\left(\frac{xy}{z}\right)^{n-2}\right)-x^n\left(y^{n-2}-\frac{c}{a}\left(\frac{xy}{z}\right)^{n-2}\right)\right\},$$

$$-(1+p^2)s+pqr=-(n-1)\frac{c^3}{ab}\frac{(xy)^{n-1}}{z^{3n-3}}\left(\frac{x^{n-2}}{a}-\frac{z^{n-2}}{b}\right).$$

Die Gleichung der Krümmungslinien der Fläche (1) ist also:

(28)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (xy)^{n-1}\left(\frac{y^{n-2}}{b}-\frac{z^{n-2}}{c}\right)$$
$$+\frac{dy}{dx}\left\{\frac{ab}{c}z^{n-2}\left(\frac{y^{n-2}}{b}-\frac{x^{n-2}}{a}\right)+\frac{1}{c}(xyz)^{n-2}(y^2-x^2)+(xy)^{n-2}\left(\frac{x^n}{a}-\frac{y^n}{b}\right)\right\}$$
$$-(xy)^{n-1}\left(\frac{x^{n-2}}{a}-\frac{z^{n-2}}{c}\right)=0.$$

Für $n=2$ erhält man hieraus:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 xy\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\frac{dy}{dx}\left\{\frac{a-b}{c}+x^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)-y^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\right\}$$
$$-xy\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)=0;$$

hier verschwindet also z, wesswegen diese Gleichung leicht integrabel ist. Bei jedem anderen Werthe von n ist diess dagegen nicht der Fall. Z. B. für $n=3$ verwandelt sich (28) in

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x^2y^2\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)+\frac{dy}{dx}\left\{\frac{ab}{c}z\left(\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right)+\frac{xyz}{c}(y^2-x^2)\right.$$
$$\left.+xy\left(\frac{x^3}{a}-\frac{y^3}{b}\right)\right\}-x^2y^2\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0;$$

hier hätte man den Werth von z aus (1), nämlich

$$z=\sqrt[3]{c\left(1-\frac{x^3}{a}-\frac{y^3}{b}\right)}$$

einzusetzen und dann zu integriren, was wohl mit den bisherigen Mitteln unausführbar ist. (Man vergleiche die Preisaufgabe der Berliner Akademie für das Jahr 1861 im Literar. Ber. Nr. CXXII. S. 1.)

Die Gleichung der geodätischen und Krümmungs-Linien auf allen Flächen ist diese:

(29)
$$\frac{dXd^2x+dYd^2y+dZd^2z}{dXdx+dYdy+dZdz}$$
$$+\frac{Xdx+Ydy+Zdz}{X^2+Y^2+Z^2}-\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dx^2+dy^2+dz^2}=0.$$

Aus $\frac{x^n}{a}+\frac{y^n}{b}+\frac{z^n}{c}=1$ finden wir:

$$X=n\frac{x^{n-1}}{a},\quad Y=n\frac{y^{n-1}}{b},\quad Z=n\frac{z^{n-1}}{c};$$

$$dX=\frac{n(n-1)}{a}x^{n-2}dx,\quad dY=\frac{n(n-1)}{b}y^{n-2}dy,\quad dZ=\frac{n(n-1)}{c}z^{n-2}dz;$$

setzen wir diese Werthe in (29) ein und integriren, so erhalten wir:

$$(30)\quad \log\frac{nP}{ds}=n(n-1)\int\frac{\frac{x^{n-2}}{a}dxd^2x+\frac{y^{n-2}}{b}dyd^2y+\frac{z^{n-2}}{c}dzd^2z}{\frac{x^{n-2}}{a}dx^2+\frac{y^{n-2}}{b}dy^2+\frac{z^{n-2}}{c}dz^2}.$$

ds ist ein Element der geodätischen (Krümmungs)linie und P das vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene im Punkte (xyz) gefällte Perpendikel.

Ich hoffe, später auf diesen Gegenstand zurückzukommen.

XI.

Ueber die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid.

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

Man ziehe durch einen Punkt der Ellipse, in welcher ein Ellipsoid von dem umschriebenen Drehungscylinder berührt wird, die beiden Krümmungslinien, welche die zwei durch die mittlere Axe gehenden Hauptschnitte in zwei Punkten treffen, so ist die Differenz der von einem Nabelpunkt nach diesen Schnittpunkten gehenden geodätischen Linien eine algebraische Grösse, nämlich gleich dem Produkt der grossen Halbaxen von den durch die Krümmungslinien gehenden homofokalen Hyperboloiden dividirt durch die grosse Halbaxe des Ellipsoids.

S (Taf. II. Fig. 1.) sei der Punkt auf dem Ellipsoid, durch den die beiden Krümmungslinien gehen, welche die durch die mittlere Axe gelegten Hauptschnitte in F und G schneiden; N ist der Nabelpunkt des Ellipsoids, so ist:

$$NG - NF = \frac{\mu\nu}{\varrho}.$$

$\varrho = OA$ und μ und ν sind die Halbaxen der homofokalen Hyperboloide, welche durch die Krümmungslinien GSM' und FSM gehen. Um diess zu beweisen, nehmen wir an, S sei ein beliebiger Punkt des Ellipsoids und N' ein zweiter Nabelpunkt. Da nun die Summe der von N und N' nach irgend einem Punkte auf der Krümmungslinie $M'G$ gezogenen geodätischen Linien konstant und gleich $2CM'$ ist, während die Differenz der von N und N' nach einem Punkte der Krümmungslinie MF gezogenen geodätischen Linien ebenfalls konstant, und zwar gleich $2CM$ ist, so haben wir:

$$NS + N'S = 2CM',$$
$$N'S - NS = 2CM;$$

also

$$NS = CM' - CM = MM'.$$

Diese Gleichung gilt für jede Lage von S, also auch für die Punkte G und F; wir haben somit:

$$NG = CM', \quad NF = AM, \quad NG - NF = CM' - AM = CM - AM'.$$

Wir haben also auf dem Quadranten der durch die grosse und kleine Axe gehenden Ellipse ANC Punktenpaare M und M' zu bestimmen, welche ihn in drei Theile theilen, wovon die Differenz der äusseren eine algebraische Grösse ist. In einem früheren Aufsatze des Archivs. Thl. XXX. S. 436. (Ueber eine Eigenschaft der Ellipse) habe ich verschiedene Merkmale dieser Punkte angegeben, wovon das bemerkenswertheste ist, dass die Differenz dieser Bögen gleich dem Abstande des Mittelpunkts von der Normale eines solchen Punktes ist. x und x' sind die Abscissen von M und M', ferner ist $k^2 = \frac{AO^2 - OC^2}{AO^2}$; nun haben wir:

$$CM - AM' = k^2 x \sqrt{\frac{\varrho^2 - x^2}{\varrho^2 - k^2 x^2}} = k^2 x' \sqrt{\frac{\varrho^2 - x'^2}{\varrho^2 - k^2 x'^2}}.$$

Aus den Gleichungen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$$

und der homofokalen Hyperboloide:

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1, \quad \frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1$$

findet man:

$$x=\frac{\varrho\mu\nu}{bc}.$$

Für die Punkte M und M' ist sonach:

$$x=\varrho\frac{\nu}{c}, \quad x'=\varrho\frac{\mu}{c};$$

setzen wir diese Werthe und $k^2=\frac{c^2}{\varrho^2}$ in den Ausdruck für $CM-AM'$ ein, so erhalten wir:

$$CM-AM'=\nu\sqrt{\frac{c^2-\nu^2}{\varrho^2-\nu^2}}=\mu\sqrt{\frac{c^2-\mu^2}{\varrho^2-\mu^2}};$$

hieraus findet man ferner:

$$CM-AM'=\frac{\mu\nu}{\varrho},$$

und ferner:

$$\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}=\varrho\sqrt{\varrho^2-c^2}.$$

Es sei P das von O auf die Tangentialebene von S gefällte Perpendikel, so ist:

$$P=\frac{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}=\sqrt{\varrho^2-b^2}.$$

Mithin liegt S auf dem Drehungscylinder, welcher sich dem Ellipsoid umschreiben lässt.

XII.

Ueber die Fläche des sphärischen Vierecks.

Von

Herrn Director Professor Dr. *Strehlke*

zu Danzig.

Der Aufsatz des Herrn Professor König über das sphärische Viereck im ersten Hefte des 34. Theils dieses Archivs *) brachte mir einige Resultate über denselben Gegenstand in Erinnerung, die ich schon vor 16 Jahren gefunden habe und jetzt erweitert hier vorlegen will.

Bezeichnet man in dem sphärischen Viereck die auf einander folgenden Seiten mit a, b, c, d, die Winkel zwischen a und b mit B, b und c mit C, c und d mit D, d und a mit A und setzt zur Abkürzung:

$$\alpha = \cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}, \quad \alpha' = \cos\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{d}{2}, \quad \text{die Diagonale } AC = e,$$

$$\beta = \sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}, \quad \beta' = \sin\frac{c}{2}\cdot\sin\frac{d}{2};$$

die Fläche des sphärischen Dreiecks $ABC = f$, Fläche des Dreiecks $ACD = f'$, die Fläche des sphärischen Vierecks $ABCD = f + f' = F$; so ist bekanntlich:

$$\cos\frac{f}{2} = \frac{\alpha + \beta\cos B}{\cos\frac{e}{2}}, \quad \cos\frac{f'}{2} = \frac{\alpha' + \beta'\cos D}{\cos\frac{e}{2}};$$

$$\sin\frac{f}{2} = \frac{\beta\sin B}{\cos\frac{e}{2}}, \qquad \sin\frac{f'}{2} = \frac{\beta'\sin D}{\cos\frac{e}{2}}.$$

*) Der in Thl. XXXIV. Heft III. Nr. XXIII. S. 355. abgedruckte Nachtrag konnte Herrn Professor Strehlke bei Abfassung vorliegenden Aufsatzes nicht bekannt sein. G.

Da aber allgemein:

$$\frac{(1-\frac{\cos\frac{1}{2}f}{\cos\frac{1}{2}f'})(1+\frac{\sin\frac{1}{2}f'}{\sin\frac{1}{2}f})}{(1+\frac{\cos\frac{1}{2}f}{\cos\frac{1}{2}f'})(1-\frac{\sin\frac{1}{2}f'}{\sin\frac{1}{2}f})}=\tang\tfrac{1}{4}(f+f')^2=\tang\tfrac{1}{4}F^2,$$

so erhält man für die Fläche des sphärischen Vierecks, wenn man für $\cos\frac{f}{2}$, $\sin\frac{f}{2}$, $\cos\frac{f'}{2}$, $\sin\frac{f'}{2}$ ihre Werthe setzt:

$$\tang\tfrac{1}{4}F^2=\frac{(\alpha'-\alpha+\beta'\cos D-\beta\cos B)(\beta\sin B+\beta'\sin D)}{(\alpha'+\alpha+\beta'\cos D+\beta\cos B)(\beta\sin B-\beta'\sin D)}.$$

Wenn das sphärische Viereck in einen kleineren Kreis der Kugel beschrieben ist, so wird:

$$\tang\tfrac{1}{4}F^2=\frac{(\beta+\beta')^2-(\alpha'-\alpha)^2}{(\alpha'+\alpha)^2-(\beta+\beta')^2}.$$

Dieser Ausdruck in Factoren zerlegt giebt den Lexellschen *). Auch folgt daraus:

$$\cos\tfrac{1}{2}F=\frac{\alpha'^2+\alpha^2-(\beta+\beta')^2}{2\alpha\alpha'}=\tfrac{1}{4}\frac{(\cos a+\cos b+\cos c+\cos d)}{\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}.\cos\frac{d}{2}}$$

$$-\tang\frac{a}{2}.\tang\frac{b}{2}.\tang\frac{c}{2}.\tang\frac{d}{2}.$$

Um aus dem oben gegebenen Ausdrucke für $\tang\frac{1}{4}F^2$ auf diesen besonderen zu gelangen, ist die Kenntniss der Sinus und Cosinus von B als Functionen der Seiten a, b, c, d nöthig. Man gelangt dazu auf folgende Weise.

In dem sphärischen Dreiecke ABC ist

$$\cos B=\frac{(1-2\sin\frac{1}{2}e^2)-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}.$$

Soll e Diagonale eines Kreisvierecks sein, so ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}e^2=\frac{(\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2})(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2})}{\beta+\beta'},$$

folglich:

---

*) Klügel's Wörterbuch von Grunert Thl. 5. Abth. 2. S. 879.

$$(\beta+\beta')\cos B\sin a\sin b$$

$$=(\beta+\beta')(1-\cos a\cos b)-2(\beta'(\sin\frac{a^2}{2}+\sin\frac{b^2}{2})+\beta(\sin\frac{c^2}{2}+\sin\frac{d^2}{2})).$$

Da aber

$$\sin\frac{a^2}{2}+\sin\frac{b^2}{2}=1-\alpha^2+\beta^2,$$

$$\sin\frac{c^2}{2}+\sin\frac{d^2}{2}=1-\alpha'^2+\beta'^2,$$

$$1-\cos a\cos b=2(1-\alpha^2-\beta^2),$$

$$\sin a\sin b=4\alpha\beta;$$

so ist:

$$4\cos B.(\beta+\beta')\alpha\beta=2(\beta+\beta')(1-\alpha^2-\beta^2)-2(\beta'(1-\alpha^2+\beta^2)+\beta(1-\alpha'^2+\beta'^2)),$$

$$(\beta+\beta').2\cos B.\alpha.\beta=\beta(\alpha'^2-\alpha^2-(\beta+\beta')^2),$$

$$\cos B=\frac{\alpha'^2-\alpha^2-(\beta+\beta')^2}{2\alpha(\beta+\beta')}.$$

Durch Vertauschung von a und b mit c und d erhält man:

$$\cos D=\frac{\alpha^2-\alpha'^2-(\beta+\beta')^2}{2\alpha'(\beta+\beta')}.$$

Werden diese Ausdrücke von $\cos B$ und $\cos D$ zu 1 addirt und von 1 subtrahirt, so hat man, wenn noch zur Abkürzung $\beta+\beta'=p$ gesetzt wird:

$$1+\cos B=\frac{\alpha'^2-(p-\alpha)^2}{2\alpha p},$$

$$1-\cos B=\frac{(p+\alpha)^2-\alpha'^2}{2\alpha p},$$

$$1+\cos D=\frac{\alpha^2-(p-\alpha')^2}{2\alpha' p},$$

$$1-\cos D=\frac{(p+\alpha')^2-\alpha^2}{2\alpha' p}.$$

Führt man die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\frac{a+b+c+d}{2}=s,$$

$$\frac{a+b+c+d}{2}-d=s';$$

so gelangt man zu den Ausdrücken:

$$\cos\tfrac{1}{2}B^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-c)\sin\frac{1}{2}(s-d)\cos\frac{s}{2}\cos\frac{1}{2}(s'-c)}{(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}+\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2})\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s'-a)\cos\frac{1}{2}(s'-b)}{(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}+\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2})\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}D^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{s}{2}\cos\frac{1}{2}(s'-c)}{(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}+\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2})\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2})},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}D^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-c)\sin\frac{1}{2}(s-d)\cos\frac{1}{2}(s'-a)\cos\frac{1}{2}(s'-b)}{(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}+\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2})\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-d)\cos\frac{s}{2}\cos\frac{1}{2}(s'-a)}{(\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2})\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)\cos\frac{1}{2}(s'-b)\cos\frac{1}{2}(s'-c)}{(\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2})\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)\cos\frac{1}{2}(s'-a)\cos\frac{s}{2}}{(\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2})\cos\frac{a}{2}\cos\frac{d}{2}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-d)\cos\frac{1}{2}(s'-b)\cos\frac{1}{2}(s'-c)}{(\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2})\cos\frac{a}{2}\cos\frac{d}{2}};$$

$$\tan\tfrac{1}{2}B^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s'-a)\cos\frac{1}{2}(s'-b)}{\sin\frac{1}{2}(s-c)\sin\frac{1}{2}(s-d)\cos\frac{s}{2}\cos\frac{1}{2}(s'-c)},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}D^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-c)\sin\frac{1}{2}(s-d)\cos\frac{1}{2}(s'-a)\cos\frac{1}{2}(s'-b)}{\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{s}{2}\cos\frac{1}{2}(s'-c)},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)\cos\frac{1}{2}(s'-b)\cos\frac{1}{2}(s'-c)}{\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-d)\cos\frac{s}{2}\cos\frac{1}{2}(s'-a)},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-d)\cos\frac{1}{2}(s'-b)\cos\frac{1}{2}(s'-c)}{\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)\cos\frac{s}{2}\cos\frac{1}{2}(s'-a)}.$$

Unter mehreren von Lexell angeführten Relationen *) wird aus den eben erhaltenen Ausdrücken leicht die nachstehende abgeleitet:

$$\tang\frac{A}{2}.\tang\frac{B}{2}.\tang\frac{C}{2}.\tang\frac{D}{2}=\frac{\cos\frac{1}{4}(a+c-b-d)^2}{\cos\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2}.$$

Bei der Vergleichung des Products von $\cos\frac{1}{2}B$ und $\sin\frac{1}{2}B$ und des Products von $\cos\frac{1}{2}D$ und $\sin\frac{1}{2}D$ sieht man sogleich, dass $\sin B$ und $\sin D$ einen gemeinschaftlichen Factor haben, so dass der Bruch

$$\frac{\beta\sin B+\beta'\sin D}{\beta\sin B-\beta'\sin D},$$

der in dem Ausdrucke für die Fläche des allgemeinen sphärischen Vierecks vorkommt, für das sphärische Kreisviereck sich auf

$$\frac{\alpha'\beta+\beta'\alpha}{\alpha'\beta-\beta'\alpha}$$

reducirt. Der Bruch

$$\frac{(\alpha'-\alpha)+\beta'\cos D-\beta\cos B}{(\alpha'+\alpha)+\beta'\cos D+\beta\cos B}$$

in dem Ausdrucke für das sphärische Viereck reducirt sich, wenn man für $\cos B$ und $\cos D$ die oben gegebenen Werthe

$$\frac{\alpha'^2-\alpha^2-p^2}{2\alpha p} \text{ und } \frac{\alpha^2-\alpha'^2-p^2}{2\alpha' p}$$

setzt, auf den Bruch

$$\frac{(p^2-(\alpha'-\alpha)^2)\,(\alpha'\beta-\beta'\alpha)}{((\alpha'+\alpha)^2-p^2)\,(\alpha'\beta+\beta'\alpha)},$$

so dass

$$\tang\tfrac{1}{4}F^2=\frac{p^2-(\alpha'-\alpha)^2}{(\alpha'+\alpha)^2-p^2}=\frac{(\beta+\beta')^2-(\alpha'-\alpha)^2}{(\alpha'+\alpha)^2-(\beta+\beta')^2}$$

wird. Zerlegt man diesen Ausdruck in Factoren und setzt für α und α', β und β' ihre Werthe $\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}$, $\cos\frac{c}{2}.\cos\frac{d}{2}$, $\sin\frac{a}{2}.\sin\frac{b}{2}$ und $\sin\frac{c}{2}.\sin\frac{d}{2}$, so nimmt $\tang\frac{1}{4}F^2$ diese Form an:

$$\tang\tfrac{1}{4}F^2=\frac{(\cos\frac{1}{2}(c-d)-\cos\frac{1}{2}(a+b))(\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}(c+d))}{(\cos\frac{1}{2}(c-d)+\cos\frac{1}{2}(a-b))(\cos\frac{1}{2}(c+d)+\cos\frac{1}{2}(a+b))}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b-c+d)\sin\frac{1}{4}(a+b+c-d)\sin\frac{1}{4}(c+d-a+b)\sin\frac{1}{4}(a-b+c+d)}{\cos\frac{1}{4}(a-b+c-d)\cos\frac{1}{4}(a-b-c+d)\cos\frac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\frac{1}{4}(a+b-c-d)}.$$

*) Act. Petrop. 1782. P. I. pag. 89.

Setzt man wieder $\frac{a+b+c+d}{2}=s$, $s-d=s'$, so erhalten wir:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}F^2=\frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)\sin\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{1}{2}(s'-a)\cos\frac{1}{2}(s'-b)\cos\frac{1}{2}(s'-c)\cos\frac{1}{2}s}.$$

Zu diesem Ausdrucke von $\operatorname{tang}\frac{1}{4}F^2$ gelangt man noch auf einem anderen Wege. Setzt man:

$$P=\sin\frac{a}{2}.\sin\frac{b}{2}.\sin\frac{c}{2}.\sin\frac{d}{2},$$

$$Q=\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}.\cos\frac{d}{2},$$

$$R=\cos a+\cos b+\cos c+\cos d;$$

so finden folgende, für jeden Werth von a, b, c, d geltende allgemeine Gleichungen statt:

(1)

$$\sin\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\sin\tfrac{1}{4}(a+c+d-b)\sin\tfrac{1}{4}(a+b+d-c)\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)$$
$$=\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{4}Q-\tfrac{1}{8}R,$$

(2)

$$\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(c+d-a-b)\sin\tfrac{1}{4}(a+c-b-d)\sin\tfrac{1}{4}(b+c-a-d)$$
$$=\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{4}Q+\tfrac{1}{8}R,$$

(3)

$$\cos\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\cos\tfrac{1}{4}(a+c+d-b)\cos\tfrac{1}{4}(a+b+d-c)\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)$$
$$=\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{4}Q+\tfrac{1}{8}R,$$

(4)

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(c+d-a-b)\cos\tfrac{1}{4}(a+c-b-d)\cos\tfrac{1}{4}(b+c-a-d)$$
$$=-\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{4}Q+\tfrac{1}{8}R.$$

Nun hat man in dem allgemeinen sphärischen Vierecke für die Diagonale e:

$$\cos e=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b.\cos B,$$
$$\cos e=\cos c.\cos d+\sin c.\sin d.\cos D.$$

Durch geeignete Addition und Subtraction von $\sin a.\sin b$ und $\sin c.\sin d$ in Bezug auf die Gleichung

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos B=\cos c\cos d+\sin c\sin d\cos D$$

erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+c+d-b)\sin\tfrac{1}{2}(b+c+d-a)=\sin c.\sin d.\cos\tfrac{1}{2}D^2+\sin a.\sin b.\sin\tfrac{1}{2}B^2,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b+d-c)\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c-d)=\sin c.\sin d.\sin\tfrac{1}{2}D^2+\sin a.\sin b.\cos\tfrac{1}{2}B^2,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)\sin\tfrac{1}{2}(c+d-a-b)=\sin c.\sin d.\cos\tfrac{1}{2}D^2-\sin a.\sin b.\cos\tfrac{1}{2}B^2,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b-d)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a-d)=-\sin c.\sin d.\sin\tfrac{1}{2}D^2+\sin a.\sin b.\sin\tfrac{1}{2}B^2.$$

Die Multiplication der beiden ersten Gleichungen ergiebt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(b+c+d-a)\sin\tfrac{1}{2}(a+c+d-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b+d-c)\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c-d)$$
$$=(\tfrac{1}{2}\sin a.\sin b.\sin B\pm\tfrac{1}{2}\sin c.\sin d.\sin D)^2$$
$$+\sin a.\sin b.\sin c.\sin d.\cos\tfrac{1}{2}(B\pm D)^2;$$

die Multiplication der dritten und vierten Gleichung:

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)\sin\tfrac{1}{2}(c+d-a-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b-d).\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a-d)$$
$$=-(\tfrac{1}{2}\sin a.\sin b.\sin B\pm\tfrac{1}{2}\sin c.\sin d.\sin D)^2$$
$$+\sin a.\sin b.\sin c.\sin d.\sin\tfrac{1}{2}(B\pm D)^2.$$

In dem speziellen, einem kleineren Kreise der Sphäre einbeschriebenen Vierecke ist aber

$$-\cos\tfrac{1}{2}(B+D)=\sin\tfrac{1}{4}F,\ ^*)\quad \sin\tfrac{1}{2}(B+D)=\cos\tfrac{1}{4}F;$$

folglich, wenn s und s' wieder mit derselben Bedeutung eingeführt werden, so ist:

$$\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\sin(s-d)$$
$$=(\tfrac{1}{2}\sin a\sin b\sin B+\tfrac{1}{2}\sin c.\sin d\sin D)^2+\sin a\sin b\sin c\sin d.\sin\tfrac{1}{4}F^2,$$

$$\sin s\sin(s'-a)\sin(s'-b)\sin(s'-c)$$
$$=(\tfrac{1}{2}\sin a\sin b\sin B+\tfrac{1}{2}\sin c\sin d\sin D)^2-\sin a\sin b\sin c\sin d\cos\tfrac{1}{4}F^2.$$

Die vier allgemeinen Gleichungen (1), (2), (3), (4) können durch Einführung von s und s' auf folgende Form gebracht werden:

$$\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\sin\tfrac{1}{2}(s-c)\sin(s-d)=\ \tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{8}R=M,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}(s'-a)\sin\tfrac{1}{2}(s'-b)\sin\tfrac{1}{2}(s'-c)\ =-\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{8}R=N,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(s-a)\cos\tfrac{1}{2}(s-b)\cos\tfrac{1}{2}(s-c)\cos\tfrac{1}{2}(s-d)=\ \tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{8}R=T,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}(s'-a)\cos\tfrac{1}{2}(s'-b)\cos\tfrac{1}{2}(s'-c)=-\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{2}Q+\tfrac{1}{8}R=U.$$

---

*) Denn, dass $B+D=A+C$, wird leicht durch die vier Radien des umschriebenen Kreises bewiesen, welche Projectionen von vier gleichen sphärischen Bogen sind.

Da

$$\sin B = \frac{2K}{(\beta+\beta')\alpha}, \quad \sin D = \frac{2K}{(\beta+\beta')\alpha'}, \quad \text{wo } K^2 = M.U;$$

so ist:

$$\tfrac{1}{2}\sin a \sin b \sin B + \tfrac{1}{2}\sin c \sin d \sin D = \frac{4K.\alpha\beta}{(\beta+\beta')\alpha} + \frac{4K\alpha'\beta'}{(\beta+\beta')\alpha'} = 4K$$

für das sphärische Kreisviereck, und da noch

$$\sin a.\sin b.\sin c.\sin d = 16\alpha.\beta.\alpha'.\beta',$$

so erhält man:

$$16\alpha.\beta.\alpha'.\beta' \sin\tfrac{1}{4}F^2 = 16MT - 16K^2 = 16M(T-U)$$
$$= 16MP = 16M.\beta.\beta'$$

und

$$\sin\tfrac{1}{4}F^2 = \frac{M}{\alpha\alpha'} = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-a).\sin\frac{1}{2}(s-b).\sin\frac{1}{2}(s-c).\sin\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}.\cos\frac{d}{2}}.$$

Ebenso ist:

$$\alpha.\beta.\alpha'.\beta' \cos\tfrac{1}{4}F^2 = U(M-N) = UP = U.\beta.\beta';$$

folglich:

$$\cos\tfrac{1}{4}F^2 = \frac{U}{\alpha\alpha'} = \frac{\cos\frac{s}{2}.\cos\frac{1}{2}(s'-a).\cos\frac{1}{2}(s'-b).\cos\frac{1}{2}(s'-c)}{\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}.\cos\frac{d}{2}},$$

woraus

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}F^2 = \frac{M}{U}.$$

Da $\cos\frac{1}{2}F = \cos\frac{1}{4}F^2 - \sin\frac{1}{4}F^2$, so ist:

$$\cos\tfrac{1}{2}F = \frac{U-M}{\alpha\alpha'} = \frac{\frac{1}{4}R-P}{Q}$$

oder

$$\cos\tfrac{1}{2}F = \frac{\frac{1}{4}(\cos a+\cos b+\cos c+\cos d)}{\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}.\cos\frac{d}{2}} - \operatorname{tang}\frac{a}{2}.\operatorname{tang}\frac{b}{2}.\operatorname{tang}\frac{c}{2}.\operatorname{tg}\frac{d}{2},$$

wenn man für R, P und Q ihre durch die Bogen a, b, c, d ausgedrückten Werthe setzt.

Einen Ausdruck für $\operatorname{tang}\frac{1}{4}F^2$, worin alle Seiten und Winkel des allgemeinen sphärischen Vierecks vorkommen, erhält man durch die folgenden Betrachtungen.

Da

$$2\cos\tfrac{1}{2}e^2$$
$$=\cos\tfrac{1}{2}(a+b)^2+\cos\tfrac{1}{2}(c+d)^2+\sin a.\sin b.\cos\tfrac{1}{2}B^2+\sin c.\sin d.\cos\tfrac{1}{2}D^2,$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}g^2$$
$$=\cos\tfrac{1}{2}(b+c)^2+\cos\tfrac{1}{2}(a+d)^2+\sin b.\sin c.\cos\tfrac{1}{2}C^2+\sin a.\sin d.\cos\tfrac{1}{2}A^2,$$

wenn g die zweite Diagonale des sphärischen Vierecks bezeichnet; so ist:

$$\begin{aligned}2(\cos\tfrac{1}{2}e^2-\cos\tfrac{1}{2}g^2)&=2\sin\tfrac{1}{2}(a-c)\sin\tfrac{1}{2}(d-b)\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)\\&\quad+\sin a\sin b\cos\tfrac{1}{2}B^2+\sin c\sin d\cos\tfrac{1}{2}D^2\\&\quad-\sin b\sin c\cos\tfrac{1}{2}C^2-\sin a\sin d\cos\tfrac{1}{2}A^2\\&=2\sin\tfrac{1}{2}(a-c)\sin\tfrac{1}{2}(d-b)\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)+4\alpha\beta\cos\tfrac{1}{2}B^2+4\alpha'\beta'\cos\tfrac{1}{2}D^2\\&\quad-4\gamma\delta\cos\tfrac{1}{2}C^2-4\gamma'\delta'\cos\tfrac{1}{2}A^2,\end{aligned}$$

wo

$$\gamma=\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},\quad \gamma'=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{d}{2},\quad \delta=\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2},\quad d'=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2}.$$

Da

$$\cos\tfrac{1}{2}(f+f')=\cos\tfrac{1}{2}F=\frac{(\alpha+\beta\cos B)(\alpha'+\beta'\cos D)-\beta\beta'\sin B\sin D}{\cos\frac{1}{2}e^2},$$

so ist auch:

$$\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}F.\cos\tfrac{1}{2}e^2&=\alpha\alpha'+\alpha'\beta\cos B+\alpha\beta'\cos D+\beta\beta'\cos(B+D),\\\cos\tfrac{1}{2}F.\cos\tfrac{1}{2}g^2&=\alpha\alpha'+\gamma'\delta\cos C+\gamma\delta'\cos A+\beta\beta'\cos(C+A);\end{aligned}$$

durch Subtraction dieser beiden Gleichungen von einander wird erhalten:

$$\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}F(\cos\tfrac{1}{2}e^2-\cos\tfrac{1}{2}g^2)&=\alpha'\beta\cos B+\alpha\beta'\cos D-\gamma'\delta\cos C-\gamma\delta'\cos A\\&\quad+\beta\beta'\cos(B+D)-\cos(C+A)),\end{aligned}$$

oder, wenn man die Cosinus der halben Winkel einführt:

$$\begin{aligned}\cos^2\tfrac{1}{2}F(\cos^2\tfrac{1}{2}e^2-\cos^2\tfrac{1}{2}g^2)&=-\alpha'\beta-\alpha\beta'+\gamma'\delta+\gamma\delta'+2\alpha'\beta\cos^2\tfrac{1}{2}B^2+2\alpha\beta'\cos^2\tfrac{1}{2}D^2\\&\quad-2\gamma'\delta\cos^2\tfrac{1}{2}C^2-2\gamma\delta'\cos^2\tfrac{1}{2}A^2+2\beta\beta'(\cos^2\tfrac{1}{2}(B+D)^2-\cos^2\tfrac{1}{2}(C+A)^2)\\&=\sin\tfrac{1}{2}(a-c)\sin\tfrac{1}{2}(d-b)+2\alpha'\beta\cos\tfrac{1}{2}B^2+2\alpha\beta'\cos\tfrac{1}{2}D^2\\&\quad-2\gamma'\delta\cos\tfrac{1}{2}C^2-2\gamma\delta'\cos\tfrac{1}{2}A^2+2\beta\beta'(\cos\tfrac{1}{2}(B+D)^2-\cos\tfrac{1}{2}(C+A)^2).\end{aligned}$$

Setzt man für $\cos\frac{1}{2}e^2-\cos\frac{1}{2}g^2$ den früher entwickelten Werth, so erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}F$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c}\sin\frac{1}{2}(a-c)\sin\frac{1}{2}(d-b)+2\alpha'\beta\cos\frac{1}{2}B^2+2\alpha\beta'\cos\frac{1}{2}D^2\\ -2\gamma'\delta\cos\frac{1}{2}C^2-2\gamma\delta'\cos\frac{1}{2}A^2+2\beta\beta'(\cos\frac{1}{2}B+D)^2-\cos\frac{1}{2}(C+A)^2)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}\sin\frac{1}{2}(a-c)\sin\frac{1}{2}(d-b)\cos\frac{1}{2}(a+b+c+d)+2\alpha\beta\cos\frac{1}{2}B^2\\ +2\alpha'\beta'\cos\frac{1}{2}D^2-2\gamma\delta\cos\frac{1}{2}C^2-2\gamma'\delta'\cos\frac{1}{2}A^2\end{array}\right\}}.$$

Zieht man $\cos\frac{1}{2}F$ von 1 ab und legt ihn zu 1 hinzu, so gelangt man zu folgendem Ausdruck von $\tan\frac{1}{4}F^2$:

$$\tan\tfrac{1}{4}F^2$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c}-\sin\frac{1}{2}(a-c)\sin\frac{1}{2}(d-b)\sin\frac{1}{2}s^2+(\alpha-\alpha')(\beta\cos\frac{1}{2}B^2-\beta'\cos\frac{1}{2}D^2)\\ +(\gamma'-\gamma)(\delta\cos\frac{1}{2}C^2-\delta'\cos\frac{1}{2}A^2)-\beta\beta'(\cos\frac{1}{2}(B+D)^2-\cos\frac{1}{2}(C+A)^2)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}\sin\frac{1}{2}(a-c)\sin\frac{1}{2}(d-b)\cos\frac{1}{2}s^2+(\alpha+\alpha')(\beta\cos\frac{1}{2}B^2+\beta'\cos\frac{1}{2}D^2)\\ -(\gamma'+\gamma)(\delta\cos\frac{1}{2}C^2+\delta'\cos\frac{1}{2}A^2)+\beta\beta'(\cos\frac{1}{2}(B+D)^2-\cos\frac{1}{2}(C+A)^2)\end{array}\right\}}.$$

Wenn das sphärische Viereck in einen kleineren Kreis der Kugel einbeschrieben ist, so verschwindet im Zähler und Nenner von $\tan\frac{1}{4}F^2$ das in $\beta\beta'$ multiplicirte Glied, weil

$$B+D=C+A \quad \text{und} \quad \cos\tfrac{1}{2}(B+D)^2=\cos\tfrac{1}{2}(C+A)^2.$$

Das Letztere erhellet auch aus Folgendem. Da

$$(\tfrac{1}{2}\sin a\sin b\sin B+\tfrac{1}{2}\sin c\sin d\sin D)^2$$
$$+\sin a\sin b\sin c\sin d\cos\tfrac{1}{2}(B+D)^2=MT$$

und

$$(\tfrac{1}{2}\sin b\sin c\sin C+\tfrac{1}{2}\sin a\sin d\sin A)^2$$
$$+\sin a\sin b\sin c\sin d\cos\tfrac{1}{2}(C+A)^2=MT,$$

wo

$\frac{1}{2}\sin a\sin b\sin B$, $\frac{1}{2}\sin c\sin d\sin D$, $\frac{1}{2}\sin b\sin c\sin C$, $\frac{1}{2}\sin a\sin d\sin A$

nach einander den dreifachen Cubikinhalt der Tetraeder $MABC$, $MACD$, $MBCD$, $MABD$ bezeichnen, wenn M der Mittelpunkt der Kugel; so hat man:

$$(3V+3V')^2+\sin a\sin b\sin c\sin d\cos\tfrac{1}{2}(B+D)^2$$
$$=(3v+3v')^2+\sin a\sin b\sin c\sin d\cos\tfrac{1}{2}(C+A)^2,$$

wo V, V', v und v' den Cubikinhalt der genannten Tetraeder ausdrücken. Fallen die Punkte A, B, C und D in eine Ebene,

wie es bei dem auf der Kugel befindlichen, einem kleineren Kreise einbeschriebenen Vierecke stattfindet, so ist $V + V' = v + v'$ und deshalb $\cos\frac{1}{2}(B+D)^2 = \cos\frac{1}{2}(C+A)^2$.

XIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Lehrsatz und Aufgabe.

Von Herrn Dr. Otto Böklen zu Sulz a. N. im Königr. Würtemberg.

A ist ein beliebiger Punkt einer Fläche, AO die Normale, O der Mittelpunkt eines Hauptkrümmungskreises, dessen Ebene sowohl AO als auch die Tangente einer Krümmungslinie von A enthält. Man ziehe irgend eine Linie durch A auf der Fläche: die Flächen-Normalen, deren Fusspunkte auf dieser Linie sind, schneiden die Normal-Ebene in einer Curve c. Da sich durch A beliebig viele Linien auf der Fläche ziehen lassen, so erhält man auch auf der Normal-Ebene unendlich viele Schnittcurven c. Alle diese Curven haben in O eine gemeinsame Tangente, welche mit der Tangente der Krümmungslinie parallel ist. Die Aufgabe besteht darin, zu bestimmen, welche von den Curven c in O den grössten und welche den kleinsten Krümmungshalbmesser hat; welcher Zusammenhang findet statt zwischen dem Krümmungshalbmesser einer Curve c und dem Winkel, welchen die entsprechende, durch A auf der Fläche gezogene Linie mit der Krümmungslinie bildet.

XIV.

Miscellen.

Auf Antrag der Direction der k. k. Marine-Sternwarte in Triest werden jetzt an den Küsten des adriatischen Meeres Beobachtungen über Ebbe und Fluth mit selbstregistrirenden Fluthmessern angestellt und Seitens des k. k. österreichischen Marine-Obercommandos und der k. k. Central-Seebehörde kräftigst unterstützt und gefördert. Das grosse Interesse und die grosse Wichtigkeit dieser Beobachtungen liegt klar vor Augen und fordert zu dem lebhaftesten Danke gegen die genannten hohen Seebehörden auf. Es macht mir daher besondere Freude, den Lesern des Archivs einen von dem verdienten Director der k. k. Marine-Sternwarte in Triest, Herrn Professor F. Schaub, mir gütigst übersandten Auszug aus der Triester Zeitung (1860. Nr. 54.) nachstehend mittheilen zu können, worin eine zwar kurze, aber völlig deutliche Beschreibung des auf der Rhede von Triest, am äusseren Ende des Molo Sartorio aufgestellten selbstregistrirenden Fluthmessers gegeben ist. Ausserdem bin ich aber Herrn Director Schaub vorzüglich dankbar für die mir gleichfalls mitgetheilte besondere Abbildung dieses Fluthmessers, welche die Leser auf Taf. II. finden werden, welche jede Dunkelheit, die vielleicht die nur kurze Mittheilung aus der Triester Zeitung noch übrig lassen sollte, vollständig beseitigen wird. Späterhin hoffe ich den Lesern des Archivs weitere Mittheilungen über diese interessanten und wichtigen Beobachtungen, so wie vielleicht auch über deren Resultate, machen zu können. G.

Fluthpegel und Ebbe und Fluth im adriatischen Meere.

In Anerkennung der wissenschaftlichen und praktischen Wichtigkeit einer genauen Kenntniss des Verlaufes von Ebbe und Fluth

im adriatischen Meere wurde als Anfang einer umfassenden Reihe von Beobachtungen auf Antrag der Direction der Marine-Sternwarte ein selbstregistrirender Fluthmesser in der Rhede von Triest, am äusseren Ende des Molo Sartorio aufgestellt. Die Kosten dieses Apparates, welcher seit October v. J. in Thätigkeit ist, wurden zu gleichen Theilen von dem k. k. Marine-Obercommando und der k. k. Central-Seebehörde getragen. Seine Einrichtung ist im Wesentlichen übereinstimmend mit der Einrichtung der bekannten Autographen für den Luftdruck. Ein senkrecht stehendes Rohr von 6 Zoll Durchmesser ist mit dem Meere derart in Verbindung, dass das Wasser im Rohre stets mit dem äusseren Wasserspiegel in gleicher Höhe steht. Um eine Rolle ist eine Schnur geschlungen, welche an dem einen Ende einen auf der Wasserfläche im Rohre schwimmenden Körper, an dem andern Ende ein Gegengewicht trägt; durch das Steigen und Fallen des Wassers wird sonach die Rolle um ihre Axe gedreht. Mittelst eines gezahnten Rades wird die Bewegung der Rolle auf eine horizontale Schiene übertragen und im Verhältnisse von 6.44:1 vermindert, so dass ein Steigen oder Fallen des Wassers von 6.44 Zoll eine Verschiebung der Schiene nach links oder rechts um einen Zoll bewirkt. Durch ein Uhrwerk wird ein Cylinder von 8 Zoll Durchmesser und 18 Zoll Höhe in 24 Stunden einmal um seine horizontal liegende Axe gedreht. Ein Zeichenstift, welcher mit der früher erwähnten Schiene verbunden ist, wird durch ein Gewicht leicht an die Oberfläche des Cylinders gedrückt. Indem einerseits der Stift der Bewegung des Wassers folgt, andererseits aber der Cylinder, auf welchem er zeichnet, um seine Axe gedreht wird, erhält man auf einem um den Cylinder gewickelten Blatte eine krumme Linie, von welcher die einer beliebigen Zeit entsprechende Wasserhöhe mit Genauigkeit angegeben wird.

Als Ergebniss der bisher von dem Fluthwasser gemachten Aufzeichnungen kann vorläufig erwähnt werden, dass in Triest der Verlauf von Ebbe und Fluth im Allgemeinen mit der Theorie von Laplace vollkommen übereinstimme, und nur ausnahmsweise durch Bewegungen des Wassers, die ganz anderer Natur und hauptsächlich eine Folge der herrschenden Winde sind, gestört werde.

Ein ähnliches Resultat geben auch die während des verflossenen Herbstes und Winters durch das k. k. Marine-Obercommando an verschiedenen Punkten in den Gewässern von Venedig veranstalteten stündlichen Aufzeichnungen des Wasserstandes.

Um aber das Gesetz der Folge von Ebbe und Fluth in der ganzen Ausdehnung des adriatischen Golfes möglichst genau kennen zu lernen, werden mehrere selbstregistrirende Fluthmesser

nach dem Muster des in Triest errichteten an geeigneten Punkten der Küste in nächster Zeit aufgestellt werden.

Bemerkungen über das Rationalmachen der Nenner der Brüche.

Von Herrn Dr. Zehfuss in Heidelberg.

Es sei A_m eine Summe oder sonstige ganze rationale Function der von einander unabhängigen m Quadratwurzel-Ausdrücke:

$$\sqrt{a_1},\ \sqrt{a_2},\ \sqrt{a_3},\ldots.\sqrt{a_{m-1}},\ \sqrt{a_m}.$$

Alsdann wird man den Nenner des Bruches $\frac{Z}{A_m}$ stets auf die Form

$$B_{m-1} + B'_{m-1}.\sqrt{a_m}$$

bringen können, wo B_{m-1} und B'_{m-1} im Sinne obiger Bezeichnung ganze Polynome sind, welche nur noch die $m-1$ Radicale

$$\sqrt{a_1},\ \sqrt{a_2},\ldots.\sqrt{a_{m-1}}$$

enthalten. Um also das letzte Radical $\sqrt{a_m}$ gänzlich aus dem Nenner zu entfernen, genügt es, den Bruch in Zähler und Nenner mit $B_{m-1} - B'_{m-1}.\sqrt{a_m}$ zu multipliciren. Der neue Nenner, in Bezug auf $\sqrt{a_{m-1}}$ geordnet, ist alsdann offenbar von der Form

$$C_{m-2} + C'_{m-2}.\sqrt{a_{m-1}},$$

also verschwindet auch das Radical $\sqrt{a_{m-1}}$, wenn man, da C_{m-2} und C'_{m-2} nur die Radicale $\sqrt{a_1},\ \sqrt{a_2},\ldots.\sqrt{a_{m-2}}$ enthalten, Zähler und Nenner des neuen Bruches mit $C_{m-2} - C'_{m-2}.\sqrt{a_{m-1}}$ multiplicirt, und der neu entstehende Nenner ist dann augenscheinlich von der Form:

$$D_{m-3} + D'_{m-3}.\sqrt{a_{m-2}},$$

welcher ganz ähnlich behandelt werden kann. Indem man also immer bezüglich der wegzuschaffenden Wurzelgrösse ordnet, gelingt es durch die obige elementare Methode, eine nach der andern wegzubringen, nur muss man nicht, wie Herr Unferdinger gethan, die etwa erscheinenden Producte zweier Radicale als neue selbstständige Wurzelgrössen behandeln, was freilich nicht zum Ziele führt. Es kann also jeder Bruch, dessen Nenner eine ganze rationale Function der m Wurzelausdrücke $\sqrt{a_1},\ \sqrt{a_2},\ldots.\sqrt{a_m}$ ist, durch eine Reihe von m ganz bestimmten algebraischen Operationen in allen

Fällen in einen solchen mit rationalem Nenner verwandelt werden.

Nachsatz. Dieser Satz gilt nicht allein für Quadratwurzeln, sondern auch für einen Nenner, der beliebige m Radicale

$$\sqrt[n]{a_1},\ \sqrt[n]{a_2},\ \sqrt[n]{a_3},\ \ldots.\ \sqrt[n]{a_m}$$

vom $n$ten Grade enthält. Der Nenner ist dann von der Form:

$$B_{m-1}+B'_{m-1}\sqrt[n]{a_m}+B''_{m-1}\sqrt[n]{a_m^2}+\ldots.+B^{(n-1)}_{m-1}.\sqrt[n]{a_m^{n-1}}.$$

Das Radical $\sqrt[n]{a_m}$ verschwindet, wenn man Zähler und Nenner mit $n-1$ Polynomen multiplicirt, welche aus dem letztern hervorgehen, indem man $\sqrt[n]{a_m}$ mit $\alpha\sqrt[n]{a_m}$, $\alpha^2\sqrt[n]{a_m}$, ... $\alpha^{n-1}\sqrt[n]{a_m}$ multiplicirt, wo α eine eigentliche Wurzel der Gleichung $\alpha^n=1$ ist *).

Auszug aus einem Schreiben des Herrn Rector Dr. Nagel in Ulm an den Herausgeber.

Die in Ihrem Archive. Thl. XXXIV. Heft I. Nr. II. S. 6. behandelte Aufgabe möchte sich vielleicht, ebenfalls algebraisch, folgendermassen kürzer lösen und construiren lassen:

Es sei die Grundlinie des gegebenen Dreiecks g, die Höhe h, so ist sein Inhalt $\frac{gh}{2}$. Von dem gesuchten gleichseitigen Dreiecke sei die Grundlinie $=2x$, so ist die Höhe $=\sqrt{4x^2-x^2}$ $=\sqrt{3x^2}=x\sqrt{3}$, also der Inhalt $=x^2\sqrt{3}$. Mithin ist:

$$x^2\sqrt{3}=\frac{gh}{2},\quad x^2=\frac{gh}{2\sqrt{3}}=\frac{gh\sqrt{3}}{6}=\frac{g}{6}.h\sqrt{3}.$$

Mithin ist x die mittlere Proportionale zwischen dem 6ten Theile der Grundlinie und zwischen der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Grundlinie $2h$ ist, woraus sich folgende Construction ergibt, offenbar viel einfacher, als in dem genannten Hefte

---

*) Ich verweise bei dieser Gelegenheit auf einen Aufsatz des Herrn Doctor Grebe in Cassel über den vorliegenden Gegenstand im Arch. Thl. XIII. Nr. IV. S. 68. G.

Seite 8., wo vorher das gegebene Dreieck in ein Quadrat verwandelt wird (Fig. 2. daselbst) und dieses hierauf nach Fig. 3. u. s. w. behandelt werden soll.

In Taf. II. Fig. 2. sei ABC das gegebene Dreieck; von der Grundlinie $BC=g$ schneide $BD=\frac{1}{6}BC=\frac{1}{6}g$ ab; auf BC errichte in B ein Perpendikel und durch A ziehe eine Parallele mit BC, bis sich beide in E schneiden, so ist $BE=h$. Verlängere BE so nach F, dass $BF=BE$ ist, und beschreibe über EF das gleichseitige Dreieck EFG, so geht die Verlängerung von BC durch G, weil BG Halbirungsperpendikel von EF ist, und BG ist $=BE.\sqrt{3}=h\sqrt{3}$. Beschreibt man daher über GD einen Halbkreis, der BE in H schneidet, so ist BH die mittlere Proportionale zwischen BD und BG, also ist $BH=x$, oder die halbe Seite des gesuchten gleichseitigen Dreiecks, also, wenn $BK=BH$ gemacht, $HL \parallel EG$ gezogen und KL gezogen wird, $\Delta HKL=\Delta ABC$.

Aehnlich verfährt man bei der zweiten Aufgabe. Uebrigens werden alle Aufgaben über Verwandlungen gegebener Figuren in andere von gegebener Form, so wie eine grosse Reihe von Aufgaben über Theilungen, wenn die Form der Theile gegeben ist, auf rein geometrischem Wege am elegantesten durch Beiziehung des bekannten Lehrsatzes gelöst: Wenn drei gerade Linien stetig proportionirt sind, so verhalten sich zwei auf der ersten und zweiten construirte ähnliche Figuren zu einander wie die erste Linie zur dritten.

Einfache Methode, die Reste der Zahl 9^{9^9} bei der Division durch die Primzahlen zu finden.

Von Herrn A. Niegemann, ordentlichem Lehrer am katholischen Gymnasium in Cöln.

Man suche nach dem Satze: „Ein Produkt gibt bei der Division durch eine Zahl denselben Rest, den auch das Produkt der Reste gibt, die entstehen, wenn man die Faktoren durch diese Zahl dividirt“ in der Reihe der Potenzen von 9 diejenige, welche bei der Division durch die Primzahl den Rest 1 gibt, alsdann den Rest von 9^9 bei der Division durch den Exponenten jener gefundenen Potenz, dann ist man im Stande 9^{9^9} als ein Produkt darzustellen, wovon ein Faktor für die Primzahl den Rest 1 gibt, folglich bestimmt der andere den Rest.

Will man auf diese Weise den Rest von 9^{9^9} bei der Division durch 11 bestimmen, so hat man:

1) Potenzen:	9^1	9^2	9^3	9^4	9^5
Reste bei der Division durch 11:	9	4	3	5	1
2) Potenzen:	9^1	9^2			
Reste bei der Division durch 5:	4	1			

Weil 9^2 für 5 den Rest 1 gibt, so gibt auch $(9^2)^4 = 9^8$ den Rest 1 und folglich $9^9 = 9^8 . 9$ den Rest 4, und somit ist $9^9 = 5x + 4$ und $9^{9^9} = 9^{5x+4} = (9^5)^x . 9^4$. Da nun 9^5 für 11 den Rest 1 gibt, so gibt auch $(9^5)^x$ den Rest 1 und somit 9^{9^9} den Rest, welchen 9^4 gibt, also den Rest 5.

Wollte man den Rest von $9^{9^{9^9}}$ bei der Division durch 11 finden, so suche man nach obiger Methode den Rest von 9^{9^9} bei der Division durch 5. Dieser ist 4, folglich $9^{9^9} = 5y + 4$ und $9^{9^{9^9}} = 9^{5y+4} = (9^5)^y . 9^4$. Da $(9^5)^y$ für 11 den Rest 1 und 9^4 den Rest 5 gibt, so gibt $9^{9^{9^9}}$ den Rest 5.

Man sieht leicht, dass alle Potenzen von der Form $9^{9^{9^{\cdots}}}$ bei der Division durch 11 den Rest 5 geben, weil, wie die zweite Reihe der Potenzen und ihrer Reste zeigt, die Potenzen von 9 mit ungeraden Exponenten den Rest 4 haben und $9^{9^{9^{\cdots}}}$ immer eine ungerade Zahl ist, daher $9^{9^{9^{\cdots}}} = 9^{5z+4} = (9^5)^z . 9^4$.

Fehler

in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln, Stereotyp-Ausgabe von 1860:

Taf. I. S. 174. Fusstafel, Spalte $0''$, Z. 1. statt 1.15.40 lies: 0.15.40.
ebendaselbst Z. 3. statt 0.36.40 lies: 2.36.40.

Braunschweig am 27. Februar 1860.

Taf. II. S. 324. Differenz zwischen log sin 20° 6′ 30″ und 40″ statt 675 lies 575.

Braunschweig am 25. Mai 1860.

Fr. Vieweg & Sohn.

XV.

Ueber die Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Von

Herrn *Ferdinand Kerz*,

Rittmeister in der Grossherzogl. Hessischen Gendarmerie zu Darmstadt.

Vierte Abtheilung*).

§. 123.

Die in §. 92. gestellte Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Kreise berührt und einen dritten gegebenen Kreis rechtwinkelig schneidet, und welche wir als die allgemeine Aufgabe erkannten, einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Stücke (Kreise, gerade Linien und Punkte) berührt, und dessen Mittelpunkt in einer gegebenen geraden Linie liegt, kann auch noch für eine andere Klasse von Aufgaben als allgemein gelten, bei welchen es sich nämlich darum handelt, von drei beliebig gegebenen Stücken, unter welchen sich wenigstens ein Kreis befindet, zwei zu berühren und den gegebenen Kreis rechtwinkelig zu schneiden.

Diese ganze Klasse von Aufgaben lässt sich nun ebenso aus den Aufgaben der zweiten Abtheilung dieser Abhandlung ableiten wie die Aufgaben der §§. 104. und 105. aus denen der ersten Ab-

---

*) Fortsetzung von Thl. XXVIII. Nr. XXI. S. 402.—419. Alle zu dieser vierten Abtheilung gehörenden Figurentafeln Taf. III bis Taf. VI. sind mit „Kerz“ bezeichnet, und die Figuren auf denselben ohne Unterbrechung von Fig. 1 bis Fig. 12. gezählt.

theilung. Wir wollen aber der Kürze wegen einen andern Weg einschlagen und die Halbmesser der zu berührenden Kreise (Aufgaben §§. 104 und 105) nach und nach wieder unendlich ab- und zunehmen lassen.

§. 124.

Verkleinert sich der Halbmesser des Kreises m (Fig. 2. und 3. Taf. VII. Thl. XXVIII.), bei ungeändertem Halbmesser des Kreises M, so lange bis er unendlich klein wird, der Kreis m also in einen Punkt übergeht; so fallen mit diesem Punkt m (Fig. 1.) die Berührungspunkte b' und b^2 und sowohl der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$, wie auch der äussere und innere Aehnlichkeitskreis, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$, zusammen (§. 32. und 42.); daher ist die gerade Verbindungslinie ma des gegebenen Punktes m mit dem Mittelpunkt a des rechtwinkelig zu schneidenden Kreises zugleich die äussere und innere Aehnlichkeitsaxe (§. 95. und 102.) und die Aufgaben der §§. 104. und 105. vereinigen sich.

§. 125.

Verkleinert sich nunmehr auch der Halbmesser des Kreises M bis er unendlich klein wird (Fig. 2.), der Kreis M also ebenfalls in einen Punkt übergeht, mit dem die Berührungspunkte B' und B^2 zusammenfallen; so fällt für diese Punkte m und M der äussere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{A}$ in der Richtung mM ihrer geraden Verbindungslinie beiderseits unendlich weit weg (§. 35.) und ihr äusserer Aehnlichkeitskreis ist die in dem Halbirungspunkt $\mathfrak{J}$ ihrer Entfernung auf diese senkrecht errichtete gerade Linie $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$ (§. 46.).

Hieraus ergiebt sich die äussere Aehnlichkeitsaxe als die durch den Mittelpunkt a des rechtwinkelig zu schneidenden Kreises gehende mit der geraden Verbindungslinie mM der gegebenen Punkte parallellaufende Linie $a\mathfrak{A}$ (§. 95.).

§. 126.

Aufgabe. Es sind gegeben: zwei Kreise M und a und ein Punkt m (Fig. 1.); man soll einen Kreis beschreiben, welcher den einen Kreis M berührt, den andern a rechtwinkelig schneidet und zugleich durch den gegebenen Punkt m geht.

Auflösung:

1) Man verbinde den Mittelpunkt a des rechtwinkelig zu

schneidenden Kreises mit dem gegebenen Punkt m durch eine Gerade am, so ist dieselbe die äussere (und innere) Aehnlichkeitsaxe (§. 124.).

2) Der gegebene Punkt m selbst ist zugleich der äussere (und innere) Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{Z}$) (§. 124.); daher ergiebt sich die äussere Axe als Linie gleicher Potenzen ($O'O''$) des gegebenen Punktes m und des rechtwinkelig zu schneidenden Kreises a (§. 104. 2.).

3) Aus dem Hauptpunkte O der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ lege man an den rechtwinkelig zu schneidenden Kreis eine Tangente, beschreibe mit derselben den Hauptkreis der äusseren Axe (§. 18. 7.) und bestimme zu diesem und dem zu berührenden Kreise M die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt sich als Durchschnittspunkt dieser Linie mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ der Pol P der Berührungspunkte.

4) Aus dem gefundenen Pole P beschreibe man mit einer an den zu berührenden Kreis M gelegten Tangente $PB'(=PB^2)$ als Halbmesser den Bestimmungskreis der Berührungspunkte; so ergeben sich letztere als Durchschnittspunkte B' und B^2 beider Kreise P und M.

5) Durch die geraden Verbindungslinien der gefundenen Berührungspunkte B' und B^2 mit dem Mittelpunkte M des zu berührenden Kreises, resp. deren Verlängerungen, ergeben sich als Durchschnittspunkte mit der äusseren Axe $O'O''$ zwei Punkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$, welche die Mittelpunkte zweier Kreise sind, die beide der Aufgabe genügen.

§. 127.

Aufgabe. Es sind gegeben: zwei Punkte M und m und ein Kreis a (Fig. 2.); man soll einen Kreis beschreiben, der den gegebenen Kreis a rechtwinkelig schneidet und zugleich durch die gegebenen Punkte geht.

Auflösung. Man bestimme:

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ (§. 125.).

2) Man halbire die gerade Verbindungslinie Mm der gegebenen Punkte durch eine Senkrechte $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$, so ist diese der zu den Punkten M und m gehörige äussere Aehn-

lichkeitskreis (§. 125.) und daher zugleich die äussere Axe $O'O''$ (§. 95. und §. 52. 1.), welche den rechtwinkelig zu schneidenden Kreis a entweder schneidet oder nicht schneidet.

3) Schneidet sie ihn, so suche man zu einem der Durchschnittspunkte (O_i oder O_a) und einem der gegebenen Punkte, m oder M, die Linie gleicher Potenzen (§. 52. 5.); wodurch sich als Durchschnittspunkt dieser Linie mit der äusseren Axe $a\mathfrak{A}$ der Pol P der Berührungspunkte ergiebt.

Schneidet sie ihn nicht (wie in Fig. 2.), so beschreibe man den Hauptkreis O der äusseren Axe, bestimme zu ihm und einem der gegebenen Punkte, etwa M, die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt sich als Durchschnittspunkt dieser Linie mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ der Pol P der Berührungspunkte für den Punkt M.

4) Diesen gefundenen Pol P verbinde man mit dem zugehörigen Punkt M durch eine gerade Linie PM, errichte auf diese in dem Endpunkte M eine Senkrechte, welche die äussere Axe $O'O''$ in dem Punkte $\mathfrak{M}$, dem Mittelpunkte des zu suchenden Kreises, schneidet, für welchen zugleich diese Senkrechte $M\mathfrak{M}$ selbst der Halbmesser ist.

§. 128.

Aufgabe. Es sind gegeben: zwei Kreise a und m und eine gerade Linie $M'M''$ (Fig. 3.); man soll einen Kreis beschreiben, der den gegebenen Kreis a rechtwinkelig schneidet und den gegebenen Kreis m und die gerade Linie $M'M''$ gleichartig berührt, d. h. beide ausschliesst.

Auflösung. Man bestimme:

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ (§. 95.), der äussere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{A}$ ergiebt sich nach §. 31.;

2) den äusseren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ (nach §. 39.), welcher den rechtwinkelig zu schneidenden Kreis a entweder schneidet (wie in Fig. 3.), oder nicht schneidet.

Schneiden sich beide Kreise a und $\mathfrak{A}$, so hat man in der geraden Verbindungslinie O_iO_a ihrer Schneidungspunkte O_i und O_a bereits die äussere Axe. Schneiden sie sich nicht, so ergiebt sich die äussere Axe als

Linie gleicher Potenzen $O'O''$ des äusseren Aehnlichkeitskreises $\mathfrak{A}$ und des rechtwinkelig zu schneidenden Kreises a (§. 95.).

Im ersteren Falle suche man zu einem der Durchschnittspunkte $O_1(O_{11})$ und dem zu berührenden Kreise m die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt sich als Durchschnittspunkt dieser Linie mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ der Pol p der Berührungspunkte b' und b^2 für den zu berührenden Kreis m.

Im letzteren Falle beschreibe man den Hauptkreis O der äusseren Axe und bestimme zu diesem und dem zu berührenden Kreise m die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt sich als Durchschnittspunkt dieser Linie mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ der Pol p der Berührungspunkte b' und b^2.

Man verfahre weiter nach §. 104. 4). und 5).

§. 129.

Da nach §. 54 die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ die Linie gleicher Potenzen der Berührungskreise $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ ist, so muss auch der Durchschnittspunkt P der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ mit der gegebenen geraden Linie $M'M''$ der zu dieser Linie gehörige Pol der Berührungspunkte sein. Verbindet man daher P mit $O_1(O_{11})$ durch eine Gerade PO_1 und beschreibt mit ihr als Halbmesser aus P einen Kreis, so schneidet derselbe die gegebene Linie $M'M''$ in den Punkten B' und B^2, in welchen sie von den conjugirten Kreisen $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ berührt wird.

Hiernach ergeben sich die conjugirten Berührungspunkte für die gerade Linie $M'M''$ auf kürzerem Wege als für den Kreis m.

Die Mittelpunkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ der conjugirten Berührungskreise findet man dann als Durchschnittspunkte der in den Berührungspunkten B' und B^2 auf die gegebene Gerade $M'M''$ errichteten Senkrechten mit der äusseren Axe O_1O_{11} $(O'O'')$.

§. 130.

Aufgabe. Es sind gegeben: zwei Kreise a und m und eine gerade Linie $M'M''$ (Fig. 4.); man soll einen Kreis beschreiben, der den gegebenen Kreis a rechtwinkelig schneidet und den gegebenen Kreis m und die gerade Linie $M'M''$ ungleichartig be-

rührt, d. h. den Kreis m einschliesst und die gerade Linie $M'M''$ ausschliesst.

Auflösung. Man bestimme:

1) die innere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{Z}$ (§. 102.), der innere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{Z}$ ergiebt sich nach §. 31.;

2) den inneren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{Z}$ (nach §. 40.) und die Linie differenter Potenzen $(Q,Q_{''})$ des rechtwinkelig zu schneidenden Kreises a in Bezug auf den inneren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{Z}$ (§. 97. und §. 98.); sodann den Hauptkreis Q der inneren Aehnlichkeitsaxe, welcher den gegebenen Kreis a rechtwinkelig schneidet und die Peripherie des inneren Aehnlichkeitskreises $\mathfrak{Z}$ halbirt.

3) Zu diesem Hauptkreis Q der inneren Aehnlichkeitsaxe und der gegebenen geraden Linie $M'M''$ ist letztere selbst die Linie gleicher Potenzen (§. 52. 1.), daher ihr Durchschnitt P^I mit der inneren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{Z}$ der Pol der Berührungspunkte B^3 und B^4.

4) An den Hauptkreis Q lege man von diesem Pole P^I eine Tangente und beschreibe mit ihr als Halbmesser aus P^I als Mittelpunkt einen Kreis; so schneidet derselbe die gegebene Linie $M'M''$ in den beiden Punkten B^3 und B^4, welches die Berührungspunkte der beiden conjugirten Kreise für diese gegebene Gerade $M'M''$ sind, die beide der Aufgabe genügen.

5) Die Mittelpunkte $\mathfrak{M}^3$ und $\mathfrak{M}^4$ der beiden conjugirten Kreise ergeben sich als die Durchschnittspunkte der in den beiden Berührungspunkten B^3 und B^4 auf die gegebene Gerade $M'M''$ errichteten Senkrechten mit der inneren Axe $Q'Q''$.

§. 131.

Wird in den Aufgaben der §§. 128. und 130. der Halbmesser des zu berührenden Kreises m unendlich klein, geht also der Kreis m in einen Punkt über, so fallen mit ihm der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt sowie der äussere und innere Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Z}$ zusammen und die beiden Aufgaben vereinigen sich.

§. 132.

Aufgabe. Es sind gegeben: ein Kreis a, eine gerade Linie

$M'M''$ und ein Punkt m (Fig. 5.); man soll einen Kreis beschreiben, der den Kreis a rechtwinkelig schneidet, die gerade Linie $M'M''$ berührt und durch den Punkt m geht.

Auflösung:

1) Die gerade Verbindungslinie des Mittelpunktes a des gegebenen Kreises mit dem gegebenen Punkt m ist zugleich die äussere (innere) Aehnlichkeitsaxe. $a\mathfrak{A}$ ($a\mathfrak{J}$) (§. 124.).

2) Die äussere (innere) Axe ergiebt sich als die zu dem gegebenen Kreis a und dem gegebenen Punkt m gehörige Linie gleicher Potenzen $O'O''$.

3) Aus dem Durchschnittspunkt beider Axen, dem Hauptpunkte O, beschreibe man mit seiner Entfernung Om von dem gegebenen Punkt m den Hauptkreis der äusseren (inneren) Axe. Der Pol der Berührungspunkte für die gegebene gerade Linie $M'M''$ ergiebt sich als Durchschnittspunkt P der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ (am) mit dieser geraden Linie $M'M''$ (§. 129.).

4) Aus dem Pole P beschreibe man mit der von ihm an den Hauptkreis O der äusseren Aehnlichkeitsaxe gelegten Tangente den Bestimmungskreis der Berührungspunkte; so ergeben sich letztere als Durchschnittspunkte B' und B^2 dieses Kreises mit der gegebenen geraden Linie.

5) Die Durchschnittspunkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ der in den gefundenen Berührungspunkten B' und B^2 auf die gegebene gerade Linie $M'M''$ errichteten Senkrechten mit der äusseren Axe $O'O''$ sind die Mittelpunkte der beiden conjugirten Kreise, welche der Aufgabe genügen.

§. 133.

Aufgabe. Es sind gegeben: ein Kreis a und zwei sich schneidende gerade Linien $M'M''$ und $m'm''$ (Fig. 6.); man soll einen Kreis beschreiben, welcher den gegebenen Kreis a rechtwinkelig schneidet und die gegebenen geraden Linien gleichartig berührt, d. h. beide ausschliesst.

Auflösung. Man bestimme:

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$. Sie ergiebt sich (nach

§. 36 und §. 95.) als die durch den Mittelpunkt a des rechtwinkelig zu schneidenden Kreises gehende mit der den (von den beiden gegebenen geraden Linien $M'M''$ und $m'm''$ gebildeten) Winkel $m'NM''$ halbirenden Linie $\mathfrak{A}N\mathfrak{A}$ parallellaufenden Linie $\mathfrak{A}a\mathfrak{A}$.

2) Den äusseren Aehnlichkeitskreis. Er ergiebt sich (nach §. 50.) als die den (von den beiden gegebenen Linien $M'M''$ und $m'm''$ gebildeten) Winkel $m'NM'$, (also den Nebenwinkel des Winkels $m'NM''$) halbirende Linie $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$. Da nun die äussere Axe die Linie gleicher Potenzen des äusseren Aehnlichkeitskreises und des rechtwinkelig zu schneidenden Kreises ist (§. 95.); so ergiebt sich der äussere Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$ zugleich als äussere Axe $O'O''$ (§. 52. 1.), welche den rechtwinkelig zu schneidenden Kreis a entweder schneidet (wie in Fig. 6.) oder nicht schneidet.

3) Die Durchschnittspunkte p und P der äusseren Aehnlichkeitsaxe $\mathfrak{A}a\mathfrak{A}$ mit den gegebenen geraden Linien $m'm''$ und $M'M''$ ergeben sich als die respectiven Pole der Berührungspunkte dieser Linien (§. 129.).

4) Schneidet die äussere Axe $O'O''$ den rechtwinkelig zu schneidenden Kreis a (wie in Fig. 6.), so verbinde man einen der Durchschnittspunkte $O_1(O_{11})$ mit einem der gefundenen Pole $p(P)$ und beschreibe mit der Entfernung $O_1p(O_1P) = O_{11}p(O_{11}P)$ aus dem Pol $p(P)$ den Bestimmungskreis $p(P)$ der Berührungspunkte b' und b^2 (B' und B^2) für die Gerade $m'm''(M'M'')$.

Schneidet die äussere Axe $O'O''$ den rechtwinkelig zu schneidenden Kreis a nicht, so beschreibe man den Hauptkreis O der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$, lege von einem der gefundenen Pole $p(P)$ aus an denselben eine Tangente und beschreibe mit ihr den Bestimmungskreis der Berührungspunkte.

5) Die Durchschnittspunkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ der in den gefundenen Berührungspunkten b' und b^2 (B' und B^2) auf die gegebene gerade Linie $m'm''(M'M'')$ errichteten Senkrechten mit der äusseren Axe $O'O''$ sind die Mittelpunkte der beiden conjugirten Kreise, welche der Aufgabe genügen.

§. 134.

Aufgabe. Es sind gegeben: ein Kreis a und zwei Parallel-

linien $M'M''$ und $m'm''$; man soll einen Kreis beschreiben, welcher den gegebenen Kreis a rechtwinkelig schneidet und die gegebenen Parallelen gleichartig berührt, d. h. beide ausschliesst.

Auflösung wie §. 133 mit Berücksichtigung der §§. 45 u. 52. 4.

Anmerkung. Bei dieser wie bei der Aufgabe des §. 133. ist in Bezug auf die Möglichkeit der Auflösung §. 148. zu berücksichtigen.

§. 135.

Wäre für drei gegebene Kreise die Aufgabe gestellt, einen Kreis zu beschreiben, der zwei der gegebenen Kreise rechtwinkelig schneidet und den dritten berührt, so kann dieselbe ebenfalls aus der allgemeinen Aufgabe über die Beschreibung eines drei andere Kreise berührenden Kreises abgeleitet werden, was in Nachstehendem abgehandelt werden soll.

§. 136.

Schneidet ein Kreis $\mathfrak{M}'(\mathfrak{M}^2)$ (Taf. V. Theil XXIV) zwei andere Kreise a und $\mathfrak{A}$ rechtwinkelig und berührt zugleich einen dritten Kreis M; so sind die beiden rechtwinkelig geschnittenen Kreise a und $\mathfrak{A}$ die äusseren Aehnlichkeitskreise zu dem berührten Kreise M und zwei anderen bezüglichen Kreisen $\mathfrak{M}$ und m, welche ebenfalls von dem Kreise $\mathfrak{M}'(\mathfrak{M}^2)$, und zwar gleichartig mit ihm, berührt werden.

Der Beweis dieses Satzes folgt leicht aus §. 11.

§. 137.

Zur Auflösung der gestellten Aufgabe (§. 135.) könnte man daher diejenigen Kreise $\mathfrak{M}$ und m als Hülfskreise aufsuchen, für welche in Beziehung auf den zu berührenden Kreis M die rechtwinkelig zu schneidenden Kreise a und $\mathfrak{A}$ die respectiven äusseren Aehnlichkeitskreise sind und dann diejenigen Kreise $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ bestimmen, welche diese gefundenen Kreise $\mathfrak{M}$ und m und den gegebenen gleichartig berühren.

§. 138.

Es erhellet leicht, dass man ein ähnliches Verfahren aus der Aufgabe für ungleichartige Berührung abzuleiten im Stande

ist, welches zu demselben Resultate führt. Wir wollen indessen zur Auflösung der gestellten Aufgabe die gleichartige Berührung zu Grunde legen.

§. 139.

Aus dem Vorhergehenden folgt:

Für drei Kreise a, $\mathfrak{A}$ und M, von welchen zwei, a und $\mathfrak{A}$, von einem Kreise $\mathfrak{M}$ rechtwinkelig geschnitten und der dritte Kreis M berührt werden, kann

1) die gerade Verbindungslinie $a\mathfrak{A}$ der Mittelpunkte a und $\mathfrak{A}$ der rechtwinkelig geschnittenen Kreise die äussere Aehnlichkeitsaxe und

2) die Linie gleicher Potenzen der rechtwinkelig geschnittenen Kreise die äussere Axe genannt werden.

§. 140.

Aufgabe. Gegeben sind: drei Kreise a, $\mathfrak{A}$ und M (Fig. 7.); man soll einen Kreis beschreiben, der zwei der gegebenen Kreise a und $\mathfrak{A}$ rechtwinkelig schneidet und den dritten Kreis M berührt.

Auflösung. Man bestimme:

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe, d. h. man verbinde die Mittelpunkte a und $\mathfrak{A}$ der rechtwinkelig zu schneidenden Kreise durch eine gerade Linie $a\mathfrak{A}$ (§. 139. 1.);

2) die äussere Axe, d. h. die Linie $O'O''$ gleicher Potenzen der rechtwinkelig zu schneidenden Kreise a und $\mathfrak{A}$ (§. 139. 2.).

3) Schneiden sich die beiden rechtwinkelig zu schneidenden Kreise einander selbst, so suche man zu einem ihrer Durchschnittspunkte $O_1(O_{11})$ und dem zu berührenden Kreise M die Linie gleicher Potenzen, so ergiebt sich als Durchschnitt dieser mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe der Pol P der Berührungspunkte.

Schneiden sich die beiden rechtwinkelig zu schneidenden Kreise a und $\mathfrak{A}$ einander nicht (wie in Fig. 7.), so lege man aus dem Hauptpunkt O der äusseren Aehnlichkeitsaxe an einen der rechtwinkelig zu schneidenden Kreise $a(\mathfrak{A})$ eine Tangente und beschreibe mit derselben

den Hauptkreis der äusseren Aehnlichkeitsaxe; so ergiebt sich als Durchschnittspunkt P der zu diesem Hauptkreis O und dem zu berührenden Kreis M gehörigen Linie gleicher Potenzen mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ der Pol der Berührungspunkte.

4) Aus diesem Pole beschreibe man den Bestimmungskreis der Berührungspunkte, so ergeben sich letztere als Durchschnittspunkte B' und B^2 dieses Kreises P mit dem zu berührenden Kreise M.

5) Die geraden Verbindungslinien $B'M$ und B^2M der Berührungspunkte mit dem Mittelpunkte des Kreises M ergeben in ihrer Verlängerung als Durchschnittspunkte mit der äusseren Axe $O'O''$ die Mittelpunkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ zweier conjugirten Kreise, welche beide der Aufgabe genügen.

§. 141.

Wird in der Aufgabe (§. 140.) der Halbmesser des zu berührenden Kreises M unendlich klein gedacht, so geht der Kreis M in einen Punkt M über (Fig. 8.), mit welchem zugleich die Berührungspunkte B' und B^2 zusammenfallen und die conjugirten Kreise $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ vereinigen sich.

§. 142.

Aufgabe. Gegeben sind: zwei Kreise a und $\mathfrak{A}$ und ein Punkt M (Fig. 8.); man soll einen Kreis beschreiben, der die beiden gegebenen Kreise rechtwinkelig schneidet und zugleich durch den gegebenen Punkt geht.

Auflösung.

Man verfahre ganz nach §. 140., indem man den gegebenen Punkt M als einen Kreis betrachtet, verbinde den gefundenen Pol P mit dem gegebenen Punkt M durch eine gerade Linie PM und errichte auf diese in dem gegebenen Punkt M eine Senkrechte; so schneidet dieselbe die äussere Axe $O'O''$ in dem Mittelpunkt des zu suchenden Kreises, für welchen die Entfernung $\mathfrak{M}M$ seines Mittelpunktes von dem gegebenen Punkt der zugehörige Halbmesser ist.

§. 143.

Aufgabe. Gegeben sind: zwei Kreise a und $\mathfrak{A}$ und eine gerade Linie $M'M''$ (Fig. 9.); man soll einen Kreis beschreiben, welcher die beiden gegebenen Kreise rechtwinkelig schneidet und die gegebene gerade Linie berührt.

Auflösung. Man bestimme:

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$, d. h. man verbinde die Mittelpunkte a und $\mathfrak{A}$ der beiden Kreise durch eine gerade Linie (§. 139. 1.);

2) die äussere Axe $O'O''$, d. h. die Linie gleicher Potenzen der beiden rechtwinkelig zu schneidenden Kreise a und $\mathfrak{A}$ (§. 139. 2.);

3) den Pol P der Berührungspunkte der gegebenen geraden Linie $M'M''$, d. h. ihren Durchschnittspunkt P mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ (§. 129.).

4) Schneiden die gegebenen rechtwinkelig zu schneidenden Kreise a und $\mathfrak{A}$ einander selbst nicht, (wie in Fig. 9.), so beschreibe man den Hauptkreis O der äusseren Axe, lege an denselben von dem Pole P aus eine Tangente und beschreibe mit derselben aus dem Pole P einen Kreis, so ist dieser der Bestimmungskreis der Berührungspunkte B' und B^2 für die gegebene gerade Linie $M'M''$, weil diese Linie selbst in Bezug auf den Hauptkreis O die Linie gleicher Potenzen ist (§. 52.).

   Schneiden die beiden rechtwinkelig zu schneidenden Kreise a und $\mathfrak{A}$ einander, so hat man in der geraden Verbindungslinie $O,P(O_{,,}P)$ eines ihrer Durchschnittspunkte $O,(O_{,,})$ mit dem gefundenen Pol P den Halbmesser des Bestimmungskreises der Berührungspunkte.

5) Die Durchschnittspunkte der in den gefundenen Berührungspunkten B' und B^2 auf die gegebene gerade Linie $M'M''$ errichteten Senkrechten mit der äusseren Axe $O'O''$ ergeben sich als die Mittelpunkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ zweier conjugirten Kreise, welche beide der Aufgabe genügen.

§. 144.

Lässt man in der Aufgabe des §. 140. den Halbmesser a des

einen rechtwinkelig zu schneidenden Kreises unendlich zunehmen, so geht dieselbe über in:

Aufgabe. Gegeben sind zwei Kreise $\mathfrak{A}$ und M und eine gerade Linie $a'a''$ (Fig. 10.); man soll einen Kreis beschreiben, der den einen der gegebenen Kreise $\mathfrak{A}$ rechtwinkelig schneidet, den anderen M berührt und dessen Mittelpunkt in der gegebenen geraden Linie $a'a''$ liegt.

Auflösung. Man bestimme:

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe, d. h. man fälle durch den Mittelpunkt $\mathfrak{A}$ des rechtwinkelig zu schneidenden Kreises auf die gegebene gerade Linie $a'a''$ die Senkrechte $a\mathfrak{A}$ (§. 139. I. und §. 96.).

2) Die gegebene gerade $a'a''$ ist selbst die äussere Axe $O'O''$ (§. 96.).

3) Schneiden sich der gegebene rechtwinkelig zu schneidende Kreis $\mathfrak{A}$ und die gegebene gerade Linie $a'a''$, so suche man zu einem ihrer Durchschnittspunkte $O_1(O_{11})$ und dem zu berührenden Kreise M die Linie gleicher Potenzen, so ergiebt sich als Durchschnitt dieser mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe der Pol P der Berührungspunkte.

   Schneiden sich der gegebene rechtwinkelig zu schneidende Kreis $\mathfrak{A}$ und die gegebene gerade Linie $a'a''$ nicht (wie in Fig. 10.); so lege man aus dem Hauptpunkte O (§. 96.) der äusseren Aehnlichkeitsaxe an den rechtwinkelig zu schneidenden Kreis $\mathfrak{A}$ eine Tangente und beschreibe mit derselben den Hauptkreis O der äusseren Axe; so ergiebt sich als Durchschnittspunkt P der zu diesem Hauptkreis O und dem zu berührenden Kreis M gehörigen Linie gleicher Potenzen mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe der Pol P der Berührungspunkte.

   Man verfahre weiter nach §. 140. 4. und 5.

§. 145.

Wird in der Aufgabe des §. 144. der Halbmesser des zu berührenden Kreises M unendlich klein gedacht, so geht der Kreis M in einen Punkt M über (Fig. 11.), mit welchem zugleich die Berührungspunkte B' und B^2 zusammenfallen und die conjugirten Kreise $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ vereinigen sich.

§. 146.

Aufgabe. Gegeben sind: ein Kreis $\mathfrak{A}$, ein Punkt M und eine gerade Linie $a'a''$ (Fig. 11.); man soll einen Kreis beschreiben, der den gegebenen Kreis $\mathfrak{A}$ rechtwinkelig schneidet, durch den gegebenen Punkt M geht und dessen Mittelpunkt in der gegebenen geraden Linie $a'a''$ liegt.

Auflösung.

Man verfahre ganz nach §. 144, indem man den gegebenen Punkt M als einen Kreis betrachtet, verbinde den gefundenen Pol P mit dem gegebenen Punkt M durch eine gerade Linie PM und errichte auf diese in dem gegebenen Punkt M eine Senkrechte; so schneidet dieselbe die gegebene Linie $a'a''$ in dem Mittelpunkt des zu suchenden Kreises $\mathfrak{M}$, für welchen die Entfernung $\mathfrak{M}M$ seines Mittelpunktes von dem gegebenen Punkt der zugehörige Halbmesser ist.

§. 147.

Aufgabe. Gegeben sind: ein Kreis $\mathfrak{A}$ und zwei gerade Linien $M'M''$ und $a'a''$ (Fig. 12.); man soll einen Kreis beschreiben, der den gegebenen Kreis $\mathfrak{A}$ rechtwinkelig schneidet, die eine der gegebenen geraden Linien, $M'M''$, berührt und dessen Mittelpunkt in der andern gegebenen geraden Linie, $a'a''$, liegt.

Auflösung.

Man verfahre ganz nach §. 144. Für den Fall, dass der gegebene Kreis $\mathfrak{A}$ die gegebene Linie $a'a''$ nicht schneidet, wie in Fig. 12., ergiebt sich der Halbmesser des Bestimmungskreises P der Berührungspunkte B' und B^2 als die von dem Pol P der Berührungspunkte an den Hauptkreis O gelegten Tangente. Für den Fall aber, dass der gegebene Kreis $\mathfrak{A}$ die gegebene Linie $a'a''$ schneidet, ergiebt sich der Halbmesser des Bestimmungskreises P der Berührungspunkte B' und B^2 als gerade Verbindungslinie eines der Schneidungspunkte $O,(O_{,,})$ mit dem gefundenen Pole P der Berührungspunkte.

§. 148.

Es ist leicht nachzuweisen, dass bei allen Aufgaben, wo es

sich um das Berühren eines gegebenen Kreises oder einer gegebenen geraden Linie und das rechtwinkelige Schneiden eines oder zweier gegebenen Kreise handelt, die Auflösung unmöglich wird, sobald die gegebene Gerade oder der zu berührende Kreis eine solche Lage haben, dass der Pol der Berührungspunkte innerhalb des Hauptkreises der Axen fällt.

§. 149.

Es möchte aus dem Bisherigen hinlänglich erhellen, wie man zu verfahren habe, wenn ein Kreis zu beschreiben ist, der einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneiden und zugleich einen andern gegebenen Kreis oder eine gegebene gerade Linie in einem bestimmten Punkte berühren, oder der einen gegebenen Kreis in einem bestimmten Punkte rechtwinkelig schneiden und zugleich einen andern gegebenen Kreis oder eine gegebene gerade Linie berühren soll.

§. 150.

Auch ist es einleuchtend, dass alle bisherigen Aufgaben, in welchen es sich um die Bestimmung eines Kreises handelt, der ein oder zwei gegebene Stücke (Kreise, gerade Linien, Punkte) berührt und resp. zwei oder einen Kreis rechtwinkelig schneidet, sobald man die Halbmesser der oder des rechtwinkelig zu schneidenden Kreises unendlich klein annimmt, in die bezüglichen Aufgaben der zweiten beziehungsweise dritten Abtheilung dieser Abhandlung übergehen. So gehen beispielsweise, den Halbmesser des gegebenen, rechtwinkelig zu schneidenden, Kreises unendlich klein angenommen, die Aufgabe des §. 126. in die des §. 76. und die Aufgabe des §. 144. in die des §. 112. über u. s. w.

Die fünfte Abtheilung dieser Abhandlung folgt in einem der nächsten Hefte.

XVI.

Bedeutung und Gültigkeit der allgemeinen Formeln für t und s der arithmetischen und der geometrischen Progression für den Fall, dass das n dieser Formeln eine gebrochene Zahl ist.

Von

Herrn *J. Helmes*,

Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Celle.

Veranlasst durch die sehr schätzenswerthe Abhandlung: „Ueber die mathematische Auflösung einiger Probleme der Naturlehre, welche auf Progressionen mit gebrochenen Indices führen. Von Dr. Carl Hechel. (Correspondenzblatt des Naturforschenden Vereins zu Riga. XI. Jahrgang. Nr. 6. vom 29. April 1859), welche ich einer gütigen Mittheilung des Herrn Verfassers vom Juli v. J. verdanke, erachte ich es nicht für überflüssig, meine eigenen, die genannte Aufgabe betreffenden, früher angestellten Ueberlegungen hier einer grösseren Oeffentlichkeit zu übergeben; einmal weil sich in dem ganzen Gange dieser Ueberlegungen eine selbst bis zur gleichen Bezeichnung gewisser auftretender Hülfsgrössen übereinstimmende Art der Behandlung der Aufgabe mit der des Herrn Hechel offenbart; besonders aber darum, weil dessungeachtet in das Resultat der Hechel'schen Betrachtung durch Missdeutung der Formel für t (§. 1.) und der Formel für s (§. 2.) an wesentlicher Stelle ein Fehler sich eingeschlichen hat, der um jeden Preis aus der sonst trefflichen Abhandlung auszumerzen

sein wird. Denn fürwahr, nicht gilt in einigen Fällen nur die Formel für t, in anderen Fällen nur die Formel für s, zwar so, dass nie beide Formeln zugleich gelten (§. 7.); im Gegentheile, das Resultat der folgenden Betrachtungen wird dieses sein: „dass die beiden Grundformeln der arithmetischen und der geometrischen Progression (und damit alle zwanzig Auflösungsformeln der Progression, die ja nichts anders, als sie selbst oder ihre Folgen sind), eine unbedingt allgemeine Gültigkeit haben, und dass darum die Ausdrücke:

$$1)\quad t = a + (n-1)d \qquad \text{und} \qquad t = ae^{n-1},$$

$$2)\quad s = \{2a + (n-1)d\}\frac{n}{2} \quad \text{und} \quad s = a \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1},$$

die ursprünglich nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung abgeleitet sind, dass n eine ganze Zahl ist, auch dann noch gelten, wenn n eine gebrochene Zahl, $n = n' + \frac{p}{q}$ ist; d. h. dass ganz allgemein

$$1)\quad t = a + (n' + \frac{p}{q} - 1)d \qquad \text{und} \qquad t = ae^{n' + \frac{p}{q} - 1},$$

$$2)\quad s = \{2a + (n' + \frac{p}{q} - 1)d\}\frac{n' + \frac{p}{q}}{2} \quad \text{und} \quad s = a \cdot \frac{e^{n' + \frac{p}{q}} - 1}{e - 1}$$

ist, unter Voraussetzungen nämlich, die durch Aufgaben der Art entweder schon ausdrücklich bestimmt oder doch als die natürlichsten Folgen ihrer Bestimmungen zunächst an die Hand gegeben sind.

Bei dem Beweise des aufgestellten Satzes werde ich, ohne weitere Beziehung auf die verdienstliche Arbeit Hechel's zu nehmen, ganz dem Gange der Entwickelung folgen, wie ich ihn für mich genommen hatte, als ich gewisse Schwierigkeiten lösen wollte, die ich vor der Bekanntschaft mit der genannten Arbeit nirgend anderswo gelöst oder als solche bezeichnet gefunden hatte.

Anmerkung. Wo ich hier und da einmal den Inhalt gewisser Formeln noch besonders durch einen Wortausdruck hervorzuheben habe, werde ich, um kurz zu sein, dabei immer nur die steigende Progression in's Auge fassen; die nöthige Aenderung des Ausdrucks für fallende Reihen ergiebt sich ja daraus von selbst.

I. Bedeutung und Allgemeingültigkeit der Formel für s.

§. 1.

Zwei vorbereitende Aufgaben, worin das s für eine gebrochene Gliederzahl, für $n = n' + \frac{p}{q}$, zu bestimmen ist, nebst Auflösungen derselben:

1. Eine Aufgabe, die auf eine arithmetische Reihe der gedachten Art führt.

Aufgabe. Ein Körper falle (an der Atwoodischen Fallmaschine) in gleichförmig beschleunigter Bewegung während der ersten Sekunde durch einen Raum $a = 10'$, während der zweiten Sekunde durch einen Raum $a + d = 30'$, während der dritten Sekunde durch einen Raum $a + 2d = 50'$, und so in jeder folgenden Sekunde durch einen Raum von $d = 20'$ mehr als in der vorhergehenden Sekunde. Durch welchen Raum s fällt der Körper in $n = n' + \frac{p}{q} = 10\frac{3}{4}$ Sekunden?

Auflösung. Vermöge des Begriffs der gleichförmig beschleunigten Bewegung werden auch die Fallräume in den auf einander folgenden Vierteln, allgemein in den $q$ten Theilen ($q$teln) der Sekunde, eine arithmetische Reihe bilden; und bezeichnen wir demnach den Fallraum im ersten Viertel, allgemein im ersten $q$tel der ersten Sekunde, mit α, so werden die Fallräume der folgenden $q$tel der ersten Sekunde sein:

$$\alpha + \delta,\ \alpha + 2\delta,\ \ldots\ \alpha + (q-1)\delta;$$

der zweiten Sekunde:

$$\alpha + q\delta,\ \alpha + (q+1)\delta,\ \ldots\ \alpha + (2q-1)\delta.$$

Zur Bestimmung von α und δ haben wir dann die beiden Gleichungen:

$$\alpha + \alpha + \delta + \alpha + 2\delta + \ldots + \alpha + (q-1)\delta = a, \qquad \text{(I)}$$

$$\alpha + q\delta + \alpha + (q+1)\delta + \alpha + (q+2)\delta + \ldots + \alpha + (2q-1)\delta = a + d; \qquad \text{(II)}$$

und daraus, durch Subtraktion der Gleichung (I) von Gleichung (II):

$$q\delta + q\delta + \ldots + q\delta = q.q\delta = d,$$

$$\delta = \frac{d}{q^2}; \qquad \text{(A)}$$

und demnach:

$$\alpha = \frac{2a - q(q-1)\delta}{2q} \text{ (nach (I))} = \frac{2aq - (q-1)d}{2q^2}. \qquad \text{(B)}$$

Dann aber ist der Fallraum in $(n' + \frac{p}{q})$ Sekunden $= (n'q + p = \nu)q$tel Sekunden, unser s, gleich der Summe σ einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied α, Differenz δ und Zahl der Glieder ν bekannt ist. Diese Summe σ, zugleich unser s, ist demnach bestimmt durch die Gleichung:

$$s = \sigma = \{2\alpha + (\nu - 1)\delta\}\frac{\nu}{2}$$

$$= \frac{2aq - (q-1)d + (n'q + p - 1)d}{q} \cdot \frac{n'q + p}{2q}$$

$$= \{2a' + (n' + \frac{p}{q} - 1)d\}\frac{n' + \frac{p}{q}}{2},$$

d. h. die Summenformel, wie sie für ganze n besteht, zeigt sich noch unverändert gültig auch für ein gebrochenes n, für $n = n' + \frac{p}{q}$, wofern man nur auch für die $q$ten Theile der Einheit (hier der Sekunde) an dem Gesetze der arithmetischen Reihe festhält, welches in der Aufgabe nur für ganze Einheiten aufgestellt war.

Substituiren wir in die allgemeinen Formeln die besonderen Werthe unserer Aufgabe, so erhalten wir $s = 1155\frac{5}{8}$ Fuss als den Fallraum der $10\frac{3}{4}$ Sekunden. Es ergiebt sich $\alpha = \frac{5}{8}$ als der Fallraum in dem ersten Viertel der ersten Sekunde, und $\delta = \frac{3}{4}$ als Unterschied des Fallraums zweier auf einander folgenden Viertel der Sekunde.

2. Eine Aufgabe, die auf eine geometrische Reihe der gedachten Art führt.

Der Preis eines Diamants sei also bestimmt, dass das erste Karat desselben $a = 20$ Thaler, und jedes folgende Karat desselben das $e = 2$fache des vorhergehenden kosten soll. Welches

wird der Preis s eines $n = n' + \frac{p}{q} = 10\frac{3}{4}$ Karat schweren Diamants sein?

Auflösung. Setzen wir, wie es durch die Aufgabe nahe gelegt und zunächst an die Hand gegeben ist, voraus, dass die Steigerung des Preises durch das Gewicht nach dem Gesetze einer geometrischen Reihe auch auf $q$tel (Viertel) des Karats sich erstrecke, so werden auch die Preise der auf einander folgenden $q$tel (Viertel) des Karats eine geometrische Reihe bilden. Bezeichnen wir demnach den Preis des ersten $q$tel (Viertel) des ersten Karats mit α, so werden die Preise der folgenden $q$tel sein:

$$\alpha\varepsilon,\ \alpha\varepsilon^2,\ \ldots.\ \alpha\varepsilon^{q-1};$$

für das zweite Karat:

$$\alpha\varepsilon^q,\ \alpha\varepsilon^{q+1}\ \ldots.\ \alpha\varepsilon^{2q-1}.$$

Zur Bestimmung von α und ε haben wir die beiden Gleichungen:

$$\alpha + \alpha\varepsilon + \alpha\varepsilon^2 + \ldots. + \alpha\varepsilon^{q-1} = a, \qquad \text{(I)}$$

$$\alpha\varepsilon^q + \alpha\varepsilon^{q+1} + \alpha\varepsilon^{q+2} + \ldots. + \alpha\varepsilon^{2q-1} = ae. \qquad \text{(II)}$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit ε^q, und vergleichen dieselbe mit der zweiten, so erhalten wir:

$$a.\varepsilon^q = ae,\quad \varepsilon^q = e,\quad \varepsilon = e^{\frac{1}{q}}; \qquad \text{(A')}$$

und demnach:

$$\alpha = a \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^q - 1}\ \text{(nach (I))} = a \cdot \frac{e^{\frac{1}{q}} - 1}{e - 1}. \qquad \text{(B')}$$

Dann aber ist der gesuchte Preis von $(n' + \frac{p}{q})$ Karat $= (n'q + p = \nu)q$tel Karat, unser s, gleich der Summe σ einer geometrischen Reihe, deren Anfangsglied α, Exponent ε und Zahl der Glieder ν bekannt ist. Diese Summe σ, zugleich unser s, ist demnach bestimmt durch die Gleichung:

$$s = \sigma = \alpha \cdot \frac{\varepsilon^\nu - 1}{\varepsilon - 1} = a \cdot \frac{e^{\frac{1}{q}} - 1}{e - 1} \cdot \frac{e^{\frac{n'q+p}{q}} - 1}{e^{\frac{1}{q}} - 1} = a \cdot \frac{e^{n' + \frac{p}{q}} - 1}{e - 1},$$

d. h. die Summenformel, wie sie für ganze n besteht, zeigt sich noch unverändert gültig auch für ein gebrochenes n, für $n = n' + \frac{p}{q}$, wofern man nur auch für die $q$ten Theile der Einheit (des Karats) an dem Gesetze der geometrischen Reihe festhält, welches ursprünglich nur für ganze Einheiten (Karat) aufgestellt war.

Substituiren wir in die allgemeinen Formeln die besondern Werthe unserer Aufgabe, so erhalten wir $s = 34423{,}12$ Thaler als den Preis der $10\frac{3}{4}$ Karat des Diamants. Es ergiebt sich $a = 3{,}78$ Thaler als der Preis des ersten Viertels des ersten Karats, und $\varepsilon = 1{,}189$ als der Exponent der nach Vierteln des Karats wachsenden Preise der Viertel-Karat.

§. 2.

Zusatz. Der Bildung der Reihen, durch deren Summirung in §. 1. die fragliche Summe einer Reihe mit gebrochener Gliederzahl erhalten wurde, lag die Voraussetzung zum Grunde, dass ein für das Intervall ganzer Zahlen (Sekunden, Karat) gegebenes Gesetz der Veränderlichkeit einer Reihe von Zahlen, (der Glieder der Reihen), auch auf die kleinern Intervalle zwischenliegender Brüche (Viertel, $q$tel) ausgedehnt werde; wie eine solche Voraussetzung in einigen Fällen gleich mit der Aufgabe selbst ursprünglich festgestellt (s. oben Beispiel 1.), in andern Fällen aber in consequenter Durchführung des gegebenen Gesetzes am natürlichsten und zunächst an die Hand gegeben ist (s. oben Beispiel 2.).

Unter solcher Voraussetzung also, wie wir sie, anknüpfend an die Auflösungen in §. 1., so eben in allgemeiner Fassung ausgesprochen haben, hat die allgemeine Summenformel eine unveränderte Gültigkeit auch für eine gebrochene Gliederzahl, für $n = n' + \frac{p}{q}$, und es ist immer:

$$s = \{2a + (n' + \frac{p}{q} - 1)d\} \frac{n' + \frac{p}{q}}{2}$$

und

$$s = a \cdot \frac{e^{n' + \frac{p}{q}} - 1}{e - 1};$$

weil die obigen σ, die den Werth der Summe unter dieser Vor-

aussetzung unzweifelhaft ausdrücken, die aufgestellten Werthe geben, diese aber zugleich die Werthe der allgemeinen Formel für s sind, wenn darin $n = n' + \frac{p}{q}$ gesetzt wird.

II. Bedeutung und Allgemeingültigkeit der Formel für t.

§. 3.

Lehrsatz. Die allgemeinen Formeln für t enthalten für den Fall, dass n eine gebrochene Zahl, $n = n' + \frac{p}{q}$ ist, in den Ausdrücken

$$t = a + (n' + \frac{p}{q} - 1)d \quad \text{und} \quad t = ae^{n' + \frac{p}{q} - 1}$$

die Ausdrücke für Glieder einer nach q interpolirten Reihe; und zwar für die $p$ten Glieder nach dem n'ten der Hauptreihe, oder für die $((n'-1)q+p)$ten Glieder dieser interpolirten Reihe selbst.

Beweis. Das allgemeine Schema einer nach q interpolirten Reihe sammt ihrer Hauptreihe ist:

Für die arithmetische Reihe:

$$a,\ a+\frac{d}{q},\ a+2.\frac{d}{q},\ \ldots.\ a+(q-1).\frac{d}{q},\ a+d,\ a+(q+1)\frac{d}{q},\ \ldots.$$

$$\ldots.\ a+(2q-1)\frac{d}{q},\ a+2d,\ \ldots.\ a+(n'-1)d,\ a+\{(n'-1)q+1\}.\frac{d}{q},\ \ldots.$$

$$\ldots.\ a+\{(n'-1)q+p\}.\frac{d}{q},\ \ldots.$$

Für die geometrische Reihe:

$$a,\ ae^{\frac{1}{q}},\ ae^{\frac{2}{q}},\ \ldots.\ ae^{\frac{q-1}{q}},\ ae,\ ae^{\frac{q+1}{q}},\ \ldots.\ ae^{\frac{2q-1}{q}},\ ae^2,\ \ldots.$$

$$\ldots.\ ae^{n'-1},\ ae^{\frac{(n'-1)q+1}{q}},\ \ldots.\ ae^{\frac{(n'-1)q+p}{q}},\ \ldots.$$

Schreiben wir nun die oben aufgestellten Ausdrücke für t in den veränderten Formen:

$$t = a + \{(n'-1)q+p\}\frac{d}{q} \quad \text{und} \quad t = ae^{\frac{(n'-1)q+p}{q}};$$

so erhellt die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung unmittelbar aus der Gleichheit dieser Ausdrücke für t mit den Ausdrücken für die genannten Glieder der interpolirten Reihe.

Für unsere Beispiele sind diese interpolirten Reihen, deren Gliedern wir gleich hier die weiter unten gerechtfertigte Bedeutung beischreiben, die folgenden:

In einer Sekunde, welche die letzte ist von:

1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, **2**, $2\frac{1}{4}$, ... **3**, ... **10**, $10\frac{1}{4}$, $10\frac{1}{2}$, $10\frac{3}{4}$ Sekunden

ist der Fallraum:

10, 15, 20, 25, **30**, 35, ...**50**, ... **190**, 195, 200, 205 Fuss.

Von einem Karat, welches das letzte ist von:

1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, **2**, $2\frac{1}{4}$, ... **3**, ... **10**, $10\frac{1}{4}$, $10\frac{1}{2}$, $10\frac{3}{4}$ Karat

ist der Preis:

20; 23,78; 28,28; 33,64; **40**; 47,57; ....**80**; ....**10240**; 12177,48; 14481,55; 17221,56 Thaler.

§. 4.

Folgesatz. Der Ausdruck des allgemeinen (letzten) Gliedes für den Fall einer gebrochenen Gliederzahl bezeichnet den Werth, welchen ein Glied der Hauptreihe an der durch den Bruch bezeichneten Stelle zwischen zwei auf einander folgenden Gliedern derselben annimmt, wofern das Gesetz der Veränderung der Glieder, welches ursprünglich nur für das Intervall zweier auf einander folgender ganzer Zahlen angegeben ist, auch auf die Intervalle zwischenliegender Brüche entsprechend ausgedehnt wird. So bezeichnet dieser Ausdruck in unseren Beispielen, wenn wir darin $n = 10\frac{3}{4}$ setzen, für das Beispiel 1. den Fallraum 205 Fuss in der letzten von $10\frac{3}{4}$ Sekunden, in der $10\frac{3}{4}$ten (man verstatte den Ausdruck) Sekunde, d. h. den Fallraum in dem letzten Viertel der 10ten und in den drei ersten Vierteln der 11ten Sekunde; und für das Beispiel 2. den Preis 17221,56 Thaler des letzten von $10\frac{3}{4}$ Karat, des $10\frac{3}{4}$ten Karats des Diamants, d. h. den Preis des letzten Viertels vom zehnten und der drei ersten Viertel vom eilften Karat.

Dass dies wirklich die Bedeutung der Glieder einer interpolirten Reihe und damit denn auch die Bedeutung des allgemeinen Gliedes unserer Reihe ist, liegt vollständig in dem Begriff der interpolirten Reihe und in der ursprünglichsten Bedeutung ihrer darnach gebildeten Glieder.

Somit könnte denn schon hier unsere Aufgabe als erledigt betrachtet werden, nachdem wir nämlich in den §§. 1. und 2. die Bedeutung und volle Gültigkeit der Summenformel, in den §§. 3. und 4. Dasselbe für die Formel des allgemeinen (letzten) Gliedes nachgewiesen haben, für den Fall, wo das n dieser Formeln eine gebrochene Zahl ist.

Um jedoch die Beweisführung für t unabhängig zu machen von der vorausgesetzten richtigen Deutung der interpolirten Reihe; zugleich, um die wahre Bedeutung der Glieder dieser Reihe, wie wir sie eben in der Erklärung eines $10\frac{3}{4}$ten Gliedes angewandt haben, auf ihre ersten Gründe zurückzuführen; wie auch vielfach anderer nützlicher Anwendung willen, fügen wir noch folgende zwei Paragraphen hinzu, die mithin nicht unerlässlich für die Auflösung unserer obigen Aufgabe sind.

§. 5.

Erklärung. Wir wollen in Beziehung auf die Reihen:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots.\ a+(n'+\frac{p}{q}-1)d$$

und

$$a,\ ae,\ ae^2,\ \ldots.\ ae^{n'+\frac{p}{q}-1}$$

als „Hauptreihen“ die nach §. 1. daraus abgeleiteten Reihen mit dem Anfangsglied α, der Differenz δ resp. dem Exponenten ε, und der Gliederzahl $\nu = n'q+p$, in denen je q auf einander folgende Glieder zusammengenommen einem entsprechenden Gliede der Hauptreihe gleich sind, „ihre (nach q) zerlegten Reihen“ nennen. Sie sind wohl zu unterscheiden von den §. 3. und §. 4. vorgekommenen „(nach q) interpolirten Reihen“; unter ihren Gliedern kommen durchaus nicht die Glieder der Hauptreihe vor; ihr α und δ, resp. ε, ist durch die Gleichungen (A) und (B) in §. 1. bestimmt, ihr ν ist jedesmal $= n'q+p$; und ihre Summe σ ist eben nichts anderes als die geforderte Summe s der Hauptreihe mit der gebrochenen Gliederzahl (§. 2.).

Das allgemeine Schema einer Hauptreihe mit ihrer nach q zerlegten Reihe ist darnach folgendes:

Für die arithmetische Reihe:

$$\begin{matrix} a, & a+d, & \ldots\ldots\ldots & a+(n'-1)d; \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha, \alpha+\delta, \ldots. \alpha+(q-1)\delta, & \alpha+q\delta, \ldots. \alpha+(2q-1)\delta, & \alpha+2q\delta, \ldots. \alpha+(n'q-1)\delta, & \alpha+n'q.\delta, \ldots. \alpha+(n'q+p-1)\delta. \end{matrix}$$

Für die geometrische Reihe:

$$\begin{matrix} a, & ae, & \ldots\ldots & ae^{n'-1}; \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha, \alpha\varepsilon, \ldots. \alpha\varepsilon^{q-1}, & \alpha\varepsilon^{q}, \ldots. \alpha\varepsilon^{2q-1}, & \alpha\varepsilon^{2q}, \ldots. \alpha\varepsilon^{n'q-1}, & \alpha\varepsilon^{n'q}, \ldots. \alpha\varepsilon^{n'q+p-1}. \end{matrix}$$

Wir wollen die einzelnen Folgen von jedesmal q Gliedern der zerlegten Reihe, wie sie zur Summe ein Glied der Hauptreihe geben, die diesem Gliede der Hauptreihe zugehörige Folge der zerlegten Reihe nennen. Darnach ist

das $p$te Glied der $(n'+1)$ten Folge der nach q zerlegten Reihe

für die arithmetische Reihe: $\alpha+(n'q+p-1)\delta$

für die geometrische Reihe: $\alpha\varepsilon^{n'q+p-1}$

und diese $(n'+1)$te Folge selbst giebt die Summe $a+n'd$, resp. $ae^{n'}$, welches die $(n'+1)$ten Glieder der Hauptreihe sind.

§. 6.

Lehrsatz. Das $p$te zwischen zwei Gliedern K und $K+d$, resp. K und Ke einer Hauptreihe eingeschaltete Glied einer nach q interpolirten Reihe ist gleich der Summe der p ersten Glieder der zum nachfolgenden Gliede $K+d$, resp. Ke, der Hauptreihe gehörenden Folge der zerlegten Reihe, sammt den $(q-p)$ letzten Gliedern der Folge des vorhergehenden Gliedes — oder: jedes Glied der nach q interpolirten Reihe ist gleich der Summe von den q auf einander folgenden Gliedern der nach q zerlegten Reihe, deren letztes an der Stelle des interpolirten Gliedes steht. (Vergl. für bestimmte Zahlen die Deutung des $10\frac{1}{2}$ten Gliedes in §. 4.).

Beweis.

1) Für die arithmetische Progression.

Das allgemeine Schema der Zusammenstellung einer nach q interpolirten und nach q zerlegten Reihe ist folgendes:

$$a,\ a+\frac{d}{q},\ \ldots.\ a+p\cdot\frac{d}{q},\ \ldots.\ a+d,\ \ldots.\ a+(n'-1)d=K,\ a+\{(n'-1)q+1\}\frac{d}{q},\ \ldots.\ a+\{(n'-1)q+p\}\frac{d}{q},\ \ldots.$$

$$\alpha,\ \alpha+\frac{d}{q^2},\ \ldots.\ \alpha+(p-1)\frac{d}{q^2},\ \ldots.\ \alpha+(q-1)\frac{d}{q^2},\ \alpha+q\cdot\frac{d}{q^2},\ \ldots.\ \alpha+(q+p-1)\cdot\frac{d}{q^2},\ \ldots.\ \alpha+(2q-1)\frac{d}{q^2},\ \ldots.$$

$$\ldots.\ \alpha+(n'q-1)\frac{d}{q^2},\ \alpha+n'q\cdot\frac{d}{q^2},\ \ldots.\ \alpha+(n'q+p-1)\frac{d}{q^2},\ \ldots.$$

Angewandt auf unser obiges Beispiel 1. werden diese Reihen folgende Gestalt annehmen:

Bei der Sekundenzahl:

$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, **1**, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, **2**, $2\frac{1}{4}$, ... **3**, ... **9**, $9\frac{1}{4}$, $9\frac{2}{4}$, $9\frac{3}{4}$, **10**, $10\frac{1}{4}$, $10\frac{2}{4}$, $10\frac{3}{4}$

ist der Fallraum in der letzten ganzen Sekunde:

-5, 0, 5, **10**, 15, 20, 25, **30**, 35, ... **50**, ... **170**, 175, 180, 185, **190**, 195, 200, 205 Fuss

in der letzten Viertel-Sekunde:

$\frac{5}{8}$, $1\frac{7}{8}$, $3\frac{1}{8}$, $4\frac{3}{8}$, $5\frac{5}{8}$, $6\frac{7}{8}$, $8\frac{1}{8}$, $9\frac{3}{8}$, $10\frac{5}{8}$, ... $14\frac{3}{8}$, ... $44\frac{3}{8}$, $45\frac{5}{8}$, $46\frac{7}{8}$, $48\frac{1}{8}$, $49\frac{3}{8}$, $50\frac{5}{8}$, $51\frac{7}{8}$, $53\frac{1}{8}$ Fuss.

Rückt die Folge der q Glieder der zerlegten Reihe, welche zur Summe das Glied K giebt, um eine Stelle in der zerlegten Reihe höher hinauf, so wird diese neue Summe von q Gliedern, deren jedes um $\delta = \frac{d}{q^2}$ grösser ist als ein entsprechendes Glied der vorigen Folge, um $q.\delta = \frac{d}{q}$, d. h. um die Differenz der interpolirten Reihe grösser werden, als die vorige Summe war, und somit dem ersten nach K eingeschalteten Gliede $K + \frac{d}{q}$ gleich sein. Ebenso wird die Summe der um 2, 3, ... p Stellen höher verschobenen Folge von q Gliedern der zerlegten Reihe $= K + 2.\frac{d}{q}$, $K + 3.\frac{d}{q}$, ... $K + p.\frac{d}{q}$, d. h. dem zweiten, dritten, ... $p$ten eingeschalteten Gliede in der interpolirten Reihe gleich sein. Eine solche Folge von q Gliedern, die dem $p$ten zwischen K und $K+d$ eingeschalteten Gliede gleich ist, enthält demnach die ersten p Glieder der zu $K+d$ gehörenden Folge nebst den übrigen $(q-p)$ letzten Gliedern der zu K gehörenden Folge der zerlegten Reihe, w. z. b. w.

Im obigen ersten Beispiele ist darnach das durch t für $n = 10\frac{3}{4}$ ausgedrückte $10\frac{3}{4}$te Glied, d. h. das 3te nach dem 10ten Gliede der Hauptreihe eingeschaltete Glied der nach 4 interpolirten Reihe, nämlich 205, gleich der Summe der vier Glieder der zerlegten Reihe:

$$49\tfrac{3}{8} + 50\tfrac{5}{8} + 51\tfrac{7}{8} + 53\tfrac{1}{8},$$

von denen die drei letzten die drei ersten der zum 11ten Gliede der Hauptreihe gehörenden Folge der zerlegten Reihe sind, das erste aber das letzte der zum 10ten Gliede gehörenden Folge, d. h. es ist der Fallraum in den vier Vierteln der letzten für n angenommenen Sekunden.

2) Für die geometrische Progression.

Das allgemeine Schema der Zusammenstellung einer nach q interpolirten und nach q zerlegten Reihe ist folgendes:

$$a,\ ae^{\frac{1}{q}},\ \ldots.\ ae^{\frac{p}{q}},\ \ldots.\ ae,\ ae^{\frac{q+1}{q}},\ \ldots.\ ae^{n'-1} = K,\ ae^{\frac{(n'-1)q+1}{q}},\ \ldots.\ ae^{\frac{(n'-1)q+p}{q}},\ \ldots.$$

$$a,\ ae^{\frac{1}{q}},\ \ldots.\ ae^{\frac{p-1}{q}},\ \ldots.\ ae^{\frac{q-1}{q}},\ ae^{\frac{q}{q}}\ \ldots.\ ae^{\frac{q+p-1}{q}},\ \ldots.\ ae^{\frac{2q-1}{q}},\ ae^{\frac{2q}{q}},\ \ldots.\ ae^{\frac{n'q-1}{q}},\ ae^{\frac{n'q}{q}},\ \ldots.\ ae^{\frac{n'q+p-1}{q}},\ \ldots.$$

Angewandt auf unser obiges Beispiel 2. nehmen diese Reihen folgende Gestalt an:

Bei der Zahl der Karate:

$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, **1**, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, **2**, $2\frac{1}{4}$, ... **3**, ... **9**, $9\frac{1}{4}$, $9\frac{2}{4}$, $9\frac{3}{4}$, **10**, $10\frac{1}{4}$, $10\frac{2}{4}$, $10\frac{3}{4}$

ist der Preis des letzten ganzen Karats:

11, 89; 14, 14; 16, 82; **20**; 23, 78; 28, 28; 33, 64; **40**; 47, 57; .... **80**; **5120**; 6088, 74; 7240, 77; 8610, 68; **10240**; 12205, 55; 14481, 54; 17221, 56;

des letzten Viertel-Karats:

3, 78; 4, 50; 5, 36; **6**, 36; 7, 57; 9, 00; 10, 71; **12**, 72; 15, 15; .... **25**, 44; .... **1679**, 22; 1937, 48; 2304, 06; 2740, 02; **3258**, 44; 3874, 96; 4608, 12; 5480, 04.

Rückt die Folge der q Glieder der zerlegten Reihe, deren Summe gleich K ist, um eine Stelle in der zerlegten Reihe höher hinauf, so ist die Summe dieser neuen Folge von q Gliedern, deren jedes das $e^{\frac{1}{q}}$fache eines entsprechenden Gliedes der vorigen Folge ist, offenbar das $e^{\frac{1}{q}}$fache der vorigen Summe, d. h. $= K.e^{\frac{1}{q}}$, d. h. gleich dem ersten nach K eingeschalteten Gliede der interpolirten Reihe. Eben so wird die Summe der um 2, 3, ... p Stellen höher verschobenen Folge von q Gliedern der zerlegten Reihe $= Ke^{\frac{2}{q}}$, $Ke^{\frac{3}{q}}$, ... $Ke^{\frac{p}{q}}$, d. h. gleich dem eben so vielten nach K eingeschalteten Gliede der interpolirten Reihe sein. Eine solche Folge von q Gliedern, die dem $p$ten nach K eingeschalteten Gliede gleich ist, enthält demnach die ersten p Glieder der zu Ke gehörenden Folge nebst den $(q-p)$ letzten Gliedern der zu K gehörenden Folge der zerlegten Reihe, w. z. b. w.

Im obigen zweiten Beispiel ist darnach das durch t für $n = 10\frac{3}{4}$ ausgedrückte $10\frac{3}{4}$te Glied, d. h. das 2te nach dem 10ten Gliede der Hauptreihe eingeschaltete Glied der nach vier interpolirten Reihe, nämlich 17221,56 gleich der Summe der vier Glie. der der zerlegten Reihe:

$$3258{,}44 + 3874{,}96 + 4608{,}12 + 5480{,}04,$$

von denen die drei letzten die drei ersten der zum 11ten Gliede der Hauptreihe gehörenden Folge der zerlegten Reihe sind, das erste aber das letzte der zum 10ten Gliede gehörenden Folge, d. h. es ist der Preis von den vier Vierteln des letzten der $10\frac{3}{4}$ Karat, d. h. der drei Viertel des 11ten und des letzten Viertels des 10ten Karats.

Sonach haben wir denn noch auf eine ursprüngliche von den Voraussetzungen des §. 4. unabhängige Weise die Bedeutung des allgemeinen (letzten) Gliedes der Progression für den Fall einer gebrochenen Gliederzahl, und damit zugleich vermöge §. 3. die Allgemeingültigkeit der Formel für dasselbe nachgewiesen. Was diesem ursprünglichen Beweise noch einen besondern Werth geben mag, ist die darin augenscheinlich hervortretende Erkenntniss, dass die, die Bedeutung und Gültigkeit der Formel für t bedingenden Voraussetzungen eben dieselben sind, welche für s festzuhalten waren, und in §. 2. allgemein ausgesprochen sind; denn beide Formeln leiten ihren Ursprung aus derselben zerlegten Reihe her.

Es sei mir nun noch verstattet, diese Gelegenheit zum Anschluss einiger den Gegenstand betreffenden

Zusätze und Bemerkungen

zu benutzen, die sich ohne weiteres als naheliegende Folgerungen des Vorhergehenden ergeben, und darum einer weiteren Ausführung eben nicht bedürftig sind.

1. Für die nach q zerlegten und nach q interpolirten Reihen sind:

für die geometrische Reihe die Exponenten gleich, beide gleich $e^{\frac{1}{q}}$;

für die arithmetische Reihe aber ist das $\delta = \frac{d}{q} : q = \frac{d}{q^2}$.

2. Die Voraussetzung $n' = 0$ bietet keine Schwierigkeit dar; für die interpolirte Reihe fordert sie die Fortsetzung der Interpolation über das erste Glied hinaus, und giebt so z. B. in den vor 10, dem Fallraum der ersten Sekunde liegenden Zahlen -10, -5, 0, $+5$ die Fallräume ganzer Sekunden, die $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1 Sekunde vor der als erste angenommenen Sekunde liegen u. s. w.

3. Gilt es in besonderm Falle die Berechnung der Bruchtheile des letzten, unvollendeten Gliedes für sich allein, wie in den obigen Beispielen die Berechnung des Fallraumes in den drei letzten Viertel-Sekunden der Zeit, den Preis der drei letzten Viertel-Karat des ganzen Gewichts: so kann dies einmal durch Subtraktion der beiden Summen geschehen, welche die allgemeine Formel für $n = n' + \frac{p}{q}$ und für $n = n'$ giebt. Sonst auch ursprünglich also: Man bestimme in den Reihen

$$\varkappa + (\varkappa + \delta) + \ldots + \varkappa + (q-1)\delta = a + n'd$$

und

$$\varkappa + \varkappa\varepsilon + \ldots + \varkappa\varepsilon^{q-1} = ae^{n'}$$

aus den ein für allemal nach §. 1. bekannten $\delta = \frac{d}{q^2}$ und $\varepsilon = e^{\frac{1}{q}}$, aus den ebenfalls bekannten $a + n'd$, resp. $ae^{n'}$, so wie aus q das erste Glied dieser Reihen $\varkappa$ (entsprechend unserem frühern α), und bilde dann zweitens die Summe von p Gliedern einer Reihe, in der das erste Glied $\varkappa$, die Differenz δ resp. Exponent ε, und

die Zahl der Glieder p bekannt sind, so wird dies die gesuchte Summe der Bruchtheile des letzten, unvollendeten Gliedes sein.

Auf unsere obigen Beispiele angewandt, giebt die erste Methode für die Summen s und s', jenachdem wir $n = 10\frac{3}{4}$ oder $n = 10$ setzen:

$$\begin{aligned} \text{im ersten Beispiel:}\quad & s = 1155\tfrac{3}{8}\ \text{Fuss} \\ & s' = 1000\quad \text{„} \\ \text{demnach}\quad & s - s' = 155\tfrac{3}{8}\ \text{Fuss} \end{aligned}$$

als Fallraum der letzten $\frac{3}{4}$ Sekunden der ganzen Zeit;

$$\begin{aligned} \text{im zweiten Beispiel:}\quad & s = 34423{,}12\ \text{Thaler} \\ & s' = 20460\quad \text{„} \\ \text{demnach}\quad & s - s' = 13963{,}12\ \text{Thaler} \end{aligned}$$

als Preis der letzten $\frac{3}{4}$ Karat des ganzen Gewichts.

Nach der zweiten Methode ist für das erste Beispiel:

$$x = \frac{2.210 - 4.3.\frac{1}{4}}{8}\ (\text{§. 1. (B)}) = 49\tfrac{3}{8}\ \text{Fuss}$$

(Fallraum im ersten Viertel der 11ten Sekunde),

und darnach die Summe dreier Glieder mit der Differenz $\delta = \frac{5}{4}$, wie oben $= 155\frac{3}{8}$ Fuss;

für das zweite Beispiel:

$$x = 20480 . \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^4 - 1}\ (\text{§. 1. (B')}) = 3874{,}96\ \text{Thaler}$$

(Preis vom ersten Viertel des 11ten Karats),

und darnach die Summe dreier Glieder mit dem Exponenten $\varepsilon = 1{,}189$ gleich 13963,12 Thaler, wie oben gleich dem Preise der drei Viertel des 11ten Karats.

4. Es ist ganz unmöglich, die Entwicklung der Summenformel für gebrochene n in der Weise zu vollziehen, dass man

$$s = a + (a + d) + \ldots + a + (n' + \frac{p}{q} - 1)d$$

oder

$$s = a + ae + \ldots + ae^{n' + \frac{p}{q} - 1}$$

setzte; denn da die Glieder der rechten Seite auch die Werthe

des ersten und des letzten ganzen Gliedes der Reihe enthalten, so kann ihre Summe nicht die geforderte Summe darstellen, als in welcher niemals das ganze erste und das ganze letzte Glied zugleich vorkommen können. Wie dennoch die Summenformel schliesslich ganz dieselbe Form erhält, wie sie aus der Anwendung des für ganze n gebräuchlichen Verfahrens auf diese offenbar unstatthaften Gleichungen hervorgehen würde: kann für die arithmetische Progression wohl am einfachsten vorgestellt werden durch das arithmetische Mittel von a und t, welches als solches der Durchschnittswerth eines Gliedes der Progression ist; für die geometrische Progression aber ersehe ich nicht eine so einfache Vorstellung, durch welche das Resultat einer vorgängigen Zerlegung und nachmaligen Wiederverknüpfung ganzer Zahlen und Brüche in der unveränderten Form ganzer Zahlen von vornherein gefordert würde.

5. Wollte man der Summe der ganzen (n') Glieder noch $\frac{p}{q}$ eines folgenden ganzen Gliedes zulegen, $\frac{p}{q}(a+n'd)$ resp. $\frac{p}{q}.ae^{n'}$, so würde man in beiden Fällen zuviel zulegen, und zwar bei der arithmetischen Progression zuviel um die von der Zahl (n') des Gliedes unabhängige und in diesem Sinne constante Grösse $\frac{p}{q}.\frac{q-p}{q}.\frac{d}{2}$; bei der geometrischen Progression zuviel um die von der Zahl (n') des Gliedes abhängige Grösse

$$ae^{n'}\left\{\frac{p}{q}-\frac{e^{\frac{p}{q}}-1}{e-1}\right\};$$

wie eine Vergleichung der durch die allgemeine Summenformel gegebenen wahren Summe mit der in angegebener Weise substituirten, oder die nach Nr. 3. ursprünglich zu vollziehende Berechnung der Bruchtheile des letzten, unvollendeten Gliedes beweist.

Die angegebene Art der Summenbildung möchte man allenfalls anwenden wollen bei Aufgaben wie folgende:

> Ein Diener soll von seinem Herrn das erste Jahr 10 Thaler, und in jedem folgenden Jahre 1 Thaler mehr als Lohn erhalten. Wieviel erhielt er für's letzte Jahr, und wieviel im Ganzen, wenn er $7\frac{3}{4}$ Jahr diente?

wo man von einer Steigerung des Lohnes durch die Dienstzeit innerhalb des Zeitraumes eines Jahres; und so bei Aufgaben der Art überhaupt von einer Stetigkeit der Steigerung der Glieder abzusehen geneigt sein kann. (Der Unterschied beträgt im gege-

benen Falle, übereinstimmend mit dem allgemeinen Ausdrucke desselben, $\frac{3}{32}$ Thaler).

Aber wenig gerechtfertigt ist eine fehlerhafte Rechnung der Art, wie sie sich gleichwohl die herkömmliche Praxis durchweg angeeignet hat, in dem häufig vorkommenden Falle der Zinseszinsrechnung, „wo der Bestand eines Kapitals C, welches zu dem Zinsfuss z (Zinsen der Kapitaleinheit in der Zeiteinheit, $= \frac{p}{100}$, wofern p Procente bezeichnet) steht, nach einer Zeit $n = n' + \frac{p}{q}$ (Jahren) gesucht wird."

Die allgemeine Formel

$$E = C(1+z)^{n'+\frac{p}{q}} = C(1+z)^{\frac{n'q+p}{q}}$$

giebt diesen Bestand unbedingt richtiger an, als die herkömmliche Praxis, die

$$E = C(1+z)^{n'}\{1+\frac{p}{q}z\}$$

setzt. Die allgemeine Formel berechnet nämlich den Bestand für den Ablauf von $\nu(=n'q+p)$ $q$tel Jahren, nachdem sie den Zinsfuss demgemäss geändert, und als $(1+z)^{\frac{1}{q}}$ für $q$tel Jahre eingerichtet hat. Die Praxis beeinträchtigt den Zinsengeber, bevorzugt den Zinsennehmer. Also weit gefehlt, dass die allgemeine Formel hier zu unstatthaften Resultaten führte, wie es so allgemein! heisst, nimmt sie es nur genauer als die übliche Praxis, deren Eigensinn man gleichwohl sich fügen muss. (Cf. Heis: Beispielsammlung §. 84. Nr. 26., passim).

6. Bemerkenswerth ist die Form des Ausdrucks für das allgemeine (letzte) Glied der arithmetischen Progression, in welcher

$$t = a + (n' + \frac{p}{q} - 1)d = \frac{p}{q}(a + n'd) + \frac{q-p}{q}\{a + (n'-1)\,d\}$$

gesetzt wird, z. B. der Fallraum in der letzten von den $10\frac{3}{4}$ Sekunden des obigen Beispiels $= \frac{3}{4}$ des Fallraums der 11ten Sekunde $+\frac{1}{4}$ des Fallraums der 10ten Sekunde; oder der Lohn des letzten Jahres der $7\frac{3}{4}$jährigen Dienstzeit in dem Beispiel der vorigen Nr. 4. $= \frac{3}{4}$ des Lohnes für's achte Jahr $+\frac{1}{4}$ des Lohnes fürs siebente Jahr. Denn denselben Ausdruck für's letzte Glied

würde man auch bilden bei der fehlerhaften Auffassung desselben, die wir in Nr. 4. als Grund einer falschen Summenbildung bezeichnet haben. Der Ausdruck wird aber bei dieser fehlerhaften Auffassung auch nur darum richtig, weil sich zwei Fehler darin gegenseitig aufheben. Nämlich $\frac{3}{4}$ eines eilften resp. achten Gliedes in den genannten Beispielen sind um eben so viel grösser, als die drei ersten Glieder der dem eilften resp. achten Gliede zugehörenden Folge, um wie viel $\frac{1}{4}$ des zehnten resp. siebenten Gliedes kleiner ist als das letzte Glied der ihnen zugehörenden Folge; wie sich das in vollster Allgemeinheit aus dem Nr. 4. gegebenen Ausdrucke dieser Unterschiede ergiebt. Bei der geometrischen Progression, wo eine solche Compensation der Fehler nicht eintritt (cf. Nr. 4.), würde solche fehlerhafte Auffassung darum zu einem ganz unrichtigen Resultate führen.

7. Schliesslich sei mir noch zu bemerken erlaubt, dass Aufgaben der Art, wie sie sich z. B. bei Heis §. 82. Nr. 8. und sonst wohl finden (vergl. auch Hechel §. 1. Aufgabe 4.) als: „Wenn ein senkrecht in die Höhe steigender Körper in der ersten Sekunde 1000 Fuss, in jeder folgenden aber $31\frac{1}{4}$ Fuss weniger, als in der vorhergehenden zurücklegt, wie lange und wie hoch wird der Körper steigen, und nach wie viel Sekunden wieder an dem Punkte anlangen, von dem er zu steigen anfing?“ aus den Lehren der Progression allein nicht zu lösen sind; es fehlt neben den Angaben von $a=1000$ und $d=-31\frac{1}{4}$ ein drittes, in der Auflösung an angeführter Stelle fälschlich als $t=d=31\frac{1}{4}$ vorausgesetztes Argument. Es ist aber t weder $=31\frac{1}{4}$ zu setzen, noch $=0$, wie eine andere gleich irrige Voraussetzung in die Aufgabe leicht hinein gelesen werden mag, sondern $t=\frac{1}{2}d$ zu setzen, wie dies aus der Natur der gleichförmig verzögerten Bewegung beim Steigen der Körper zu entlehnen ist. Dann ergiebt sich das richtige n als $32\frac{1}{2}$ Sekunden, während das fälschlich angegebene $n=32$ oder das eben so nahe liegende $n=33$ der Aufgabe nicht genügt. Für $n=32$ würde ja auch die Steighöhe (16500 Fuss) eine andere als die Fallhöhe (16000 Fuss) werden! Der Fehler liegt darin, dass von der Sekunde, wo die Steighöhe $=0$ ist, in Wahrheit die eine Hälfte noch aufs Steigen, die andere aber schon aufs Fallen kommt, wie es der Natur der vorliegenden Bewegung entspricht. Der Mangel der Bestimmtheit genannter Aufgaben hätte am leichtesten dadurch gehoben werden können, dass man die ganze Bewegung des Steigens und Fallens als eine einzige durch die arithmetische Progression: $a=1000$, $d=31\frac{1}{4}$, $t=-1000$ (eine Art, den Begriff der vorliegenden Bewegung in der Aufgabe auszudrücken)

gegebene ansah, und dann die Hälfte des resultirenden $n(=65)$ als die Zeit des Steigens nahm. — Die ganze Aufgabe, wie weit sie nur die Anwendung der Progressions-Sätze betrifft, wird zweckmässig ersetzt durch die allgemeinere: Ein Körper bewegt sich mit abnehmender Schnelligkeit also, dass er in der ersten Sekunde a Fuss, in jeder folgenden d Fuss weniger zurücklegt als in der vorhergehenden Sekunde; nach wie viel Sekunden wird er die Schnelligkeit $-a$ erreicht haben; wo das Resultat $n=\frac{2a}{d}+1$ nach den verschiedenen Annahmen für a zugleich lehrreiche Beispiele für die Bedeutung eines gebrochenen n darbietet.

XVII.

Beiträge zur Lehre vom Maximum und Minimum.

Von

Herrn *Brenner*

zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

I.

Vom Maximum und Minimum, dem eine Gerade unterworfen ist, welche von einem gegebenen Punkte an einen gesuchten, in einer Curve gelegenen, Punkt geht, Punkt und Curve in derselben Ebene gedacht.

Sind die Coordinaten der Curve durch x und y, und die des gegebenen Punktes A durch a und b dargestellt, so ist für die fragliche Linie:

$$u=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2},$$

und man hat als Bedingung des Maximum Minimum:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{(a-x)+(b-y)\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}} = 0,$$

woraus folgt:

1) $$-\frac{dx}{dy} = \frac{b-y}{a-x}.$$

$-\frac{dx}{dy}$ ist die Tangente des Winkels, den die Normale der Curve mit der Abscissenachse macht. Eben so ist $\frac{b-y}{a-x}$ die Tangente desjenigen Winkels, den eine durch die Punkte (a, b) und (x, y) gehende Gerade mit derselben Achse bildet; woraus folgt, dass die gesuchte Linie mit der Normale der Curve zusammenfällt. Verbindet man nun mit der Bedingungsgleichung

2) $$\frac{dy}{dx}(b-y)+(a-x)=0$$

die Gleichung der Curve

3) $$y = f(x),$$

so ergeben sich hieraus die Coordinaten x_1 und y_1 des Punktes, in welchem das Maximum Minimum stattfindet.

Wollten wir zur Auffindung des Maximum Minimum setzen:

$$\frac{du}{dx} = \infty,$$

so würde diess führen auf:

$$(a-x)^2+(b-y)^2=0, \quad \text{d. h.} \quad u=0.$$

Der gegebene Punkt befände sich auf der Curve selbst und der gesuchte würde mit ihm zusammenfallen, so dass hier von keinem Maximum Minimum mehr die Rede sein könnte, wenn man nicht $u=0$ als ein Minimum betrachten wollte. Dessungeachtet dürfte in vielen Fällen der gegebene Punkt in der Curve selbst liegen und doch könnte man nach einem Maximum Minimum fragen. Indem wir daher hier nicht die Bedingung $\frac{du}{dx}=\infty$, sondern nur $\frac{du}{dx}=0$ festsetzen, so gibt der zur Entscheidung, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt, dienende Differentialcoefficient:

4) $$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}}{u}.$$

Um diese Lehren auf Polar-Coordinaten überzutragen, so setzen wir den Radius Vector $=r$ und den Winkel, den derselbe mit der angenommenen Achse macht, $=\alpha$, und wir haben:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha.$$

Hierdurch ergibt sich:

$$u = \sqrt{(a-r\cos\alpha)^2+(b-r\sin\alpha)^2}$$

und

$$\frac{du}{dx} = -\frac{dr(a\cos\alpha+b\sin\alpha-r)+r(b\cos\alpha-a\sin\alpha)}{u},$$

so dass 2) zu ersetzen ist durch:

5) $$dr(a\cos\alpha+b\sin\alpha-r)+r(b\cos\alpha-a\sin\alpha) = 0,$$

womit sich noch die Gleichung der Curve

6) $$r = \varphi(\alpha)$$

zu verbinden hat, um r und α zu bestimmen.

Ferner ist 4) zu ersetzen durch:

$$\frac{d^2u}{du^2}$$

$$= \frac{r(b\sin\alpha+a\cos\alpha)+dr^2+2dr(a\sin\alpha-b\cos\alpha)-d^2r(a\cos\alpha+b\sin\alpha-r)}{u};$$

und ist nun der Zähler dieses Bruches positiv, so liegt ein Minimum, und negativ, ein Maximum vor.

Zur Anwendung auf ein specielles Beispiel setzen wir für die gegebene Curve einen Kegelschnitt.

Ist $e<1$ oder $=1$ oder >1, so ist:

$$r = \frac{p}{1+e\cos\alpha}$$

die Gleichung für die Ellipse, Parabel und Hyperbel, mit der einzigen Modification, dass sie in Beziehung auf die Hyperbel nur den näher liegenden Arm liefert. Daraus hat man:

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{pe\sin\alpha}{(1+e\cos\alpha)^2},$$

wodurch 5) übergeht in:

7) $$pe\sin\alpha+(1+e\cos\alpha)[a\sin\alpha-b(e+\cos\alpha)]=0.$$

Geht man auf ein neues Coordinatensystem über, so dass zwar der alte und neue Anfangspunkt zusammenfallen, die neue Achse aber durch den gegebenen Punkt selbst geht, so wird die neue Ordinate $b'=0$ und die neue Abscisse $a'=\sqrt{a^2+b^2}$. Macht nun die neue Achse mit der alten den Winkel w und ersetzen wir α durch $\alpha'+w$, wo jetzt α von der neuen Achse an gezählt wird, so wird die Gleichung der Curve:

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\alpha+w)}$$

und die Gleichung 5) geht über in:

8) $$\frac{pe}{a'}\sin(\alpha+w)+(\sin\alpha-e\sin w)[1+e\cos(\alpha+w)]=0.$$

Ist der gegebene Punkt nicht sehr weit von der Curve entfernt, so kann man für einen ersten Näherungswerth setzen $\sin\alpha=\alpha$ und $\cos\alpha=1$, weil α klein ist, und es entwickelt sich aus 8):

$$\alpha=\frac{e\sin w(1+e\cos w-\frac{p}{a'})}{e\cos w(1+\frac{p}{a'})+e(1+e\sin w)}.$$

Für einen Punkt, der in der grossen Achse der Curve selbst liegt, hat man b oder auch $b'=0$ und $w=0$, und es ergibt sich sowohl aus 7) als auch aus 8):

$$\sin\alpha(pe+a+ae\cos\alpha)=0.$$

Diese Gleichung liefert die vier Werthe:

$$\alpha=0,\quad \alpha=180^0;$$

und wenn der Werth α' die Gleichung $\cos\alpha=-\left(\frac{p}{a}+\frac{1}{e}\right)$ befriedigt,

$$\alpha=\alpha' \text{ und } \alpha=360^0-\alpha'.$$

Ist aber $\frac{p}{a}+\frac{1}{e}>\pm 1$, so giebt es nur zwei Punkte, in denen ein Maximum Minimum stattfindet.

Um zu entscheiden, wie viele Maxima Minima im Allgemeinen höchstens existiren, gehe man zur Bedingung

$$(a-x)+(b-y)\frac{dy}{dx}=0$$

zurück, und verbinde sie zunächst mit der Gleichung für die Ellipse und Hyperbel:

$$y^2=B^2\pm\frac{B^2x^2}{A^2},$$

so verwandelt sich diese Differentialgleichung in:

$$A^2ay-xy(A^2\mp B^2)\pm bx=0.$$

Diese beiden Gleichungen, die durch ihre Auflösung beziehlich der Werthe x und y die M. M. Punkte bestimmen, sind die Gleichungen von zwei Kegelschnitten. Ihre Durchschnittspunkte liefern graphisch die gesuchten Punkte, und da zwei Kegelschnitte sich höchstens in vier Punkte schneiden, so sehen wir, dass es höchstens vier M. M. Punkte giebt.

Für die Parabel aber ergibt sich bei Benutzung ihrer Gleichung $y^2=2px$, :

$$y^3+2py(p-a')-2p^2b=0,$$

wo a' die vom Scheitel an gerechnete Abscisse des Punktes A ist. Will man aber hier die Gleichung 7) in Anwendung bringen, so muss man $e=1$ setzen und hat:

$$p\sin\alpha+(1+\cos\alpha)[a\sin\alpha-b(1+\cos\alpha)]=0,$$

oder

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha^3+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{2a+p}{p}\right)-\frac{2b}{p}]=0,$$

welche Gleichung zuerst gibt:

$$\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{\pi}{2}\quad\text{und}\quad\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{3\pi}{2}.$$

Diese Werthe geben $\alpha=180^0$ und $\alpha=540^0$, und es gib tdie Gleichung der Parabel

$$r=\frac{p}{1+\cos\alpha},$$

$r=\infty$, wodurch ein unendlich entfernter, folglich gar kein Punkt angezeigt wird. Die andere Gleichung:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha^3+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{2a+p}{p}\right)-\frac{2b}{p}=0$$

kann höchstens drei Werthe liefern, so wie es auch mit

$$y^3+2py(p-a')-2p^2b=0$$

der Fall ist. Demnach bietet die Parabel höchstens drei M. M. Punkte dar. Für die Grenze, wo beide Gleichungen anfangen, zwei imaginäre Werthe zu liefern, hat man vermöge der Cardanischen Formel:

$$b^2p-\left(\frac{2ap}{2}\right)^3=0,$$

wenn man bedenkt, dass $a+a'=\frac{1}{2}p$.

Betrachtet man a als Abscisse und b als Ordinate einer Curve, so zeigt diese Gleichung diejenige Curve — eine Parabel höherer Ordnung — an, in welcher die Scheidung zwischen drei M. M. Punkten und einem M. M. Punkte stattfindet.

II.

Vom Maximum und Minimum, dem die Summe zweier Geraden unterworfen ist, die von zwei gegebenen Punkten an einen gesuchten in einer Curve gelegenen Punkt gezogen sind, Punkte und Curve in derselben Ebene gedacht.

Es seien die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte A und B: a, b und a', b', so wie die Coordinaten der gegebenen Curve x, y, so ist die Summe der zwei an den gesuchten Punkt M (Taf. II. Fig. 3.) in der Curve CV gezogenen Geraden AM und BM:

1) $$S=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}+\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}.$$

Die Bedingung des Maximum Minimum liefert nun die Gleichung:

2)

$$\frac{dS}{dx}=-\frac{(a-x)+(b-y)\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}-\frac{(a'-x)+(b'-y)\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}}=0,$$

woraus folgt:

3)

$$-\frac{dx}{dy}=\frac{(b'-y)\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}+(b-y)\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}}{(a'-x)\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}+(a-x)\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}}.$$

Theilen wir nun den Winkel AMB in zwei gleiche Theile und untersuchen, ob nicht die Theilungslinie LM eine Normale der Curve ist. Ziehen wir MN parallel mit der Abscissenachse OX, so müsste in diesem Falle sein:

$$\operatorname{tg} LMN=-\frac{dx}{dy}.$$

Wir haben aber

$$\operatorname{tg} 2LMN=\operatorname{tg}(BMN+AMN)=\frac{(b-y)(a'-x)+(b'-y)(a-x)}{(a-x)(a'-x)-(b-y)(b'-y)}.$$

Da man nun die Gleichung hat:

$$\operatorname{tg} 2Z(1-\operatorname{tg} Z^2)=2\operatorname{tg} Z,$$

so setze man in diese Gleichung $Z=LMN$ und für $\operatorname{tg} LMN$ und $\operatorname{tg} 2LMN$ obige Werthe, während $-\frac{dx}{dy}$ durch dessen Werth in 3) ersetzt wird. Macht man noch zur Abkürzung:

$$a-x=A,\quad a'-x=A;$$

$$b-x=B,\quad b'-x=B';$$

so ergibt sich:

$$\frac{AB'+A'B}{AA'-BB'}\left[1-\left(\frac{B'\sqrt{A^2+B^2}+B\sqrt{A'^2+B'^2}}{A'\sqrt{A^2+B^2}+A\sqrt{A'^2+B'^2}}\right)^2\right]$$

$$=2.\frac{B'\sqrt{A^2+B^2}+B\sqrt{A'^2+B'^2}}{A'\sqrt{A^2+B^2}+A\sqrt{A'^2+B'^2}},$$

eine Gleichung, von deren Identität man sich bald überzeugt. Es folgt hieraus, dass AM und BM mit der Normale gleiche Winkel machen, und zwar geht die Normale mitten zwischen A und B so hindurch, dass der eine Punkt auf der einen, der andere aber auf der andern Seite derselben gelassen wird, weil $2LMN = BMN+AMN$.

Um den gesuchten Punkt zu bestimmen, ist noch die Gleichung der Curve selbst, nämlich:

4) $$y = f(x),$$

mit der Gleichung 2) zu verbinden.

Beachtend jedoch, dass die Lehre vom Maximum Minimum auch erfordert, $\frac{dS}{dx} = \infty$ in Untersuchung zu ziehen, so ist noch zu verbinden:

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = 0 \text{ mit } 4),$$

$$(a'-x)^2 + (b'-y)^2 = 0 \text{ mit } 4),$$

so wie diese beiden Gleichungen zu gleicher Zeit mit 4). Da jedoch in den beiden ersten Fällen A mit M oder B mit M zusammenfällt, so zieht sich die Summe u auf die Verbindungslinie der gegebenen Punkte zurück und kann, wenn man will, als absolutes Minimum betrachtet werden. Der dritte Fall könnte nur dann stattfinden, wenn alle drei Punkte A, B und M mit einander zusammenfielen und zwar in einem Punkte der Curve selbst, welchen Fall unsere Frage nach einem Maximum Minimum gar nicht zulässt. Wir werden daher nur allein 2) mit 4) in Verbindung setzen. — Die Entscheidung aber, ob ein Maximum oder ein Minimum vorherrscht, gibt das Vorzeichen der Function $\frac{d^2S}{dx^2}$. Wir haben aber, wenn wir

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = u \quad \text{und} \quad \sqrt{(a'-x)^2 + (b'-y)^2} = u'$$

setzen:

5)

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{1}{u^3}\{u^2[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (b-y)\frac{d^2y}{dx^2}] - \tfrac{1}{2}[(a-x) + (b-y)\frac{dy}{dx}]^2\}$$

$$+ \frac{1}{u'^3}\{u'^2[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (b'-y)\frac{d^2y}{dx^2}] - \tfrac{1}{2}[(a'-x) + (b'-y)\frac{dy}{dx}]^2\}.$$

Wollen wir, statt der rechtwinkligen, Polar-Coordinaten anwenden, so verwandelt sich unter denselben Voraussetzungen, wie in I., und wenn wir

$$\sqrt{(a - r\cos\alpha)^2 + (b - r\sin\alpha)^2} = u$$

und

$$\sqrt{(a' - r\cos\alpha)^2 + (b' - r\sin\alpha)^2} = u'$$

setzen, die Gleichung 2) in

6)

$$\frac{dS}{d\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} u'[dr(a\cos\alpha + b\sin\alpha - r) + r(b\cos\alpha - a\sin\alpha)] \\ +u[dr(a'\cos\alpha + b'\sin\alpha - r) + r(b'\cos\alpha - a'\sin\alpha)] \end{array} \right\} = 0,$$

mit der noch die Gleichung der Curve

7) $$r = \varphi(\alpha)$$

zu verbinden ist.

Setzen wir jetzt:

$$dr(a\cos\alpha + b\sin\alpha - r) + r(b\cos\alpha - a\sin\alpha) = U,$$

$$dr(a'\cos\alpha + b'\sin\alpha - r) + r(b'\cos\alpha - a'\sin\alpha) = U';$$

so ist

$$\frac{dS}{d\alpha} = -\frac{u'U + uU'}{uu'}.$$

Wollen wir hieraus das zweite Differential von S entwickeln, so haben wir, da $u'U + uU' = 0$ gesetzt worden ist,

$$\frac{d^2S}{d\alpha^2} = -\frac{Udu' + u'dU + U'du + udU'}{uu'}.$$

Allein es ist:

$$du' = -\frac{U'}{u'} \quad \text{und} \quad du = -\frac{U}{u},$$

und wenn wir diese Werthe substituiren, so zeigt sich, dass 5) zu ersetzen ist durch

$$\frac{d^2S}{d\alpha^2} = \frac{(u+u')UU' - uu'(u'dU + udU')}{u^2u'^2},$$

so dass, wenn

8) $$(u+u')UU' - uu'(u'dU + udU')$$

positiv ist, ein Minimum, und negativ, ein Maximum vorliegt.

Wählen wir zur Anwendung dieser Lehren als Curve den Kreis, so haben wir folgender Bedingung zu genügen:

$$\frac{a - x + (b-y)\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}} + \frac{a' - x + (b'-y)\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(a'-x)^2 + (b'-y)^2}} = 0.$$

Die Gleichung des Kreises

$$r^2 = x^2 + y^2$$

liefert aber

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

und dieses substituirt, gibt:

$$\frac{y(a-x)-(b-y)x}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}} + \frac{y(a'-x)-(b'-y)x}{\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}} = 0.$$

Nehmen wir nun für einen Augenblick an, die Abscissenachse habe die Lage, dass sie den Punkt D (Taf. II. Fig. 4.) des Maximum Minimum in der Peripherie gerade treffe, und setzen wir die Ordinaten des Punktes A für diese Abscisse gleich α und β, so wie diejenigen des Punktes B gleich α' und β'; so wird, indem hier $y = 0$ und $x = r$:

$$9) \qquad \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha-r)^2+\beta^2}} + \frac{\beta'}{\sqrt{(\alpha'-r)^2+\beta'^2}} = 0.$$

Quadriren wir, reduciren und ziehen wir wieder die Wurzel aus, so ergibt sich:

$$\frac{\beta}{\alpha-r} = \pm\frac{\beta'}{\alpha'-r}.$$

Die Gleichung 9) wird nur dann befriedigt, wenn wir das negative Zeichen nehmen, und so substituiren wir der Bedingung 9) die andere:

$$10) \qquad \frac{\beta}{\alpha-r} + \frac{\beta'}{\alpha'-r} = 0.$$

Setzen wir den Winkel $DCX = w$, so haben wir:

$$\alpha = b\sin w + a\cos w, \quad \beta = b\cos w - a\sin w;$$

$$\alpha' = b'\sin w + a'\cos w, \quad \beta' = b'\cos w - a'\sin w.$$

Die Bedingung 10) liefert nun die Gleichung:

$$11) \qquad 2\sin w\cos w(aa'-bb')$$

$$+(\sin w^2-\cos w^2)(ab'+ba')+r\cos w(b+b')-r\sin w(a+a')=0,$$

oder auch:

$$\sin 2w(aa'-bb')-\cos 2w(ab'+ba')+r\cos w(b+b')-r\sin w(a+a')=0.$$

Diese Gleichung lässt sich vereinfachen, wenn wir auf solche Weise zu einem neuen Coordinatensystem übergehen, dass die neue Abscissenachse CX' den Winkel ACB halbirt. Unter dieser Bedingung ist:

$$X'CX = \tfrac{1}{2}(ACX + BCX),$$

und folglich, wenn wir $X'CX = v$ setzen:

$$\operatorname{tg} 2v = \frac{ba' + ab'}{aa' - bb'}.$$

Setzen wir die neuen Coordinaten der Punkte A und B gleich A, B und A', B', so ist:

$$A = b\sin v + a\cos v, \qquad B = b\cos v - a\sin v;$$

$$A' = b'\sin v + a'\cos v, \qquad B' = b'\cos v - a'\sin v;$$

und wenn wir die von CX' an gezählten Winkel $= \gamma$ setzen, wie wir die von CX an gezählten $= w$ gesetzt haben, so erhält die neue zur Bestimmung von γ dienende Gleichung dieselbe Form wie 11), nur dass w mit γ und a, b, a', b', mit A, B, A', B' verwechselt erscheinen. Namentlich aber ist zu bemerken, dass das zweite Glied ganz wegfällt, denn es ist:

$$AB' + BA' = (\cos v^2 - \sin v^2)(ba' + ab') - 2\sin v \cos v (aa' - bb'),$$

und da

$$\frac{2\sin v \cos v}{\cos v^2 - \sin v^2} = \operatorname{tg} 2v = \frac{ba' + ab'}{aa' - bb'},$$

so ist

$$AB' + BA' = 0,$$

woraus obige Behauptung hervor geht. Somit haben wir:

12)

$$2\sin\gamma\cos\gamma(AA' - BB') + r\cos\gamma(B + B') - r\sin\gamma(A + A') = 0,$$

oder wenn mit $\sin\gamma\cos\gamma$ dividirt wird:

$$2(AA' - BB') + \frac{r(B + B')}{\sin\gamma} - \frac{r(A + A')}{\cos\gamma} = 0,$$

wo sich eine der Grössen A, A', B oder B' durch die Relation $AB' + BA' = 0$ eliminiren liesse.

Setze ich in 12) $\cos\gamma = \frac{x}{r}$ und $\sin\gamma = \frac{y}{r}$, so ergibt sich die Gleichung:

$$2xy(AA'-BB')+r^2x(B+B')-r^2y(A+A'),$$

welche in Verbindung mit der Gleichung des Kreises höchstens vier M. M. Punkte anzeigt.

Ist nun vermittelst 12) der Winkel γ bestimmt, so ist Winkel XCD oder $\alpha = v+\gamma$, und es ist:

$$u = \sqrt{a^2+b^2+r^2-2(a\cos\alpha+b\sin\alpha)},$$

$$u' = \sqrt{a'^2+b'^2+r^2-2(a'\cos\alpha+b'\sin\alpha)}.$$

Die Entscheidung aber, ob ein Maximum oder Minimum vorwaltet, gibt uns die Formel 8). Bedenkend, dass für den Kreis r constant, also $dr = d^2r = 0$ ist, haben wir:

$$U = r(b\cos\alpha - a\sin\alpha), \quad U' = r(b'\cos\alpha - a'\sin\alpha);$$

$$dU = -r(b\sin\alpha + a\cos\alpha), \quad dU' = -r(b'\sin\alpha + a'\cos\alpha).$$

Setzen wir diese Werthe in die Grösse 8), so ergibt sich, dass, wenn die Grösse

$$r(u+u')(b\cos\alpha - a\sin\alpha)(b'\cos\alpha - a'\sin\alpha)$$
$$+uu'[u'(b\sin\alpha + a\cos\alpha)+u(b'\sin\alpha + a'\cos\alpha)]$$

positiv ist, wir ein Minimum, im Gegentheil aber ein Maximum haben.

III.

Aufgabe. Es sind in der Peripherie eines Kreises n Punkte gegeben; man soll auf derselben Peripherie einen Punkt von solcher Eigenschaft bestimmen, dass die Summe aller der von ihm aus an die n Punkte gezogenen Geraden ein Maximum oder Minimum sei.

Auflösung. Es seien die gegebenen Punkte A, B, C, D.... (Taf. II. Fig. 5.) so wie der gesuchte Punkt X, so sind, wenn ich die Radien CA, LB, LC, LD.... LX ziehe, die Winkel ALB, ALC, ALD.... als bekannt zu betrachten, dagegen Winkel ALX als unbekannt. Setze ich nun diese Winkel nach einander $= b, c, d$.... und $ALX = x$, und ziehe die Geraden XA, XB, XC, XD....; so ist, wenn man den Radius des Kreises $= r$ setzt:

$$1) \quad \begin{cases} XA = 2r\sin\frac{1}{2}x, & XB = 2r\sin\frac{1}{2}(b-x), \\ XC = 2r\sin\frac{1}{2}(c-x), & XD = 2r\sin\frac{1}{2}(d-x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

folglich die Summe dieser Geraden:

2)

$$S = 2r[\sin\tfrac{1}{2}x + \sin\tfrac{1}{2}(b-x) + \sin\tfrac{1}{2}(c-x) + \sin\tfrac{1}{2}(d-x)\ldots.].$$

Nehmen wir aber als zweiten Fall den Punkt X zwischen B und C, so wird $XB = 2r\sin\frac{1}{2}(x-b)$, während die Form für die Grössen XA, XC, XD.... sich von obigen Formen nicht unterscheidet. Dadurch aber wird:

3)

$$S = 2r[\sin\tfrac{1}{2}x + \sin\tfrac{1}{2}(x-b) + \sin\tfrac{1}{2}(c-x) + \sin\tfrac{1}{2}(d-x)\ldots.].$$

Nimmt man ferner als dritten Fall X zwischen C und D, so erhält man:

4)

$$S = 2r[\sin\tfrac{1}{2}x + \sin\tfrac{1}{2}(x-b) + \sin\tfrac{1}{2}(x-c) + \sin\tfrac{1}{2}(d-x)\ldots.]$$

u. s. w.

Daraus folgt, dass die Function S jedesmal wieder eine andere wird, so oft wir X zwischen zwei anderen gegebenen Punkten annehmen. Wenn wir daher das M. M. für S in 2) aufsuchen, so kann sich diess nur auf den Zwischenraum AB beziehen, und wenn wir dasselbe thun für S in 3), so können wir nur den Zwischenraum BC im Auge haben u. s. w. Allerdings könnten wir S in 2) für alle Punkte der Peripherie eine Geltung beilegen, allein dann würde im zweiten Fall BX, im dritten BX und CX.... negativ in Rechnung gebracht, was nicht in unserer Absicht liegt.

Es gibt nun 2) für die Bedingung des M. M.:

$$\frac{dS}{dx} = r[\cos\tfrac{1}{2}x - \cos\tfrac{1}{2}(b-x) - \cos\tfrac{1}{2}(c-x) - \cos\tfrac{1}{2}(d-x)\ldots.] = 0.$$

Löse ich die runden Klammern auf, so kann ich dieser Gleichung die Form geben:

$$\cos\tfrac{1}{2}x[1 - \cos\tfrac{1}{2}b - \cos\tfrac{1}{2}c - \cos\tfrac{1}{2}d.... - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x(\sin\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}d....)] = 0$$

Der Werth $\cos\frac{1}{2}x = 0$, woraus folgt $x = \pi$, ist im Allgemeinen nicht zulässig, weil dadurch $\frac{dS}{dx}$ wirklich nicht auf Null gebracht

wird, mit Ausnahme eines einzigen Falles. Der andere Faktor aber liefert den Werth:

$$5) \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = \frac{1-\cos\tfrac{1}{2}b-\cos\tfrac{1}{2}c-\cos\tfrac{1}{2}d\ldots.}{\sin\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}c+\sin\tfrac{1}{2}d\ldots.}.$$

Dasselbe gilt für die Fälle 2) und 3), nur dass wir hier haben:

$$6) \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = \frac{1+\cos\tfrac{1}{2}b-\cos\tfrac{1}{2}c-\cos\tfrac{1}{2}d\ldots.}{-\sin\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}c+\sin\tfrac{1}{2}d\ldots.},$$

$$7) \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = \frac{1+\cos\tfrac{1}{2}b+\cos\tfrac{1}{2}c-\cos\tfrac{1}{2}d\ldots.}{-\sin\tfrac{1}{2}b-\sin\tfrac{1}{2}c+\sin\tfrac{1}{2}d\ldots.},$$

u. s. w.

Um im ersten Fall zu untersuchen, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt, so haben wir:

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \tfrac{1}{2}r[-\sin\tfrac{1}{2}x-\sin\tfrac{1}{2}(b-x)-\sin\tfrac{1}{2}(c-x)-\sin\tfrac{1}{2}(d-x)\ldots.]$$

$$= -\frac{S}{4},$$

und da S nur positiv sein kann, so haben wir ein Maximum. Auf dasselbe Resultat werden wir im zweiten und dritten Falle geführt. Ist also X der wirklich bestimmte und zwischen A und B liegende einzige Maximum-Punkt, so muss S abnehmen, ob man den Summenpunkt von X aus gegen A oder gegen B hinrückt. Dasselbe findet statt im zweiten Fall beziehlich der Punkte B und C u. s. w., und da die verschiedenen Summen (in den Fällen 1), 2), 3)....) in einander überfliessen, sobald sich ihre Summen-Punkte dem Punkte B oder C.... nähern, so müssen wir die Summen der Punkte A, B, C, D, ... als Minimum betrachten. Auf solche Weise finden sich demnach die Minimums-Punkte leicht, während die Maximums-Punkte durch die Formeln 4), 5), 6).... bestimmt werden. Und ist x bekannt, so ergeben sich die einzelnen Geraden aus 1), ihre Maximums-Summen aus 2), 3), 4) u. s. w. Die Minimums-Summen aber sind:

8)

für den Punkt A: $S = 2r(\sin\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}c+\sin\tfrac{1}{2}d\ldots.)$

„ „ „ B: $S = 2r[\sin\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}(c-b)+\sin\tfrac{1}{2}(d-b)\ldots.]$

u. s. w.

und sind alle Maxima und Minima bekannt, so finden sich darunter auch die absoluten Maxima und Minima.

Betrachten wir hier nur die folgenden drei Fälle:

α) Es sei nur ein einziger Punkt A gegeben.

Da hier weder von einem Winkel b, noch c, noch d.... die Rede sein kann, so liefert uns die M. M. Bedingung $\cos\frac{1}{2}x = 0$, folglich $x = \pi$ und $S = 2r =$ dem Durchmesser des Kreises als Maximum.

β) Es seien zwei Punkte A und B gegeben.

Hier haben wir

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = \frac{1-\cos\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}b} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}b,$$

woraus folgt:

$$x = \tfrac{1}{2}b \quad \text{oder} \quad x = \tfrac{1}{2}b + \pi,$$

daher ausnahmsweise zwei Maximums-Punkte stattfinden. In der That aber kann ich — wo nur zwei Punkte A und B gegeben sind — als zwischenliegende Bogen sowohl AB als auch $BCDA$ betrachten.

Als Minimum ergibt sich aus 8):

$$S = 2r\sin\tfrac{1}{2}b,$$

welches nichts anders ist, als die Sehne zwischen A und B.

γ) Es seien drei Punkte A, B und C gegeben.

Hier ist aus 5):

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = \frac{1-\cos\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}c} = \frac{1-2\cos\frac{1}{4}(b+c)\cos\frac{1}{4}(c-b)}{2\sin\frac{1}{4}(b+c)\cos\frac{1}{4}(c-b)},$$

wodurch sich das Maximum S bestimmt.

Das Minimum aber ist für den Punkt A aus 8):

$$S = 2r(\sin\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}c),$$

welches nichts anders ist, als die Summe der an A anstossenden zwei Seiten des durch die drei gegebenen Punkte bestimmten Dreiecks. Das absolute Minimum ist demnach die Summe der zwei kleinsten Seiten dieses Dreiecks.

IV*).

Aufgabe. Einen Punkt aufzufinden, von dem aus die Summe der drei in die Spitzen eines Dreiecks gezogenen Geraden ein Minimum bildet.

Auflösng. Es sei das Dreieck ABC (Taf. II. Fig. 6.) und der betreffende Punkt D, so setze ich

$$\angle BDC = \alpha,\ \angle ADC = \beta,\ \angle DCB = x.$$

Setze ich noch $BC = a$ und $AC = b$, so wie $\angle ACB = C$, so ist das Dreieck durch diese drei Stücke gegeben. Nun ist:

$$BD = a.\frac{\sin x}{\sin \alpha},\quad DC = a.\frac{\sin(\alpha + x)}{\sin \alpha},\quad AD = b.\frac{\sin(C - x)}{\sin \beta}.$$

Es ist demnach die Summe, die ein Minimum werden soll:

$$1)\qquad S = a.\frac{\sin x}{\sin \alpha} + a.\frac{\sin(\alpha + x)}{\sin \alpha} + b.\frac{\sin(C - x)}{\sin \beta}.$$

Da wir nun, zum Behuf der Aufsuchung des Minimum, die Winkel α und β bestimmen wollen, so haben wir zu setzen:

$$2)\ \frac{dS}{d\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad 3).\ \frac{dS}{d\beta} = 0.$$

Die Betrachtung der Werthe $\frac{dS}{d\alpha} = \frac{dS}{d\beta} = \infty$ ist hier ausgeschlossen, da dieselben auf $\alpha = 0$ oder $= \pi$ und $\beta = 0$ oder $= \pi$ führen würden, wodurch ein unendlich entfernter Punkt angezeigt wird.

Der Winkel x bestimmt sich in Function von α und β dadurch, dass man hat:

$$DC = a.\frac{\sin(\alpha + x)}{\sin \alpha}$$

und

$$DC = b.\frac{\sin(\beta + C - x)}{\sin \beta},$$

*) Diese Aufgabe ist freilich schon öfters aufgelöst worden; indess wird die Auflösung des Herrn Verfassers Eigenthümliches enthalten, weshalb ich dieselbe mit abdrucken lasse. G.

folglich:

$$a\frac{\sin(\alpha+x)}{\sin\alpha}=b\frac{\sin(\beta+C-x)}{\sin\beta}.$$

Lösen wir die Klammern auf und dividiren durch $\cos x$, so ergibt sich:

4)

$$\operatorname{tg}x=\frac{b\sin(C+\beta)-a\sin\beta}{a\sin\beta\cot\alpha+b\cos(C+\beta)}.$$

Die Gleichung 2) gibt nun:

5)

$$\left\{\left[\frac{a\cos x}{\sin\alpha}+a(\cot\alpha\cos x-\sin x)-b\left(\frac{\sin C\sin x+\cos C\cos x}{\sin\beta}\right)\right]\frac{dx}{d\alpha}\right\}=0,$$
$$-\frac{a\sin x\cos\alpha}{\sin\alpha^2}-a\frac{\sin x}{\sin\alpha^2}$$

und die Gleichung 2):

6)

$$\left\{\left[\frac{a\cos x}{\sin\alpha}+a(\cot\alpha\cos x-\sin x)-b\left(\frac{\sin C\sin x+\cos C\cos x}{\sin\beta}\right)\right]\frac{dx}{d\beta}\right\}=0.$$
$$-\frac{b\cos\beta(\sin C\cos x-\cos C\sin x)}{\sin\beta^2}$$

Dividiren wir durch $\cos x$, so erhalten wir aus 5) und 6):

7)

$$\left[\frac{a(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}-\operatorname{tg}x(a+\frac{b\sin C}{\sin\beta})-\frac{b\cos C}{\sin\beta}\right]\frac{dx}{d\alpha}-a\operatorname{tg}x\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha^2}\right)=0,$$

8)

$$\left[\frac{a(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}-\operatorname{tg}x(a+\frac{b\sin C}{\sin\beta})-\frac{b\cos C}{\sin\beta}\right]\frac{dx}{d\beta}-b\frac{\cos\beta\sin C}{\sin\beta^2}$$
$$+b\operatorname{tg}x\frac{\cos\beta\cos C}{\sin\beta^2}=0.$$

Nun ergibt sich aus 4):

$$\frac{dx}{d\alpha}=\cos x^2\cdot\frac{a\sin\beta[b\sin(C+\beta)-a\sin\beta]}{\sin\alpha^2[a\sin\beta\cot\alpha+b\cos(C+\beta)]^2}.$$

Allein da $\cos x^2 = \frac{1}{1+\operatorname{tg} x^2}$, so ergibt sich, wenn wir hier den Werth in 4) substituiren und den so erhaltenen Werth von $\cos x^2$ hinwiederum in den Werth von $\frac{dx}{d\alpha}$:

9)

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{a \sin\beta [b \sin(C+\beta) - a \sin\beta]}{b^2 \sin\alpha^2 + a^2 \sin\beta^2 + 2ab \sin\alpha \sin\beta \cos(C+\alpha+\beta)}.$$

Setzen wir $\angle DCA = y$, so erhalten wir $\frac{dy}{d\beta}$, wenn wir in 9) α und β so wie a und b mit einander verwechseln; und da $x+y=C$, also $\frac{dx}{d\beta} = -\frac{dy}{d\beta}$, so ist:

10)

$$\frac{dx}{d\beta} = \frac{b \sin\alpha [b \sin\alpha - a \sin(C+\alpha)]}{b^2 \sin\alpha^2 + a^2 \sin\beta^2 + 2ab \sin\alpha \sin\beta \cos(C+\alpha+\beta)}.$$

Eliminiren wir nun aus 7) und 8) die zwischen den eckigen Klammern befindlichen Grössen und ersetzen sodann $\frac{dx}{d\alpha}$, $\frac{dx}{d\beta}$ und $\operatorname{tg} x$ durch ihre Werthe, so haben wir:

$$\frac{b \sin\alpha - a \sin(C+\alpha)}{b \sin(C+\beta) - a \sin\beta} = \frac{\sin\alpha \cos\alpha \sin C [a \sin\beta \cot\alpha + b \cos(C+\beta)]}{\sin\beta (1+\cos\alpha) . [b \sin(C+\beta) - a \sin\beta]} - \frac{\sin\alpha \cos\beta \cos C}{\sin\beta (1+\cos\alpha)},$$

welche Gleichung nach allen Reduktionen gibt:

11)

$$(1+\cos\alpha+\cos\beta) . [\sin\alpha (b - a\cos C) - a \cos\alpha \sin C] = 0,$$

die sich zuerst durch die merkwürdige von a, b und C unabhängige Gleichung

$$1+\cos\alpha+\cos\beta = 0,$$

befriedigen lässt. Setzen wir den dritten, um den Punkt D befindlichen Winkel $BDA = \gamma$, so ist klar, dass, wenn wir vom Winkel A ausgehen würden, wie wir oben vom Winkel C ausgegangen sind, alsdann eine Gleichung erscheinen müsste, die der 11) ähnlich wäre, und den Faktor $1+\cos\beta+\cos\gamma$ besässe, so dass wir wieder setzen können:

$$1+\cos\beta+\cos\gamma = 0,$$

und eben so vom Winkel B ausgehend:

$$1+\cos\alpha+\cos\gamma=0.$$

Addiren wir die drei letzten Gleichungen, so haben wir:

$$2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)+3=0$$

oder

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\tfrac{3}{2}=0.$$

Ziehen wir nun nach einander jede der drei vorangegangenen Gleichungen von dieser ab, so haben wir endlich:

12) $$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=-\tfrac{1}{2},$$

so dass jeder der drei Winkel α, β und γ gleich 120^0 ist. Allein es fragt sich, ob diese Werthe auch den beiden Gleichungen 7) und 8) genügen. Setzt man aber in denselben, unter Benutzung der Werthe in 4) und 9) $\cos\alpha=\cos\beta=-\frac{1}{2}$ und $\sin\alpha=\sin\beta=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, so werden sie identisch. — Die Entscheidung, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt, hängt ab von dem Vorzeichen der Function

$$\frac{d^2S}{d\alpha^2}d\alpha^2+2\frac{d^2S}{d\alpha d\beta}d\alpha d\beta+\frac{d^2S}{d\beta^2}d\beta^2,$$

für die Werthe $\cos\alpha=\cos\beta=-\frac{1}{2}$.

Zu diesem Behufe stellen wir zuerst S als explicite Function von α und β dar. Lösen wir in 1) die Klammern auf und dividiren durch $\cos x$, so findet sich:

$$\frac{S}{\cos x}=\frac{a\sin\beta+b\sin C}{\sin\beta}+\left(\frac{a\sin\beta\cos\alpha+a\sin\beta-b\sin\alpha\cos C}{\sin\alpha\sin\beta}\right)\operatorname{tg}x.$$

Ersetzen wir $\operatorname{tg}x$ durch seinen Werth in 4), so kommt nach einigen Reduktionen:

$$\frac{S}{\cos x}=\frac{ab[\sin(C+\alpha+\beta)+\sin(C+\beta)+\sin(C+\alpha)]-a^2\sin\beta-b^2\sin\alpha}{a\sin\beta\cos\alpha+b\sin\alpha\cos(C+\beta)}.$$

Nun ist aber

$$\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}x^2}}$$

$$=\pm\frac{a\sin\beta\cos\alpha+b\sin\alpha\cos(C+\beta)}{\sqrt{a^2\sin\beta^2+b^2\sin\alpha^2+2ab\sin\alpha\sin\beta\cos(C+\alpha+\beta)}},$$

und so haben wir endlich:

13)

$$S = \pm \frac{ab[\sin(C+\alpha+\beta)+\sin(C+\beta)+\sin(C+\alpha)]-a^2\sin\beta-b^2\sin\alpha}{\sqrt{a^2\sin\beta^2+b^2\sin\alpha^2+2ab\sin\alpha\sin\beta\cos(C+\alpha+\beta)}},$$

wo das (+ oder —) Zeichen so zu nehmen ist, dass S positiv wird.

Setzen wir in der zweiten Seite unserer Gleichung

$$\sin\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \cos\beta = -\tfrac{1}{2},$$

so wird sie an sich negativ, so dass wir das negative Zeichen nehmen müssen. Setzen wir ferner den Nenner in 13) gleich $\sqrt{N}$ und den Zähler $= Z$, so haben wir:

$$\frac{dS}{d\alpha} = -\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}(N\frac{dZ}{d\alpha}-\tfrac{1}{2}Z\frac{dN}{d\alpha}).$$

Es ist aber:

$$Z = ab[\sin(C+\alpha+\beta)+\sin(C+\beta)+\sin(C+\alpha)]-a^2\sin\beta-b^2\sin\alpha,$$

$$N = a^2\sin\beta^2+b^2\sin\alpha^2+2ab\sin\alpha\sin\beta\cos(C+\alpha+\beta),$$

$$\frac{dZ}{d\alpha} = ab[\cos(C+\alpha+\beta)+\cos(C+\alpha)]-b^2\cos\alpha,$$

$$\frac{dN}{d\alpha} = 2b^2\sin\alpha\cos\alpha+2ab\sin\beta\cos(C+2\alpha+\beta).$$

Entwickeln wir nun die Function $-(N\frac{dZ}{d\alpha}-\frac{1}{2}Z\frac{dN}{d\alpha})$, so haben wir nach allen Reduktionen:

14)

$$-(N\frac{dZ}{d\alpha}-\tfrac{1}{2}Z\frac{dN}{d\alpha}) = N^{\frac{3}{2}}\frac{dS}{d\alpha}$$

$$= -a^3b\sin\beta^2[2\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos(C+\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)+\cos(C+2\alpha+\beta)]$$

$$+ ab^3\sin\alpha[2\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin(C+\tfrac{1}{2}\beta)+\sin\beta\cos(C+\beta)+\cos\alpha\sin(C+\beta)]$$

$$-a^2b^2\sin\beta\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)+4\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\alpha\cos(C+\alpha+\beta)\cos(C+\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)\\ -\cos(C+2\alpha+\beta).[2\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin(C+\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)+\sin(C+\beta)\end{array}\right\}.$$

Da nun die zwischen den transordinirten Klammern stehenden Grössen für die vorausgesetzten Werthe von α und β gleich Null werden, so dürfen wir, um $\frac{d^2S}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2S}{d\beta^2}$ und $\frac{d^2S}{d\alpha d\beta}$ zu entwickeln,

nur eben jene Grössen differentiiren, und so ergibt sich nach den nöthigen Reduktionen:

15)

$$-N^{\frac{3}{2}}\frac{d^2S}{d\alpha^2}=2a^3b\sin\beta^2[\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin(C+\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)+\sin(C+2\alpha+\beta)]$$

$$-ab^3\sin\alpha^2\sin(C+\beta)$$

$$-a^2b^2\sin\beta\begin{Bmatrix}\cos\alpha^2+2\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos(C+\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)\cos(C+2\alpha+\beta)\\+2\sin(C+2\alpha+\beta)[2\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin(C+\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)+\sin(C+\beta)]\\-4\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\alpha\cos(C+\alpha+\beta)\sin(C+\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)\end{Bmatrix}.$$

$N^{\frac{3}{2}}\frac{d^2S}{d\beta^2}$ erhält man, wenn man in 15) a in b und b in a; α in β und β in α verwandelt. Endlich erhält man:

16)

$$N^{\frac{3}{2}}\frac{d^2S}{d\alpha d\beta}=2a^3b\sin\beta^2\sin(C+\beta+\tfrac{3}{2}\alpha)\cos\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$+ab^3\sin\alpha[2\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos(C+\frac{3\beta}{2}+\cos\alpha\cos(C+\beta)]$$

$$+a^2b^2\sin\beta\begin{Bmatrix}\cos\alpha\cos\beta+4\sin\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin(C+\alpha+\beta)\cos(C+\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)\\+2\sin\alpha\cos(C+\alpha+\beta)\sin(C+\alpha+\beta)\\-\sin(C+2\alpha+\beta)[2\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin(C+\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)+\sin(C+\beta)]\\+2\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos(C+2\alpha+\beta)\cos(C+\beta+\tfrac{1}{2}\alpha)\end{Bmatrix}.$$

Setzen wir jetzt $\alpha=\beta=120^0$, so erhalten wir, wenn wir $\sin C-\sqrt{3}\cos C=M$ setzen:

$$8N^{\frac{3}{2}}\frac{d^2S}{d\alpha^2}=6a^3b\sin C+3ab^3M+\sqrt{3}a^2b^2(3+2\sin C.M),$$

$$8N^{\frac{3}{2}}\frac{d^2S}{d\beta^2}=6ab^3\sin C+3a^3bM+\sqrt{3}a^2b^2(3+2\sin C.M),$$

$$8N^{\frac{3}{2}}\frac{d^2S}{d\alpha d\beta}=3a^3bM+3ab^3M+2\sqrt{3}a^2b^2[3-\sin C(M+2\sqrt{3}\cos C)].$$

Die Entscheidung des Vorzeichens des zweiten Differentials von S hängt aber ab von der Entwickelung der Grösse:

$$\frac{d^2S}{d\alpha^2}\cdot\frac{d^2S}{d\beta^2}-\left(\frac{d^2S}{d\alpha d\beta}\right)^2,$$

und da die Grösse $\frac{1}{8N^{\frac{1}{2}}}$ hiebei müssig ist, so haben wir unter ihrer Vernachlässigung:

$$\frac{d^2S}{d\alpha^2}\cdot\frac{d^2S}{d\beta^2}-\left(\frac{d^2S}{d\alpha d\beta}\right)^2$$

$$= 3a^4b^4\{12\sin C^2+3M^2+(3+2\sin C.M)^2$$
$$-4[3-\sin C(M+2\sqrt{3}\cos C)]^2-6M^2\}$$
$$+9a^2b^6(2\sin C.M-M^2)$$
$$+3\sqrt{3}a^3b^5\{2\sin C(3+2\sin C.M)+M(3+2\sin C.M)$$
$$-4M[3-\sin C(M+2\sqrt{3}.\cos C)]\}$$
$$+9a^6b^2(2\sin C.M-M^2)$$
$$+3\sqrt{3}a^5b^3\{2\sin C(3+2\sin C.M)+M(3+2\sin C.M)$$
$$-4M[3-\sin C(M+2\sqrt{3}.\cos C)]\}.$$

Ersetzen wir M durch dessen Werth, und entwickeln, so haben wir:

$$\frac{d^2S}{d\alpha^2}\cdot\frac{d^2S}{d\beta^2}-\left(\frac{d^2S}{d\alpha d\beta}\right)^2$$

$$=6a^4b^4(\sin C+\sqrt{3}\cos C)[3\sin C(5-2\sin C^2)-2\sqrt{3}\cos C(3+\sin C^2)]$$
$$+9a^2b^6(\sin C+\sqrt{3}\cos C)(\sin C-\sqrt{3}\cos C)$$
$$+3\sqrt{3}a^3b^5[8\sin C^3+(\sin C-\sqrt{3}\cos C)(8\sin C^2-9)]$$
$$+9a^6b^2(\sin C+\sqrt{3}\cos C)(\sin C-\sqrt{3}\cos C)$$
$$+3\sqrt{3}a^5b^3[8\sin C^3+(\sin C-\sqrt{3}\cos C)(8\sin C^2-9)].$$

Hat nun diese Function das positive Zeichen, so liegt ein M. M. vor, im entgegengesetzten Falle aber nicht. Und zwar ist es ein Minimum, wenn $\frac{d^2S}{d\alpha^2}$ und $\frac{d^2S}{d\beta^2}$ das positive Zeichen tragen, ein Maximum aber, wenn das negative vorliegt. Das Vorzeichen fraglicher Function aber hängt von der Grösse des Winkels C ab. Zur Vereinfachung unserer Untersuchung ist es erlaubt, C als den grössteen Winkel des Dreiecks anzunehmen. Unter dieser Bedingung variirt er zwischen den Grössen $\frac{\pi}{3}$ und π. $C=\frac{\pi}{3}$ liefert ein positives und $C=\pi$ ein negatives Vorzeichen, woraus hervorgeht, dass die Function durch Null geht. In der

That: setzen wir $C=\frac{2\pi}{3}$, so wird dieser Umstand herbeigeführt. Alle Werthe nun von C, die zwischen $C=\frac{\pi}{3}$ und $C=\frac{2\pi}{3}$ liegen, geben uns ein positives Vorzeichen, die zwischen π und $\frac{2\pi}{3}$ liegenden aber ein negatives, so dass jene Werthe von C ein wirkliches M. M. aufweisen, diese aber nicht. Da nun für $\alpha=\beta=\frac{2\pi}{3}$:

$$\frac{d^2S}{da^2}=\tfrac{3}{4}a^3b\sin C+\tfrac{3}{8}ab^3(\cos C+\sqrt{3}\sin C)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b^2[\tfrac{1}{2}+\sin C(\sin C-\sqrt{3}\cos C),$$

worin für die zwischen $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{2\pi}{3}$ liegenden Werthe von C der $\cos C$ weder in positivem noch negativem Sinne grösser als $\frac{1}{2}$ werden kann, — unbedingt positiv ist, für die vorausgesetzten Werthe von C, so zeigen demnach die Werthe $\alpha=\beta=\frac{2\pi}{3}$ ein Minimum an, sobald im Dreieck kein Winkel vorhanden ist, der grösser wäre als $\frac{2\pi}{3}$. Sobald aber die letztere Bedingung nicht erfüllt ist, so ist die M. M. Bedingung $\alpha=\beta=\frac{2}{3}\pi$ unzulässig. Bringen wir nun den andern Faktor der Gleichung 11) auf Null, so haben wir:

$$\sin\alpha(b-a\cos C)-a\cos\alpha.\sin C=0,$$

woraus

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a\sin C}{b-a\cos C}=\operatorname{tg}A, \text{ so dass } \alpha=A.$$

Diess erfordert, dass D in der Peripherie des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises liegt und es gehört nun die weitere Verfolgung unserer Aufgabe III. an. Daraus geht hervor, dass auch in dem Fall ein Minimum existirt, wo einer der Winkel grösser ist als $\frac{2}{3}\pi$; und zwar ruht dieser Minimums-Punkt im Scheitel des stumpfen Winkels und ist dasselbe gleich der Summe der den stumpfen Winkel einschliessenden Seiten.

Um nun endlich in unserem ersten Fall sowohl die einzelnen Geraden als auch ihre Summe S zu bestimmen, so ergibt sich zunächst aus 4), wenn wir $\alpha=\beta=\frac{2\pi}{3}$ setzen:

$$\operatorname{tg} x = \frac{a\sqrt{3} + b(\sin C - \sqrt{3}\cos C)}{a + b(\cos C + \sqrt{3}\sin C)},$$

und dann hieraus:

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x^2}} = \frac{a\sqrt{3} + b(\sin C - \sqrt{3}\cos C)}{2\sqrt{a^2 + b^2 + ab(\sqrt{3}\sin C - \cos C)}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x^2}} = \frac{a + b(\cos C + \sqrt{3}\sin C)}{2\sqrt{a^2 + b^2 + ab(\sqrt{3}\sin C - \cos C)}};$$

wodurch wir erhalten:

$$BD = a \cdot \frac{\sin x}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3} + b(\sin C - \sqrt{3}\cos C)}{\sqrt{a^2 + b^2 + ab(\sqrt{3}\sin C - \cos C)}},$$

$$DC = a \cdot \frac{\sin(\alpha + x)}{\sin \alpha} = \frac{ab}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sin C + \sqrt{3}\cos C}{\sqrt{a^2 + b^2 + ab(\sqrt{3}\sin C - \cos C)}},$$

$$AD = b \cdot \frac{\sin(C - x)}{\sin \beta} = \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b\sqrt{3} + a(\sin C - \sqrt{3}\cos C)}{\sqrt{a^2 + b^2 + ab(\sqrt{3}\sin C - \cos C)}}.$$

Addiren wir diese drei Geraden, oder benutzen wir die Gleichung 13), so erhalten wir in beiden Fällen:

$$S = \sqrt{a^2 + b^2 + ab(\sqrt{3}\sin C - \cos C)} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(C + \frac{2\pi}{3}\right)}.$$

Denken wir uns aber die drei Seiten des Dreiecks gegeben, so ergeben sich die einzelnen Geraden, wie auch ihre Summe einfach auf folgende Weise:

Sei

$$AD = u, \quad BD = v, \quad CD = w;$$

so haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$v^2 + w^2 - 2vw\cos\frac{2\pi}{3} = a^2$$

oder

17) $$v^2 + w^2 + vw = a^2,$$

und ebenso

18) $$u^2 + w^2 + uw = b^2,$$

19) $$u^2 + v^2 + uv = c^2.$$

Die Summe dieser drei Gleichungen liefert:

20) $u^2+v^2+w^2+\frac{1}{2}(uv+uw+vw)=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

Nun ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$ADB=\tfrac{1}{2}uv\sin\frac{2\pi}{3} \quad \text{oder} \quad \Delta ADB=\frac{\sqrt{3}.uv}{4}.$$

Gleicherweise ist:

$$\Delta ADC=\frac{\sqrt{3}.uw}{4} \quad \text{und} \quad \Delta BDC=\frac{\sqrt{3}.vw}{4}.$$

Die Summe aber gibt den Flächeninhalt i des ganzen Dreiecks ABC, d. h.

$\frac{\sqrt{3}}{4}(uv+uw+vw)=i$, woraus folgt: $\frac{1}{2}(uv+uw+vw)=2\sqrt{3}.i$.

Addire ich diess zu 20), so kommt, wenn ich die Wurzel ausziehe:

21) $$S=u+v+w=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}.i}.$$

Ziehe ich 17) von 18) ab, so habe ich:

$$u-v=\frac{b^2-a^2}{S},$$

welches gibt:

$$u^2+v^2-2uv=\left(\frac{b^2-a^2}{S}\right)^2;$$

und diess von 19) abgezogen:

$$uv=\tfrac{1}{3}\left[c^2-\left(\frac{b^2-a^2}{S}\right)^2\right].$$

Wird diese Gleichung auf's Neue mit $u-v=\frac{b^2-a^2}{S}$ verbunden, so entwickelt sich:

22) $$u=\frac{b^2-a^2}{2S}+\sqrt{\tfrac{1}{3}\left[c^2-\left(\frac{b^2-a^2}{2S}\right)^2\right]},$$

so wie durch Buchstabenverwechselung:

23) $$u=\frac{c^2-a^2}{2S}+\sqrt{\tfrac{1}{3}\left[b^2-\left(\frac{c^2-a^2}{2S}\right)^2\right]};$$

24) $$v=\frac{c^2-b^2}{2S}+\sqrt{\tfrac{1}{3}\left[a^2-\left(\frac{c^2-b^2}{2S}\right)^2\right]};$$

25) $$v = \frac{a^2-b^2}{2S} + \sqrt{\tfrac{1}{3}[c^2 - \left(\frac{a^2-b^2}{2S}\right)^2]};$$

26) $$w = \frac{a^2-c^2}{2S} + \sqrt{\tfrac{1}{3}[b^2 - \left(\frac{a^2-c^2}{2S}\right)^2]};$$

27) $$w = \frac{b^2-c^2}{2S} + \sqrt{\tfrac{1}{3}[b^2 - \left(\frac{b^2-c^2}{2S}\right)^2]}.$$

Die Wurzelzeichen ergaben sich durch folgende Betrachtung. Gesetzt es sei a die grösste Seite des Dreiecks, b die mittlere und c die kleinste, so kann die Wurzel in 22), da wir nur positive Werthe für u, v und w annehmen dürfen, nur positiv sein. Die Wurzeln in 22) und 25) sind an sich gleich: allein sie müssen auch noch gleiche Vorzeichen, d. h. das positive haben, weil man sonst nicht hätte $u - v = \frac{b^2-a^2}{S}$, wie es sein muss. Dasselbe kann auch in Beziehung auf die übrigen Wurzeln gefolgert werden aus der Verbindung von 23) mit 26) und 24) mit 27).

V.

Aufgabe. Es bewegen sich auf zwei Curven des Raumes zwei Atome nach bestimmten Gesetzen; es soll Zeit und Ort für das Maximum Minimum des Abstandes der Atome aufgesucht werden.

Auflösung. Seien

1) $$y = \varphi(x),$$

2) $$z = \psi(x)$$

die Gleichungen der einen Curve, und

3) $$y' = \varphi'(x'),$$

4) $$z' = \psi'(x')$$

die Gleichungen der andern.

Da die Gesetze, nach denen sich die Atome in ihren Curven bewegen, bekannt sind, so muss sowohl x als auch x' in Function der Zeit t gegeben sein. Sei

5) $$x = f(t)$$

und

6) $$x' = f'(t).$$

Es sind demnach auch y, z, y', z' in Functionen von t bekannt.

Der Abstand beider Atome ist aber in einem bestimmten Augenblick:

$$e = \sqrt{(y'-y)^2 + (z'-z)^2 + (x'-x)^2}.$$

Zum Behufe der Aufsuchung des M. M. müssen wir nun haben:

7)

$$\frac{de}{dt} = \frac{(y'-y)\left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) + (z'-z)\left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) + (x'-x)\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right)}{\sqrt{(y'-y)^2 + (z'-z)^2 + (x'-x)^2}}$$

$$= 0 \text{ oder } = \infty.$$

Der letztere Fall, in welchem $\frac{de}{dt} = \infty$, würde erfordern $e = 0$ und einzeln:

8) $$y' = y, \quad z' = z, \quad x' = x,$$

wodurch angezeigt wird, dass die beiden Curven sich in einem Punkte schneiden. Indem man aber die drei letztern Gleichungen benutzt und mit 1), 2), 3) und 4) verbindet, erhalten nicht allein die Coordinaten des Durchschnittspunktes ihre Bestimmung, sondern es lässt auch die Elimination der sechs Werthe x, y, z, x', y', z' aus den sieben Gleichungen 1), 2), 3), 4) und 8) eine Gleichung hervorgehen, welche die Bedingung ausdrückt, unter der sich beide Curven schneiden. Noch mehr: wenn $x = x'$ ihre Bestimmung x_1 erfahren haben, so geht durch Elimination von x_1 aus den beiden Gleichungen 5) und 6) oder aus der Gleichung

$$f(t) = f'(t)$$

die Bedingung hervor, unter welcher die beiden Atome sich zu gleicher Zeit im Durchschnittspunkt der Curven einfinden können. Nur in diesem seltenen Ausnahmsfalle, der zwei Bedingungen festsetzt, und der $e = 0$ gibt, ist ein M. M., und zwar ein absolutes Minimum vorhanden. Wir werden diesen Fall nicht weiter betrachten. Die andere Gleichung aber:

9)

$$(y'-y)\left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) + (z'-z)\left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) + (x'-x)\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) = 0.$$

liefert einen oder mehrere Werthe für t und folglich auch für x,

x' und alle übrigen Coordinaten, so dass hiedurch Zeit und Ort und das M. M. selbst bestimmt sind. — Setzen wir nun die linke Seite der Gleichung 9) $= F(t)$, so entscheidet das Vorzeichen der Function

$$\frac{dF(t)}{dt},$$

nachdem sie die für t gefundenen Werthe in sich aufgenommen hat, ob ein Maximum oder ob ein Minimum vorliegt.

Wählen wir als Beispiel zwei Gerade, deren Gleichungen sind:

$$y = ax + b, \quad z = cx + p \quad \text{und} \quad y' = 0, \quad z' = 0;$$

während dem Atom der ersten eine gleichförmige Bewegung $x = mt + n$ eingeprägt ist, und der Atom der zweiten in seiner Bewegung $x' = gt^2$ das Gesetz des freien Falles darstellt.

Hier ist nun:

$$y = amt + an + b \quad \text{und} \quad z = cmt + cn + p.$$

Die Gleichung 9) gibt:

$$(amt + an + b)am + (cmt + cn + p)cm + (gt^2 - mt - n)(2gt - m) = 0$$

oder

$$t^3 - \frac{3m}{2g}t^2 + \frac{m^2(a^2 + c^2 + 1) - 2gn}{2g^2}t + \frac{am(an + b) + cm(cn + g) + mn}{2g^2} = 0.$$

Haben wir aus dieser Gleichung die drei Werthe t_1, t_2 und t_3 bestimmt und substituiren dieselben in die Grösse

$$\frac{dF(t)}{dt} = 3t^2 - \frac{3mt}{g} + \frac{m^2(a^2 + c^2 + 1) - 2gn}{2g^2},$$

so wird deren Positivität oder Negativität die Frage entscheiden, ob ein Minimum oder Maximum stattfindet. Die Substitution der Werthe t_1, t_2 und t_3 in die Gleichungen

$$x' = gt^2, \quad x = mt + n, \quad y = amt + an + b, \quad z = cmt + cn + p$$

wird die jedesmaligen Oerter angeben, für welche das betreffende M. M. existirt, und endlich wird die Gleichung

$$e = \sqrt{(amt + an + b)^2 + (cmt + cn + p)^2 + (pt^2 - mt - n)^2}$$

das jedesmalige M. M. selbst finden lehren.

Zu noch grösserer Specialität nehmen wir an, die beiden

Geraden seien parallel. Alsdann haben wir $a = c = 0$ zu setzen und unsere Gleichung 9) geht dadurch über in:

$$(gt^2 - mt - n)(2gt - m) = 0,$$

welche Gleichung befriedigt wird durch die Werthe:

$$t_1 = \frac{m}{2g}, \quad t_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4ng}}{2g}, \quad t_3 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4ng}}{2g}.$$

Ist $\sqrt{m^2 + 4ng}$ reell, so ist t_3 negativ und die Zeit t_1 liegt in der Mitte zwischen t_2 und t_3. In der That, substituiren wir diese Werthe in die Grösse

$$3t^2 - \frac{3mt}{g} + \frac{m^2 - 2gn}{2g^2},$$

so wird sie

$$\text{für } t_1 \text{ gleich } -\frac{m^2 + 4gn}{4g^2},$$

$$\text{„ } t_2 \text{ „ } +\frac{m^2 + 4gn}{4g^2},$$

$$\text{„ } t_3 \text{ „ } +\frac{m^2 + 4gn}{4g^2};$$

es giebt daher die mittlere Zeit ein Maximum, während die beiden übrigen Minima geben, wie es sein muss.

Ist aber $\sqrt{m^2 + 4ng}$ imaginär, so wird es auch t_2 und t_3. Die Zeit $t_1 = \frac{m}{2g}$ dagegen weist nicht mehr ein Maximum, sondern ein Minimum, und zwar das einzig existirende, auf.

Die M. M. Entfernungen werden respective:

$$e_1 = \sqrt{b^2 + p^2 + (n + \frac{m^2}{4g})^2}, \quad e_2 = \sqrt{b^2 + p^2}, \quad e_3 = \sqrt{b^2 + p^2},$$

von denen die beiden letzten wegfallen, wofern $m^2 + 4ng$ negativ ist.

Setzen wir jetzt den Fall, dass die beiden Geraden eine solche gegenseitige Stellung haben, dass die eine, parallel mit sich selbst fortgerückt, bis sie die andere schneidet, senkrecht auf ihr steht, so können wir annehmen, dass, während immerhin die eine mit der Achse der x zusammenfällt, die andere mit der Achse der y parallel ist. Somit kann man folgende Gleichungen aufstellen:

$$\left.\begin{matrix} z = b \\ x = p \end{matrix}\right\} \text{ und } y = mt + n; \qquad \left.\begin{matrix} y' = 0 \\ z' = 0 \end{matrix}\right\} \text{ und } x' = gt^2.$$

Mittelst dieser Werthe geht die Gleichung 9) über in:

$$t^3+\frac{m^2-2gp}{2g^2}\,t+\frac{mn}{2g^2}=0,$$

die sich durch die cardanische Formel auflösen lässt. Ist die Grösse $27g^2m^2n^2+2(m^2-2gp)^3$ positiv, so bietet sich nur Ein Werth für t dar, im Gegentheil aber drei.

XVIII.

Beiträge zur Theorie derjenigen Functionen, welche die Verallgemeinerung der hyperbolischen und cyclischen Cosinus und Sinus darstellen.

Von

Herrn *C. Hellwig*,

Oberlehrer an der Realschule zu Erfurt.

Ich habe im XXI. Bande dieses Archivs S. 43. die Summen derjenigen Reihen bestimmt, welche aus der binomischen, logarithmischen und Exponential-Reihe durch Ueberspringung einer beliebigen Anzahl von Gliedern sich bilden lassen. Von diesen Functionen bieten vorzugsweise die der Exponential-Reihe entsprossenen ein besonderes Interesse dar, und es sind durch Behandlung einzelner Fälle seitdem schätzenswerthe Beiträge zur Theorie dieser Functionen im Archiv geliefert worden von Simon und Knar im XXVII. und von Beyssell im XXXI. Bande. Ich will versuchen, die allgemeinen Bestimmungen, welche für diese Functionen in ihrer allgemeinsten Gestalt gelten, hier zusammenzustellen.

Nach der Gleichung (66) meines Aufsatzes im XXI. Bande lassen sich folgende Relationen bilden:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x),\\
F(\varepsilon_1 x) &= f_0(x)+\varepsilon_1 . f_1(x)+\varepsilon_1{}^2 . f_2(x)+\ldots+\varepsilon_1{}^n . f_n(x),\\
F(\varepsilon_2 x) &= f_0(x)+\varepsilon_2 . f_1(x)+\varepsilon_2{}^2 . f_2(x)+\ldots+\varepsilon_2{}^n . f_n(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F(\varepsilon_n x) &= f_0(x)+\varepsilon_n . f_1(x)+\varepsilon_n{}^2 . f_2(x)+\ldots+\varepsilon_n{}^n . f_n(x);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(y) &= f_0(y)+f_1(y)+f_2(y)+\ldots+f_n(y),\\
F(\varepsilon_1 y) &= f_0(y)+\varepsilon_1 . f_1(y)+\varepsilon_1{}^2 . f_2(y)+\ldots+\varepsilon_1{}^n . f_n(y),\\
F(\varepsilon_2 y) &= f_0(y)+\varepsilon_2 . f_1(y)+\varepsilon_2{}^2 . f_2(y)+\ldots+\varepsilon_2{}^n . f_n(y),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F(\varepsilon_n y) &= f_0(y)+\varepsilon_n . f_1(y)+\varepsilon_n{}^2 . f_2(y)+\ldots+\varepsilon_n{}^n . f_n(y).
\end{aligned}
$$

Hierin bedeuten für unseren Fall $F(x)$, $F(\varepsilon_1 x)$, $F(\varepsilon_2 x) \ldots F(\varepsilon_n x)$ die Potenzen e^x, $e^{\varepsilon_1 x}$, $e^{\varepsilon_2 x}$, $\ldots e^{\varepsilon_n x}$, ferner $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots f_n(x)$ die von uns mit X_0, X_1, $X_2 \ldots X_n$ bezeichneten Functionen, welche die Summen der aus der Reihe für e^x durch Uebersprungung von jedesmal n Gliedern entstehenden Reihen bilden, endlich 1, ε_1, ε_2, $\ldots \varepsilon_n$ die $(n+1)$ Wurzeln der Gleichung $x^{n+1}-1=0$. Wir können demnach die vorstehenden Beziehungen auch in folgender Form ausdrücken:

(1)

$$
\begin{aligned}
e^x &= X_0+X_1+X_2+\ldots+X_n,\\
e^{\varepsilon_1 x} &= X_0+\varepsilon_1 . X_1+\varepsilon_1{}^2 . X_2+\ldots+\varepsilon_1{}^n . X_n,\\
e^{\varepsilon_2 x} &= X_0+\varepsilon_2 . X_1+\varepsilon_2{}^2 . X_2+\ldots+\varepsilon_2{}^n . X_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e^{\varepsilon_n x} &= X_0+\varepsilon_n . X_1+\varepsilon_n{}^2 . X_2+\ldots+\varepsilon_n{}^n . X_n;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^y &= Y_0+Y_1+Y_2+\ldots+Y_n,\\
e^{\varepsilon_1 y} &= Y_0+\varepsilon_1 . Y_1+\varepsilon_1{}^2 . Y_2+\ldots+\varepsilon_1{}^n . Y_n,\\
e^{\varepsilon_2 y} &= Y_0+\varepsilon_2 . Y_1+\varepsilon_2{}^2 . Y_2+\ldots+\varepsilon_2{}^n . Y_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e^{\varepsilon_n y} &= Y^0+\varepsilon_n . Y_1+\varepsilon_n{}^2 . Y_2+\ldots+\varepsilon_n{}^n . Y_n.
\end{aligned}
$$

Die Produkte von je zwei nebeneinanderstehenden dieser Gleichungen führen zu $(n+1)$ Relationen, welche wir schreiben können, wie folgt:

(2)

$$
\begin{aligned}
e^{x+y} &= X_0 Y_0+(X_0 Y_1+X_1 Y_0)+(X_0 Y_2+X_1 Y_1+X_2 Y_0)+\ldots\\
&\quad \ldots+(X_{n-1} Y_n+X_n Y_{n-1})+X_n Y_n,\\
e^{\varepsilon_1(x+y)} &= X_0 Y_0+\varepsilon_1 . (X_0 Y_1+X_1 Y_0)+\varepsilon_1{}^2 . (X_0 Y_2+X_1 Y_1+X_2 Y_0)+\ldots\\
&\quad \ldots+\varepsilon_1{}^{2n-1} . (X_{n-1} Y_n+X_n Y_{n-1})+\varepsilon_1{}^{2n} . X_n Y_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e^{\varepsilon_n(x+y)} &= X_0 Y_0+\varepsilon_n . (X_0 Y_1+X_1 Y_0)+\varepsilon_n{}^2 . (X_0 Y_2+X_1 Y_1+X_2 Y_0)+\ldots\\
&\quad \ldots+\varepsilon_n{}^{2n-1} . (X_{n-1} Y_n+X_n Y_{n-1})+\varepsilon_n{}^{2n} . X_n Y_n.
\end{aligned}
$$

Beachtet man nun die Bezeichnung in Gleichung (53) des angeführten Aufsatzes, so sieht man sofort, dass die Summe der in vorstehenden Gleichungen auf der linken Seite stehenden Ausdrücke $(n+1).(X+Y)_0$ bedeutet; die Summen der auf der rechten Seite untereinanderstehenden verschwinden jede für sich bis auf die Summe der $X_0 Y_0$ und die den $X_1 Y_n + X_2 Y_{n-1} + \ldots + X_n Y_1$, weil letztere mit $\varepsilon_1{}^{n+1} = \varepsilon_2{}^{n+1} \ldots = \varepsilon_n{}^{n+1} = 1$ multiplicirt sind. Hierdurch wird ersichtlich, dass man hat:

(3)

$$(X+Y)_0 = X_0 Y_0 + (X_1 Y_n + X_2 Y_{n-1} + X_3 Y_{n-2} + \ldots + X_n Y_1).$$

Um $(X+Y)_1$ zu bekommen, muss man die zweite der Gleichungen (2) mit $\frac{1}{\varepsilon_1}$, die dritte mit $\frac{1}{\varepsilon_2}$ u.s.w., die letzte mit $\frac{1}{\varepsilon_n}$ multipliciren und dann addiren; dann verschwinden rechts die Summen aller zusammengehörigen Ausdrücke bis auf die der $X_0 Y_1 + X_1 Y_0$ und die der $X_2 Y_n + X_3 Y_{n-1} + \ldots + X_n Y_2$, und es wird folglich:

(4)

$$(X+Y)_1 = (X_0 Y_1 + X_1 Y_0) + (X_2 Y_n + X_3 Y_{n-1} + \ldots + X_n Y_2).$$

Multiplicirt man jetzt die zweite der Gleichungen mit $\frac{1}{\varepsilon_1{}^2}$, die dritte mit $\frac{1}{\varepsilon_2{}^2}$ u. s. w., die letzte mit $\frac{1}{\varepsilon_n{}^2}$ und addirt dann, und fährt in der angedeuteten Weise fort, jene Gleichungen zu behandeln, so findet man ferner:

(5)

$$(X+Y)_2 = (X_0 Y_2 + X_1 Y_1 + X_2 Y_0) + (X_3 Y_n + X_4 Y_{n-1} + \ldots + X_n Y_3),$$

$$(X+Y)_3 = (X_0 Y_3 + X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + X_3 Y_0) + (X_4 Y_n + \ldots + X_n Y_4),$$

. . . . . .

$$(X+Y)_n = (X_0 Y_n + X_1 Y_{n-1} + X_2 Y_{n-2} + \ldots\ldots\ldots + X_n Y_0).$$

Denkt man an die Reihen, welche Y_0, Y_1, Y_2, ... Y_n darstellen (vergl. XXI. V. (25)), so ergiebt sich leicht, dass, wenn $(n+1)$ eine gerade Zahl ist, folgende Beziehungen Statt haben:

$$(6)\quad \ldots\ldots\ldots \begin{cases} Y_0(-y) = +\,Y_0, \\ Y_1(-y) = -\,Y_1, \\ Y_2(-y) = +\,Y_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ Y_n(-y) = -\,Y_n. \end{cases}$$

Setzt man daher in Gleichung (3), (4), (5) $y = -y$, so gelangt man zu den folgenden:

(7)

$$\begin{aligned}
(X-Y)_0 &= X_0Y_0 - X_1Y_n + X_2Y_{n-1} - X_3Y_{n-2} + \ldots - X_nY_1, \\
(X-Y)_1 &= -X_0Y_1 + X_1Y_0 - X_2Y_n + X_3Y_{n-1} - \ldots + X_nY_2, \\
(X-Y)_2 &= X_0Y_2 - X_1Y_1 + X_2Y_0 - X_3Y_n + \ldots - X_nY_3, \\
(X-Y)_3 &= -X_0Y_3 + X_1Y_2 - X_2Y_1 + X_3Y_0 - \ldots + X_nY_4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(X-Y)_n &= -X_0Y_n + X_1Y_{n-1} - X_2Y_{n-2} + X_3Y_{n-3} + \ldots + X_nY_0.
\end{aligned}$$

$(n+1)$ eine gerade Zahl.

Ist aber $(n+1)$ ungerade, und man setzt in jenen Reihen $y = -y$, so gehen dieselben in solche über, deren Gliederzeichen alterniren; bezeichnen wir die Summen der Reihen in diesem Falle (wie dies auch von Beyssell a. a. O. geschehen) der Reihe nach mit $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$, so erhalten wir folgende Relationen:

$$(8)\quad \ldots\ldots\ldots \begin{cases} Y_0(-y) = +\,y_0, \\ Y_1(-y) = -\,y_1, \\ Y_2(-y) = +\,y_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ Y_n(-y) = +\,y_n. \end{cases}$$

Vermöge derselben verwandeln sich die Gleichungen (3), (4), (5) in diese:

(9)

$$\begin{aligned}
(X-Y)_0 &= X_0y_0 + X_1y_n - X_2y_{n-1} + X_3y_{n-2} - \ldots - X_ny_1, \\
(X-Y)_1 &= -X_0y_1 + X_1y_0 + X_2y_n - X_3y_{n-1} + \ldots + X_ny_2, \\
(X-Y)_2 &= X_0y_2 - X_1y_1 + X_2y_0 + X_3y_n - \ldots - X_ny_3, \\
(X-Y)_3 &= -X_0y_3 + X_1y_2 - X_2y_1 + X_3y_0 + \ldots + X_ny_4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(X-Y)_n &= X_0y_n - X_1y_{n-1} + X_2y_{n-2} - X_3y_{n-3} + \ldots + X_ny_0.
\end{aligned}$$

$(n+1)$ eine ungerade Zahl

Gehen wir nun zu den Functionen über, in deren Reihen die Gliederzeichen alterniren. Dies erreichen wir leicht dadurch, dass wir $\delta.x$ statt x setzen, vorausgesetzt, dass δ eine Wurzel der Gleichung $x^{n+1}+1=0$ bezeichnet. Dadurch erhalten wir in Berücksichtigung der schon öfter angezogenen Reihen:

$$(10)\quad \begin{cases} x_0 = X_0(x=\delta.x) & y_0 = Y_0(y=\delta.y) \\ \delta.x_1 = X_1(x=\delta.x) & \delta.y_1 = Y_1(y=\delta.y) \\ \delta^2.x_2 = X_2(x=\delta.x) & \delta^2.y_2 = Y_2(y=\delta.y) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \delta^n.x_n = X_n(x=\delta.x) & \delta^n.y_n = Y_n(y=\delta.y) \end{cases}$$

und weiter den Gleichungen (2) entsprechend:

(11)

$$e^{\delta.(x+y)} = x_0y_0 + \delta.(x_0y_1 + x_1y_0) + \delta^2.(x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0) + \dots$$
$$\dots + \delta^{2n-1}.(x_{n-1}y_n + x_ny_{n-1}) + \delta^{2n}.x_ny_n,$$

$$e^{\delta\varepsilon_1.(x+y)} = x_0y_0 + \delta\varepsilon_1.(x_0y_1 + x_1y_0) + \delta^2\varepsilon_1{}^2.(x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0) + \dots$$
$$\dots + \delta^{2n-1}\varepsilon_1{}^{2n-1}.(x_{n-1}y_n + x_ny_{n-1}) + \delta^{2n}\varepsilon_1{}^{2n}.x_ny_n,$$

. . . . . .

$$e^{\delta\varepsilon_n.(x+y)} = x_0y_0 + \delta\varepsilon_n.(x_0y_1 + x_1y_0) + \delta^2\varepsilon_n{}^2.(x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0) + \dots$$
$$\dots + \delta^{2n-1}\varepsilon_n{}^{2n-1}.(x_{n-1}y_n + x_ny_{n-1}) + \delta^{2n}\varepsilon_n{}^{2n}.x_ny_n.$$

Behandelt man diese Gleichungen ganz in derselben Weise, wie oben die Gleichung (2), und bedenkt dabei, dass $\delta^{n+1}=-1$, $\delta^{n+2}=-\delta$, $\delta^{n+2}=-\delta^2$ u. s. w., so führt dies zu folgenden Beziehungen:

(12)

$$(x+y)_0 = x_0y_0 - (x_1y_n + x_2y_{n-1} + x_3y_{n-2} + \dots + x_ny_1),$$
$$(x+y)_1 = (x_0y_1 + x_1y_0) - (x_2y_n + x_3y_{n-1} + \dots + x_ny_2),$$
$$(x+y)_2 = (x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0) - (x_3y_n + \dots + x_ny_3),$$
. . . . . .
$$(x+y)_n = x_0y_n + x_1y_{n-1} + x_2y_{n-2} + x_3y_{n-3} + \dots + x_ny_0;$$

übereinstimmend mit den von Beyssell a. a. O. aufgestellten. Zu den für $(x-y)_0$, $(x-y)_1$ u. s. w. allgemein geltenden Werthen,

welche von Beyssell nur für den Fall $n=3$ entwickelt worden sind, gelangen wir durch die Betrachtung der Reihen:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} y_0 &= 1 - \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{y^{2n+2}}{(2n+2)!} - \text{ etc.} \\ y_1 &= y - \frac{y^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{y^{2n+3}}{(2n+3)!} - \text{ etc.} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \frac{y_n}{n!} - \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{y^{3n+2}}{(3n+2)!} - \text{ etc.} \end{aligned}\right.$$

Setzt man hierin $-y$ für y, so ist für ein gerades $(n+1)$:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} y_0(-y) &= +y_0, \\ y_1(-y) &= -y_1, \\ y_2(-y) &= +y_2, \\ &\cdots\cdots \\ y_n(-y) &= -y_n; \end{aligned}\right.$$

während man für ein ungerades $(n+1)$ hat:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} y_0(-y) &= +Y_0, \\ y_1(-y) &= -Y_1, \\ y_2(-y) &= +Y_2, \\ &\cdots\cdots \\ y_n(-y) &= +Y_n. \end{aligned}\right.$$

Dadurch ergeben sich nun folgende Gleichungen:

(16)

$$\left\{\begin{aligned} (x-y)_0 &= x_0y_0 + x_1y_n - x_2y_{n-1} + x_3y_{n-2} - \ldots + x_ny_1, \\ (x-y)_1 &= -x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_n - x_3y_{n-1} + \ldots - x_ny_2, \\ (x-y)_2 &= x_0y_2 - x_1y_1 + x_2y_0 + x_3y_n - \ldots + x_ny_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x-y)_n &= -x_0y_n + x_1y_{n-1} - x_2y_{n-2} + x_3y_{n-3} - \ldots + x_ny_0; \end{aligned}\right.$$

$(n+1)$ eine gerade Zahl.

so wie:

(17)

$$(x-y)_0 = x_0 Y_0 - x_1 Y_n + x_2 Y_{n-1} - x_3 Y_{n-2} + \ldots + x_n Y_1,$$
$$(x-y)_1 = -x_0 Y_1 + x_1 Y_0 - x_2 Y_n + x_3 Y_{n-1} - \ldots - x_n Y_2,$$
$$(x-y)_2 = x_0 Y_2 - x_1 Y_1 + x_2 Y_0 - x_3 Y_n + \ldots + x_n Y_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x-y)_n = x_0 Y_n - x_1 Y_{n-1} + x_2 Y_{n-2} - x_3 Y_{n-3} + \ldots + x_n Y_0.$$

$(n+1)$ eine ungerade Zahl.

Die vorstehend mitgetheilten Relationen, welche Statt finden für unsere Functionen, sobald man in ihnen die Summe oder Differenz des Arguments einführt, und welche die Verallgemeinerung der Formeln darstellen, die man für $\mathrm{Cos}(x \pm y)$ und $\mathrm{Sin}(x \pm y)$, $\cos(x \pm y)$ und $\sin(x \pm y)$ hat, können zur Herleitung von verschiedenen anderen benutzt werden; so z. B. zur Bestimmung der Werthe von $(2X)_0, (2X)_1, \ldots (2X)_n$, so wie von $(2x)_0, (2x)_1, \ldots (2x)_n$ durch die Functionen mit einfachem Argument. Wir wollen hier nur diejenigen Formeln anführen, welche man aus den Bestimmungen für $(X-Y)_0$, $(X-Y)_1 \ldots (X-Y)_n$; $(x-y)_0$, $(x-y)_1 \ldots$ $\ldots (x-y)_n$ erhält, wenn man $X = Y$, $x = y$ annimmt. Bedenkt man, dass die erste Function für das Argument 0 den Werth 1, alle übrigen den Werth 0 haben, so findet man:

(18)

$$X_0^2 - 2.(X_1 X_n - X_2 X_{n-1} + X_3 X_{n-2} - \ldots \pm X_{\frac{n-1}{2}} . X_{\frac{n+3}{2}}) \mp X_{\frac{n+1}{2}}^2 = 1,$$
$$-X_1^2 + 2.(X_0 X_2 - X_3 X_n + X_4 X_{n-1} + \ldots \mp X_{\frac{n+1}{2}} . X_{\frac{n+5}{2}}) \pm X_{\frac{n+3}{2}}^2 = 0,$$
$$X_2^2 + 2.(X_0 X_4 - X_1 X_3 - X_5 X_n + \ldots \mp X_{\frac{n+3}{2}} . X_{\frac{n+7}{2}}) \pm X_{\frac{n+5}{2}}^2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mp X_{\frac{n-1}{2}}^2 + 2.(X_0 X_{n-1} - X_1 X_{n-2} + X_2 X_{n-3} - \ldots \pm X_{\frac{n-3}{2}} . X_{\frac{n+1}{2}}) - X_n^2 = 0;$$

$n+1$ eine gerade Zahl.

und:

(19)

$$x_0^2 + 2.(x_1x_n - x_2x_{n-1} + x_3x_{n-2} - \ldots \pm x_{\frac{n-1}{2}}.x_{\frac{n+3}{2}}) \mp x_{\frac{n+1}{2}}^2 = 1,$$

$$-x_1^2 + 2.(x_0x_2 + x_3x_n - x_4x_{n-1} + \ldots \pm x_{\frac{n+1}{2}}.x_{\frac{n+5}{2}}) \mp x_{\frac{n+3}{2}}^2 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mp x_{\frac{n-1}{2}}^2 + 2.(x_0x_{n-1} - x_1x_{n-2} + x_2x_{n-3} - \ldots \pm x_{\frac{n-3}{2}}.x_{\frac{n+1}{2}}) + x_n^2 = 0.$$

$n+1$ eine gerade Zahl.

Diese Gleichungen stellen ganz allgemein in reeller Form $\frac{n+1}{2}$ von den n Bedingungsgleichungen dar, welche zwischen den in ihnen enthaltenen Functionen überhaupt stattfinden. Die allgemeine Form für sämmtliche Bedingungsgleichungen haben wir bereits früher (Archiv XXI. V. (76)) angegeben, wo sie aber alle in imaginärer Form erscheinen. Wir leiten, z. B. $n=3$ setzend, aus den Gl. (19) sofort zwei von den Bedingungsgleichungen her, durch welche die Functionen x_0, x_1, x_2, x_3 verbunden werden; sie lauten:

$$x_0^2 + 2x_1x_3 - x_2^2 = 1$$

und

$$-x_1^2 + 2x_0x_2 + x_3^2 + 0.$$

(vergl. Archiv XXXI. pag. 309.).

Ferner ergiebt sich aus (9) und (17) durch die Annahme $Y=X$, $y=x$ übereinstimmend:

(20)

$$X_0x_0 + (X_1x_n - X_nx_1) - (X_2x_{n-1} - X_{n-1}x_2) + (X_3x_{n-2} - X_{n-2}x_3) - \ldots = 1,$$

$$-(X_0x_1 - X_1x_0) + (X_2x_n + X_nx_2) - (X_3x_{n-1} + X_{n-1}x_3) + \ldots = 0,$$

$$(X_0x_2 + X_2x_0) - X_1x_1 + (X_3x_n - X_nx_3) - (X_4x_{n-1} - X_{n-1}x_4) + \ldots = 0,$$

$$-(X_0x_3 - X_3x_0) + (X_1x_2 - X_2x_1) + (X_4x_n + X_nx_4) - (X_5x_{n-1} + X_{n-1}x_5) + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(X_0x_n + X_nx_0) - (X_1x_{n-1} + X_{n-1}x_1) + (X_2x_{n-2} + X_{n-2}x_2) - \ldots = 0.$$

Man kann aus diesen Relationen durch Elimination die Func-

tionen x_0, $x_1 \ldots . x_n$ mittelst der Functionen X_0, $X_1 \ldots . X_n$ ausdrücken. So erhält man, z. B. $n=2$ setzend, für die Functionen des dritten Grades:

(21)

$$x_0 = X_0^2 - X_1 X_2, \quad x_1 = X_0 X_1 - X_2^2, \quad x_2 = X_1^2 - X_0 X_2$$

und

(22)

$$X_0 = x_0^2 + x_1 x_2, \quad X_1 = x_0 x_1 + x_2^2, \quad X_2 = x_1^2 - x_0 x_2,$$

Bestimmungen, welche mit den von Beyssell (Archiv XXXI. pag. 312.) gegebenen übereinkommen, da offenbar $X_0 = (-x)_0$, $-X_1 = (-x)_1$ und $X_2 = (-x)_2$ ist.

Wir fügen noch die Verallgemeinerung der Moivre'schen Formel $(\cos x \pm i \sin x)^m = \cos mx \pm i \sin mx$ dem Vorstehenden hinzu. Man hat allgemein:

(23)

$$(X_0 + X_1 + X_2 + \ldots . + X_n)^m = (mX)_0 + (mX)_1 + (mX)_2 + \ldots . + (mX)_n,$$

$$(X_0 + \varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_1^2 X_2 + \ldots . + \varepsilon_1^n X_n)^m = (mX)_0 + \varepsilon_1 (mX)_1 + \varepsilon_1^2 (mX)_2 + \ldots . + \varepsilon_1^n (mX)_n,$$

$$(X_0 + \varepsilon_2 X_1 + \varepsilon_2^2 X_2 + \ldots . + \varepsilon_2^n X_n)^m = (mX)_0 + \varepsilon_2 (mX)_1 + \varepsilon_2^2 (mX)_2 + \ldots . + \varepsilon_2^n (mX)_n,$$

. . . . . .

$$(X_0 + \varepsilon_n X_1 + \varepsilon_n^2 X_2 + \ldots . + \varepsilon_n^n X_n)^m = (mX)_0 + \varepsilon_n (mX)_1 + \varepsilon_n^2 (mX)_2 + \ldots . + \varepsilon_n^n (mX)_n.$$

Die Richtigkeit dieser Beziehungen sieht man sofort ein, wenn man die Gleichungen (1) in Betracht zieht. Aus ihnen ergiebt sich ferner wegen (10):

$$(x_0 + \delta x_1 + \delta^2 x_2 + \ldots . + \delta^n x_n)^m = (mx)_0 + \delta (mx)_1 + \delta^2 (mx)_2 + \ldots . + \delta^n (mx)_n,$$

$$(x_0 + \delta_1 x_1 + (\delta_1)^2 x_2 + \ldots . + (\delta_1)^n x_n)^m = (mx)_0 + \delta_1 (mx)_1 + (\delta_1)^2 (mx)_2 + \ldots . + (\delta_1)^n (mx)_n,$$

$$(x_0 + \delta_2 x_1 + (\delta_2)^2 x_2 + \ldots . + (\delta_2)^n x_n)^m = (mx)_0 + \delta_2 (mx)_1 + (\delta_2)^2 (mx)_2 + \ldots . + (\delta_2)^n (mx)_n,$$

. . . . . .

$$(x_0 + \delta_n x_1 + (\delta_n)^2 x_2 + \ldots . + (\delta_n)^n x_n)^m = (mx)_0 + \delta_n (mx)_1 + (\delta_n)^2 (mx)_2 + \ldots . + (\delta_n)^n (mx)_n;$$

für welche man auch, wenn man durch δ_0, δ_1, $\delta_2 \ldots \delta_n$ die $(n+1)$ Wurzeln der Gleichung $x^{n+1}+1=0$ bezeichnet, schreiben kann:

(24)

$$(x_0+\delta_0 x_1+\delta_0^2 x_2+\ldots+\delta_0^n x_n)^m=(mx)_0+\delta_0(mx)_1+\delta_0^2(mx)_2+\ldots \ldots+\delta_0^n(mx)_n,$$

$$(x_0+\delta_1 x_1+\delta_1^2 x_2+\ldots+\delta_1^n x_n)^m=(mx)_0+\delta_1(mx)_1+\delta_1^2(mx)_2+\ldots \ldots+\delta_1^n(mx)_n,$$

$$(x_0+\delta_2 x_1+\delta_2^2 x_2+\ldots+\delta_2^n x_n)^m=(mx)_0+\delta_2(mx)_1+\delta_2^2(mx)_2+\ldots \ldots+\delta_2^n(mx)_n,$$

. . . . . .

$$(x_0+\delta_n x_1+\delta_n^2 x_2+\ldots+\delta_n^n)^m=(mx)_0+\delta_n(mx)_1+\delta_n^2(mx)_2+\ldots \ldots+\delta_n^n(mx)_n.$$

Die speciellen, den letzten Gleichungen (24) entsprechenden Beziehungen für den Fall $n=2$, d. h. für die Functionen des dritten Grades, sind von Simon (Archiv XXVII. p. 317) und für den Fall $n=3$, d. h. für die Functionen des vierten Grades, von Knar (Archiv XXVII. p. 413) aufgestellt worden.

Zum Schluss will ich noch die Entwickelung der Bedingungsgleichungen, welche zwischen den Functionen des dritten und vierten Grades Statt finden, mittheilen. Für die Functionen X_0, X_1, X_2 sind dieselben bereits in dem früheren Aufsatze (Archiv XXI. p. 77) angegeben worden; für die Functionen x_0, x_1, x_2 ist die eine von Beyssell (Archiv XXXI. p. 308) in reeller Form aufgestellt worden, die andere jedoch nur in imaginärer Form. Letztere hat dort folgende Gestalt:

$$(x_0+3_1 x_1+3_1^2 x_2)^{3_1}\cdot(x_0+3_3 x_1+3_3^2 x_2)^{3_3}\cdot(x_0+3_5 x_1+3_5^2 x_2)^{3_5}=1,$$

wobei

$$3_1=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3},\quad 3_3=-1=\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2},$$

$$3_5=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Durch Einführung dieser Werthe in die Exponenten der Bedingungsgleichung wird:

$$(x_0+3_1x_1+3_1{}^2x_2)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_0+3_3x_1+3_3{}^2x_2)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_0+3_5x_1+3_5{}^2x_2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times(x_0+3_1x_1+3_1{}^2x_2)^{\frac{1}{2}\sqrt{-3}}\cdot(x_0+3_3x_1+3_3{}^2x_2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$\times(x_0+3_5x_1+3_5{}^2x_2)^{-\frac{1}{2}\sqrt{-3}}=1.$$

Erhebt man nun in das Quadrat und lässt dann die drei Factoren, deren Product nach der ersten Bedingungsgleichung den Werth Eins hat, fort, so hat man:

$$(x_0+3_1x_1+3_1{}^2x_2)^{\sqrt{-3}}\cdot(x_0+3_3x_1+3_3{}^2x_2)^{-3}\cdot(x_0+3_5x_1+3_5{}^2x_2)^{-\sqrt{-3}}=1,$$

d. h.

$$\left\{\frac{x_0+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}x_1+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}x_2}{x_0+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}x_1+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}x_2}\right\}^{\sqrt{-3}}=(x_0-x_1+x_2)^3,$$

oder:

$$\left\{\frac{2x_0+x_1-x_2+\sqrt{-3}\cdot(x_1+x_2)}{2x_0+x_1-x_2-\sqrt{-3}\cdot(x_1+x_2)}\right\}^{\sqrt{-3}}=(x_0-x_1+x_2)^3.$$

Hieraus erhält man weiter:

$$\left\{\frac{1+\sqrt{-1}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{x_1+x_2}{2x_0+x_1-x_2}}{1-\sqrt{-1}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{x_1+x_2}{2x_0+x_1-x_2}}\right\}^{\sqrt{-1}}=(x_0-x_1+x_2)^{\sqrt{3}}.$$

Da man nun

$$\left(\frac{1+\sqrt{-1}\cdot y}{1-\sqrt{-1}\cdot y}\right)^{\sqrt{-1}}=\frac{1}{e^{2\operatorname{arctg}y}}$$

hat (vergl. Archiv XXI. p. 69), so ergiebt sich jetzt die Beziehung:

$$(x_0-x_1+x_2)^{\sqrt{3}}\cdot e^{2\operatorname{arctg}\sqrt{3}\cdot\frac{x_1+x_2}{2x_0+x_1-x_2}}=1$$

oder, wenn man die Logarithmen nimmt:

$$(25)\quad \log(x_0-x_1+x_2)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{3}\cdot\frac{x_1+x_2}{2x_0+x_1-x_2}$$

Was die Functionen des vierten Grades betrifft, so finden wir zunächst, dass in den von Beyssell (Archiv XXXI. p. 304) mitgetheilten Werthen bei den Ausdrücken von x_1 und x_3 im zweiten Gliede der Parenthese der Factor $\sin x\sqrt{\frac{1}{2}}$ durch $\cos x\sqrt{\frac{1}{2}}$ ersetzt werden muss. Die Bedingungsgleichungen entwickeln wir

auf folgende Weise. Da die Wurzeln der Gleichung $x^4 = 1$ sind $\varepsilon_0 = +1$, $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = +i$, $\varepsilon_3 = -i$, wobei i die Bedeutung $\sqrt{-1}$ hat, so kommen bei Aufstellung jener Gleichungen nachstehende Ausdrücke in Betracht:

$$(26) \quad \ldots\ldots \begin{cases} X_0 + X_1 + X_2 + X_3 = A, \\ X_0 - X_1 + X_2 - X_3 = B, \\ X_0 + iX_1 - X_2 - iX_3 = C, \\ X_0 - iX_1 - X_2 + iX_3 = D; \end{cases}$$

und man erhält nach Archiv XXI. V. Gleichung (76) folgende drei Bedingungsgleichungen:

(27)

$$(\log A)^3 + (\log A)^2 . \log B + \log A . (\log B)^2 + (\log B)^3 = 0,$$

$$(\log A)^3 + (\log A)^2 . \log C + \log A . (\log C)^2 + (\log C)^3 = 0$$

und

$$(\log A)^3 + (\log A)^2 . \log D + \log A . (\log D)^2 + (\log D)^3 = 0.$$

Subtrahirt man die erste der Gleichungen (27) von:

$$(\log A + \log B)^3 = (\log A)^3 + 3(\log A)^2 . \log B + 3 \log A . (\log B)^2 + (\log B)^3,$$

so folgt:

$$(\log A + \log B)^3 = 2(\log A)^2 . \log B + 2 \log A . (\log B)^2$$
$$= 2 \log A . \log B . (\log A + \log B).$$

Daher ist:

$$(28) \quad \log(A.B) . \{(\log(A.B))^2 - 2 \log A . \log B\} = 0.$$

Durch die entsprechende Transformation bekommt man aus der zweiten und dritten der Gleichungen (27):

$$(29) \quad \log(A.C) . \{(\log(A.C))^2 - 2 \log A . \log C\} = 0$$

und

$$(30) \quad \log(A.D) . \{(\log(A.D))^2 - 2 \log A . \log D\} = 0.$$

Um die Gleichung (28) zu befriedigen, setzen wir:

$$(31) \quad \log(A.B) = 0, \text{ d. h. } A.B = 1,$$

wodurch wir vermöge (26) zu der Relation gelangen:

$$(32) \quad X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + 2X_0X_2 - 2X_1X_3 = 1$$

oder

$$(X_0+X_2)^2-(X_1+X_3)^2=1.$$

Der Gleichung (29) wird genügt durch:

$$(\log(A.C))^2=2\log A.\log C$$

oder

$$(\log A+\log C)^2=(\log A)^2+2\log A.\log C+(\log C)^2=2\log A.\log C,$$

d. h.

$$(\log A)^2+(\log C)^2=0$$

oder

$$(33)\qquad (\log A+i.\log C)\ (\log A-i.\log C)=0.$$

Auf demselben Wege kommt man von Gleichung (30) zu der Beziehung:

$$(34)\qquad (\log A+i.\log D).(\log A-i\log D)=0.$$

Damit den Geichungen (32) und (33) Genüge geschieht, setze man:

$\log A+i\log C=0$ oder $\log A=-i\log C$ und folglich $A=C^{-i}$,

$\log A-i\log D=0$ - $\log A=i\log D$ - - $A=D^i$.

Hieraus erhält man erstens: $C^{-i}=D^i$ oder $C=D^{-1}$, d. h.

$$(35)\qquad C.D=1,$$

und zweitens: $A^2=C^{-i}.D^i$ oder

$$(36)\qquad A^2=\left(\frac{D}{C}\right)^i.$$

Die Relation (35) führt mittelst (26) zu:

$$(37)\qquad X_0^2+X_1^2+X_2^2+X_3^2-2X_0X_2-2X_1X_3=1$$

oder

$$(X_0-X_2)^2+(X_1-X_3)^2=1.$$

Durch die Beziehung (36) aber erhält man:

$$(X_0+X_1+X_2+X_3)^2=\left\{\frac{X_0-X_2-i.(X_1-X_3)}{X_0-X_2+i.(X_1-X_3)}\right\}^i,$$

mithin:

$$X_0 + X_1 + X_2 + X_3 = \left\{\frac{1 - i.\frac{X_1 - X_3}{X_0 - X_2}}{1 + i.\frac{X_1 - X_3}{X_0 - X_2}}\right\}^{\frac{i}{2}},$$

wodurch sich ergiebt:

$$\log(X_0 + X_1 + X_2 + X_3) = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_1 - X_3}{X_0 - X_2}\right)$$

oder auch:

$$X_0 + X_1 + X_2 + X_3 = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{X_1 - X_3}{X_0 - X_2}\right)}. \tag{38}$$

Um nun zu den Functionen, in deren Reihen die Gliederzeichen alterniren, überzugehen, muss man, da $(1+i).\sqrt{\frac{1}{2}}$ eine Wurzel der Gleichung $x^4 = -1$ ist, den Gleichungen (10) entsprechend setzen:

$$\left\{\begin{aligned} X_0 &= x_0, \\ X_1 &= (1+i).\sqrt{\tfrac{1}{2}}.x_1, \\ X_2 &= i.x_2, \\ X_3 &= (-1+i).\sqrt{\tfrac{1}{2}}.x_3. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Führt man diese Werthe in Gleichung (32) ein, so wird:

$$x_0^2 - x_2^2 + 2x_1x_3 - 1 = i.(x_1^2 - x_3^2 - 2x_0x_2),$$

d. h.

$$(x_0^2 - x_2^2 + 2x_1x_3 - 1)^2 + (x_1^2 - x_3^2 - 2x_0x_2)^2 = 0. \tag{40}$$

Diese Gleichung ist an die Stelle der von Beyssell im Archiv XXXI. pag. 309. aufgestellten Relation

$$(x_0^2 + 2x_1x_3 - x_2)^2 + (x_3^2 + 2x_0x_2 - x_1^2)^2 = 1$$

zu setzen.

Wenn man jetzt Gleichung (37) in derselben Weise behandelt, so gelangt man ebenfalls zu der Beziehung (40). Sie zerfällt in der That in zwei Gleichungen, nämlich:

$$x_0^2 - x_2^2 + 2x_1x_3 = 1$$

und

$$x_1^2 - x_3^2 - 2x_0x_2 = 0,$$

durch deren Addition und Subtraction man erhält:

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_0x_2 + 2x_1x_3 = 1 \tag{41}$$

und

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_0x_2 + 2x_1x_3 = 1. \quad (42)$$

Diese entsprechen den Gleichungen (32) und (37).

Es bleibt nun noch übrig, die der Gleichung (38) correspondirende Relation zu ermitteln. Es ist

$$A^i = C \quad (\text{denn } A = C^{-i})$$

und

$$\frac{C^i}{D^i} = \frac{1}{A^2},$$

folglich

$$\frac{A^i}{D^i} \cdot C^i = \frac{C}{A^2} \text{ oder } \left(\frac{A}{D}\right)^i = \frac{C}{A^2} \cdot C^{-i} = \frac{C}{A^2} \cdot A = \frac{C}{A} = \frac{C.B}{A.B}.$$

Weil aber $A.B = 1$ ist, so ergiebt sich:

$$\left(\frac{A}{D}\right)^i = B.C. \quad (43)$$

Führen wir jetzt die Werthe (39) ein und sondern das Reelle vom Imaginären, so entsteht:

$$A = x_0 + x_1 \cdot \nu_2^1 - x_3 \cdot \nu_2^1 + i.(x_2 + x_1 \cdot \nu_2^1 + x_3 \cdot \nu_2^1),$$
$$D = x_0 + x_1 \cdot \nu_2^1 - x_3 \cdot \nu_2^1 - i.(x_2 + x_1 \cdot \nu_2^1 + x_3 \cdot \nu_2^1),$$
$$B = x_0 - x_1 \cdot \nu_2^1 + x_3 \cdot \nu_2^1 + i.(x_2 - x_1 \cdot \nu_2^1 - x_3 \cdot \nu_2^1),$$
$$C = x_0 - x_1 \cdot \nu_2^1 + x_3 \cdot \nu_2^1 - i.(x_2 - x_1 \cdot \nu_2^1 - x_3 \cdot \nu_2^1).$$

Folglich wird wegen (43):

$$\left\{\frac{1 + i.\dfrac{x_1 \cdot \nu_2^1 + x_2 + x_3 \cdot \nu_2^1}{x_0 + x_1 \cdot \nu_2^1 - x_3 \cdot \nu_2^1}}{1 - i.\dfrac{x_1 \cdot \nu_2^1 + x_2 + x_3 \cdot \nu_2^1}{x_0 + x_1 \cdot \nu_2^1 - x_3 \cdot \nu_2^1}}\right\}^i$$
$$= (x_0 - x_1 \cdot \nu_2^1 + x_3 \cdot \nu_2^1)^2 + (x_2 - x_1 \cdot \nu_2^1 - x_3 \cdot \nu_2^1)^2.$$

Geht man zu den Logarithmen über, so bekommt man:

$$\log\{(x_0 - (x_1 - x_3) \cdot \nu_2^1)^2 + (x_2 - (x_1 + x_3) \cdot \nu_2^1)^2\}$$
$$+ 2 \operatorname{arctg} \left\{\frac{x_2 + (x_1 + x_3) \cdot \nu_2^1}{x_0 + (x_1 - x_3) \cdot \nu_2^1}\right\} = 0;$$

oder auch:

$$(x_0 - (x_1 - x_3) \cdot \nu_2^1)^2 + (x_2 - (x_1 + x_3) \cdot \nu_2^1)^2 = e^{-2\operatorname{arctg}\left\{\frac{x_2 + (x_1 + x_3) \cdot \nu_2^1}{x_0 + (x_1 - x_3) \cdot \nu_2^1}\right\}}. \quad (44)$$

Dies ist die der Gleichung (38) entsprechende Relation.

XIX.

Direkte wissenschaftliche Begründung des üblichen Verfahrens bei der Division und Wurzel-Ausziehung in dekadischen Zahlen.

Von

Herrn *A. Niegemann*,

ordentlichem Lehrer am katholischen Gymnasium in Cöln.

1. Lehrsatz. Eine Einheit irgend einer Ordnung in dekadischen Zahlen ist grösser als die Summe aller Einheiten der niederen Ordnungen, auch wenn sie mit den grössten Koeffizienten, also mit 9, behaftet sind.

Beweis. Es ist

$$\frac{10^n = 9.10^{n-1} + 9.10^{n-2} + \ldots + 9.10^2 + 9.10 + 9 + 1}{10^n > 9.10^{n-1} + 9.10^{n-2} + \ldots + 9.10^2 + 9.10 + 9}.$$

2. Zusatz. Vermehrt man eine Stelle in einem Faktor eines Produkts um eine Einheit, während man alle niederen Stellen desselben durch Nullen ersetzt, so wird dadurch dieser Faktor und folglich auch das Produkt grösser.

3. Zusatz. Von zwei gleichstelligen Zahlen ist diejenige die grössere, welche an der Stelle, wo sie sich von der Linken zu unterscheiden anfangen, die grössere Ziffer hat, die übrigen Ziffern können sein wie man will.

4. Zusatz. Sucht man aus dem Produkte und einem Faktor desselben den andern, indem man die Stellen von der höchsten an nach einander bestimmt, so ist man immer sicher, die höchste Stelle, und wenn man schon eine oder mehrere sicher

bestimmt hat, die nächst folgende, nicht um eine Einheit zu hoch genommen zu haben, wenn das Produkt der höchsten Stelle oder der so weit bestimmten Zahl mit Ersetzung der folgenden Stellen durch Nullen in den gegebenen Faktor nicht grösser ist als das gegebene Produkt.

5. Lehrsatz. Das Produkt zweier Zahlen hat entweder so viele Ziffern als beide Faktoren zusammen genommen haben, oder eine weniger.

Beweis. Es ist:

$$\alpha)\ 10^{m-1}.10^{n-1}=10^{m+n-2},\quad \beta)\ 10^{m}.10^{n}=10^{m+n}.$$

Aus α) ergibt sich: das Produkt der kleinsten $m$ziffrigen Zahl in die kleinste $n$ziffrige gibt die kleinste $(m+n-1)$ziffrige, und aus β): das Produkt der kleinsten $(m+1)$ziffrigen Zahl in die kleinste $(n+1)$ziffrige gibt die kleinste $(m+n+1)$ziffrige. Wächst nun einer der Faktoren 10^{m-1} und 10^{n-1}, oder wachsen beide, ohne die Gränze 10^{m} und 10^{n} zu erreichen, also ohne $(m+1)$- oder $(n+1)$ziffrig zu werden, so wächst das Produkt 10^{m+n-2}, ohne die Gränze 10^{m+n} oder die kleinste $(m+n-1)$ziffrige Zahl zu erreichen. Also liegen die Produkte einer m- und einer $n$ziffrigen Zahl zwischen der kleinsten $(m+n-1)$- und $(m+n+1)$ziffrigen Zahl, haben also $(m+n-1)$ oder $m+n$ Ziffern.

6. Zusatz. Die Anzahl der Ziffern eines Faktors ist gleich der des Produktes, vermindert um die des andern Faktors, oder um 1 grösser.

7. Lehrsatz. Hat das Produkt zweier Zahlen so viele Ziffern, als die beiden Faktoren zusammen haben, und schneidet man in demselben von der Linken so viele Ziffern ab, als der eine Faktor hat, so ist die abgeschnittene Zahl kleiner als dieser Faktor. Es ist

$$876543 \times 978 = 857259|054 \text{ und } 857259 < 876543.$$

Beweis. $A.B$ sei das Produkt der $m$ziffrigen Zahl A in die $n$ziffrige Zahl B und habe $(m+n)$ Ziffern, so ist, wenn man die durch das Abschneiden der m Ziffern entstehende Zahl mit M, den übrigen Theil mit N bezeichnet:

$$A.B = M.10^{n}+N.$$

Nun ist aber B $n$ziffrig, folglich kleiner als die kleinste $(n+1)$ziffrige Zahl. Daher:

$$\frac{\begin{array}{c} B < 10^n \\ \hline \left.\begin{array}{c} A.B \\ M.10^n + N \end{array}\right\} < A.10^n \\ \hline M.10^n < A.10^n \end{array}}{M < A.}$$

8. Lehrsatz. Hat das Produkt zweier Zahlen eine Ziffer weniger, als beide Faktoren zusammen haben, und schneidet man in demselben von der Linken so viele Ziffern ab, als der eine Faktor hat, so ist der abgeschnittene Theil gleich oder grösser als dieser Faktor.

Es ist

$\alpha)$ $100114.876 = 876|99864,$ $\quad$ $\beta)$ $273457.238 = 650827|66$

und $876 = 876$ $\quad$ $650827 > 273457.$

Beweis. Unter Beibehaltung obiger Bezeichnung hat man, da $A.B$ $(m+n-1)$ziffrig ist:

$$A.B = M.10^{n-1} + N,$$

und weil B $n$ziffrig ist, so ist:

$$B \gtreqless 10^{n-1}.$$

Ist $\alpha)$ $B \doteq 10^{n-1}$, so ist $A.B = A.10^{n-1}$. Also hat das Produkt $A.B$ die m Ziffern von A und $(n-1)$ Nullen. Schneidet man also von dem $(m+n-1)$ziffrigen Produkte m Ziffern ab, so erhält man A; daher $M = A$. Ist

$$\beta) \quad B > 10^{n-1},$$

so ist

$$\left.\begin{array}{c} A.B \\ M.10^{n-1} + N \end{array}\right\} > A.10^{n-1}.$$

Nun kann M nicht kleiner sein als A. Denn wollte man annehmen:

$$M + C = A,$$

so wäre:

$$\left.\begin{array}{c} (M+C).10^{n-1} \\ M.10^{n-1} + C.10^{n-1} \end{array}\right\} = A.10^{n-1},$$

und, weil

$$M.10^{n-1} + N > A.10^{n-1},$$

folglich:

$$\frac{M.10^{n-1} + N > M.10^{n-1} + C.10^{n-1}}{N > C.10^{n-1}},$$

welches aber nicht möglich ist, indem N, als aus einer $(m+n-1)$ziffrigen Zahl durch Abschneiden von m Ziffern entstanden, $(n-1)$ziffrig, $C.10^{n-1}$ aber $n$ziffrig ist, folglich ist M nicht kleiner als A.

9. Zusatz. Schneidet man in dem Produkte zweier Zahlen von der Linken so viele Ziffern ab, als der eine Faktor hat, so hat das Produkt so viele Ziffern als beide Faktoren zusammen haben, oder eine weniger, je nachdem die abgeschnittene Zahl kleiner oder nicht kleiner als dieser Faktor ist.

10. Lehrsatz. Schneidet man im Dividendus so viele und nur so viele Ziffern zur Linken ab, um eine dem Divisor gleiche oder, wenn dieses nicht möglich ist, eine um so wenig als möglich grössere Zahl zu erhalten, so ist die Anzahl der Ziffern im Quotienten um 1 grösser als die Anzahl der verbleibenden Ziffern im Dividendus.

Beweis. Es ist der Dividendus gleich dem Produkte aus dem Divisor in den Quotienten. Bezeichnet man demnach die Anzahl der Ziffern im Dividendus mit D, im Divisor mit d, im Quotienten mit q, so ist: $D=d+q$ oder $D=d+q-1$. Muss man nun, um eine dem Divisor gleiche oder eine um so wenig als möglich grössere Zahl zu erhalten, so viele Ziffern abschneiden, als der Divisor hat, so ist (Zus. 9.) $D=d+q-1$, also bleiben noch durch Abschneiden von d Ziffern $q-1$ Ziffern übrig. Muss man aber zu dem bezeichneten Zwecke eine Ziffer mehr abschneiden, so ist (Zus. 9.) $D=d+q$; von $(d+q)$ aber $(d+1)$ abgezogen gibt $d+q-d-1=q-1$.

11. Zusatz. Die durch solches Abschneiden verbleibende Anzahl von Ziffern gibt die Anzahl der Nullen der höchsten Einheit im Quotienten an, weil die Anzahl der Nullen der höchsten Einheit einer Zahl immer um 1 kleiner ist als die Anzahl der Ziffern derselben.

12. Beweis der Richtigkeit des Verfahrens bei der Division. Schneidet man in der üblichen Art die Ziffern des Dividendus ab, so erhält man nach Zusatz 11. eine Zahl, worin das Produkt des Koeffizienten der höchsten Einheit des Quotienten in den ganzen Divisor enthalten sein muss, weil der Dividendus entstanden gedacht werden kann durch Multiplikation jedes einzelnen Theiles des Quotienten in den ganzen Divisor. Sucht man nun dasjenige Vielfache des Divisors, welches der abgeschnittenen Zahl am nächsten kommt, ohne sie zu überschreiten, so bestimmt dieses den Koeffizienten der höchsten Einheit des Quotienten. Dieser kann nicht zu klein genommen sein, weil man das grösste Vielfache des Divisors zur Bestimmung desselben

genommen hat, zu gross ist er aber auch nicht, weil das Produkt der höchsten Stelle des Quotienten (des einen Faktors) mit Ersetzung der übrigen Stellen durch Nullen, in den Divisor (den andern Faktor) kleiner ist, als der Dividendus (das Produkt) (Zus. 4.). Nimmt man nach Abzug des Vielfachen von der abgeschnittenen Zahl die folgende Ziffer des Dividendus zu dem Reste, so erhält man die Zahl, worin das Produkt des Koeffizienten der nächst höheren Einheit des Quotienten in den ganzen Divisor enthalten sein muss, woraus man diesen Koeffizienten auf gleiche Weise bestimmt.

Man sieht leicht, wie man, auf diese Weise fortschreitend, alle Ziffern des Quotienten sicher bestimmt.

Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln.

13. Lehrsatz. Wenn man aus einem Radikandus die einzelnen Stellen der Wurzel von der höchsten an nach einander bestimmt, so ist man immer sicher, die höchste Stelle, oder wenn man eine oder mehrere schon bestimmt hat, die folgende nicht um eine Einheit zu hoch genommen zu haben, wenn die bezügliche Potenz der höchsten Stelle oder der so weit bestimmten Zahl unter Ersetzung der übrigen Stellen der Wurzel durch Nullen nicht grösser ist als der Radikandus.

Beweis. Hätte man die höchste Stelle oder, wenn schon einige richtig bestimmt sind, die folgende um eine Einheit zu gross genommen, so wären alle Faktoren der Potenz, auch wenn man die übrigen Stellen durch Nullen ersetzt, zu gross (Zus. 2.), folglich die bezügliche Potenz dieser Zahl grösser als die gegebene Zahl, welches nach der Voraussetzung nicht Statt findet.

14. Beweis der Richtigkeit des Verfahrens bei der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln.

Bestimmt man bei dem Ausziehen der Quadrat- oder Kubikwurzeln aus dem Radikandus diejenige Zahl, welche das Quadrat oder den Kubus des Koeffizienten der höchsten Einheit enthält, und nach dem Quadrat- oder Kubik-Täfelchen die reine Quadrat- oder Kubikzahl, welche dieser bestimmten Zahl am nächsten kommt, ohne sie zu überschreiten, so ist die Quadrat- oder Kubikwurzel derselben der Koeffizient der höchsten Einheit der Wurzel. Denn zu klein ist er nicht, weil zu seiner Bestimmung die grösste Zahl genommen wurde, zu gross ist er aber auch nicht, weil das Quadrat oder der Kubus der höchsten Stelle unter Ersetzung der übrigen Stellen der Wurzel durch Nullen kleiner ist, als das gegebene Quadrat, der gegebene Kubus.

Bei der Bestimmung der übrigen Koeffizienten der auf einander folgenden Einheiten der Wurzel, die man durch Division erhält, erfährt man erst dann sicher, ob man den richtigen gefunden habe, wenn man in dem fortschreitenden Verfahren das Quadrat oder den Kubus dieses Theiles abzuziehen hat, vorausgesetzt, dass man bei der Division den grössten Quotienten genommen hat. Lässt sich die Subtraktion ausführen, so ist der Koeffizient der richtige. Denn zu klein ist er nicht, weil man zu seiner Bestimmung den grössten Quotienten genommen hat, zu gross ist er aber dann auch nicht, weil durch das Abziehen dieses Theiles auch das Abziehen des Quadrates oder des Kubus der so weit bestimmten Zahl unter Ersetzung der üblichen Stellen der Wurzel durch Nullen vollendet wird, welches, falls der Koeffizient um eine Einheit zu gross wäre, nach obigem Satze nicht möglich ist. Kann man demnach bei dem Verfahren bei der Ausziehung der Quadrat- oder Kubikwurzel das Quadrat oder den Kubus des bestimmten Koeffizienten der Wurzel nicht abziehen, so hat man ihn so lange um eine Einheit kleiner zu machen, bis die Subtraktion sich vollziehen lässt, wodurch man dann sicher ist, den richtigen Koeffizienten zu erhalten.

XX.

Die Lösung der Fermat'schen Aufgabe: Wegschaffung der Wurzelgrössen aus algebraischen Ausdrücken, in welchen solche als Summanden vorkommen.

Freier Auszug aus einer handschriftlichen Arbeit des Hauptmanns a. D. Herrn Adolf von der Schulenburg in Magdeburg,

angefertigt von

Herrn Dr. *Jacob Wilhelm Heinrich Lehmann*

in Spandow.

Bei dem gegenwärtigen ungeheuren Umfang der reinen Mathematik ist es weder zu verlangen, noch zu erwarten, dass sehr mühsame und weitläuftige Arbeiten, welche ein Einzelner zum Behuf der Entdeckung einer wichtigen Wahrheit und ihres Beweises durchgemacht hat, von denen, welche das bekannt gemachte Resultat lesen und studiren, in extenso wieder durchgemacht werden sollen. Das Interesse, die Entwickelung bis ins Einzelnste zu verfolgen, wächst freilich mit der Fruchtbarkeit des Resultats; wo aber letzteres, ohne weitere Anwendungen davon abzusehen, nur darauf hinausläuft, zu zeigen, dass das Gesuchte in unvergleichbar viel wenigeren Gliedern dargestellt werden könne, als man jahrhundertelang angenommen hatte, da begnügen sich auch Mathematiker ersten Ranges beim Studium solcher Werke mit Autoritätsglauben, wofern nur der Entdecker versichert, dass er unzweideutige Controllen (entweder durch zwei von einander unabhängige Methoden oder durch Substitution bestimmter Zahlen statt der Buchstaben) angestellt habe, und zugleich angiebt, welche Controllen dies seien, und wofern zugleich der Leser, wenn er etwa nicht persönliches Vertrauen in die Wahrhaftigkeit des an-

geblichen Entdeckers setzen sollte, im Schatz seiner eigenen mathematischen Anschauungen Kriterien zur Hand hat, welche jede Mystification sogleich aufdecken würden, — wie der durchgebildete Philologe Mittel in Händen hat, die Mystificationen eines Wagenseil (Pseudo-Sanchuniathon) und Simonides aufzudecken, oder die „wichtigen historischen Enthüllungen über die wirkliche Todesart Jesu" in ihrer Blösse zu brandmarken, oder wie der durchgebildete Physiker die pseudo-Herschel'schen Entdeckungen über die Mondbewohner in ihrer Nichtswürdigkeit an den Pranger stellen konnte. Ein mit so starken Bollwerken verschanzter mathematischer Autoritätsglaube gewährt eine grössere Sicherheit als aller Kirchen- und Bibelglaube, und alle exacten Wissenschaften wären von jeher viel langsamer fortgeschritten, wenn man jenen gänzlich verschmäht hätte. Wer ihn ganz verschmähen wollte, müsste unter andern alle Logarithmen-Tafeln und alle astronomischen Tafeln von Neuem in extenso selbst berechnen.

Der berühmte Jacobi ging in seiner Abneigung gegen weitläuftige algebraische Entwickelungen noch weiter; er verzichtete, wenn solche hereinzubrechen droheten, vorläufig ganz auf die Entdeckung des beabsichtigten Resultats, und hatte den Grundsatz: „Was ich nicht einigermaassen anständig machen kann, werde ich gar nicht machen, bis auf bessere Zeiten, wo es mir vielleicht, wie Saul, dem Sohne Kis, glückt, beim Suchen der verlorenen Eselinnen meines Vaters ein Königreich zu finden", — wie auch vor 100 Jahren der Philologe Conrad Gesner sagte, man müsse der Seele entlocken, nicht aus ihr herausquälen, was man von ihr haben will. Aber dieser Grundsatz lässt sich nicht consequent durchführen. Bei unausgesetzter Befolgung desselben wären viele äusserst wichtige Wahrheiten, viele uns jetzt höchst willkommene Erleichterungsmittel bisher unentdeckt geblieben und würden vielleicht ewig verborgen bleiben. Wohl uns, dass es ausser den genialen Geistern, denen alles gleichsam spielend und im Schlaf entfällt, auch (und vorzüglich in unserm deutschen Stamme) Männer mit eisernem Fleiss, welche ihre Zeit, ihre Mühe und ihr Papier zum Besten der Mit- und Nachwelt opferten (so dass wir jetzt auf den Lorbeeren unserer fleissigen Vorfahren ruhen können), gegeben hat (wer wollte es leugnen, dass auch unser grosser Landsmann Kepler zu ihnen gehört?) und noch giebt! Zu denjenigen noch lebenden Männern, welche in dieser Beziehung eine rühmliche Beharrlichkeit zeigen, und deren Arbeiten nach der Original-Handschrift wegen der Weitläuftigkeit der Formeln nicht einmal gedruckt werden können, sondern nur eines Auszugs fähig sind, der aber bei der Unzweideutigkeit und Unbezweifelbarkeit der angeführten Controllen vollständige Befriedi-

gung gewährt, gehört auch Herr von der Schulenburg. Derselbe hat in der mir handschriftlich vorliegenden grossen Arbeit den Beweis geliefert, dass die Lösung einer Aufgabe, von der man 200 Jahre lang glaubte, sie führe in ihrem vollständig auseinander gewickelten Endresultate auf eine algebraische ganze Function von 359026206 Gliedern, höchstens auf 245157 Glieder führt. Diese Entdeckung kann man, wenngleich die vollständige Ausführung der Auflösung auch so noch für menschliche Kräfte unmöglich bleibt, für die Wissenschaft nicht anders als höchst interessant nennen.

Die Handschrift beginnt mit einer Anführung aus Egens Handbuch der allgemeinen Arithmetik, Theil II. §. 319.: „Fermat liess durch Mersenne dem Descartes folgende Gleichung vorlegen und ihn auffordern, die Wurzelgrössen hinauszuschaffen:

$$\sqrt{ab-a^2}+\sqrt{a^2+ad+z^2}+\sqrt{ma}+\sqrt{d^2-a^2}+\sqrt{ar+a^2}=ab.$$

Descartes hielt diese Berechnung für leicht, indem er behauptete, es bedürfe dazu nur vier Erhebungen auf's Quadrat, und in wenigen Stunden sei die Arbeit vollendet. Descartes irrte sich, wie leicht einzusehen ist; Genty berechnete in einer von der Toulouser Akademie gekrönten Preisschrift: „„de l'influence de Fermat sur la géométrie de son tems““, dass die successive Erhebung eine Gleichung von 359026206 Gliedern geben würde. Ich halte dafür, dass Fermat selbst die Wegschaffung der Wurzelgrössen aus obiger Gleichung würde unmöglich gewesen sein.“

Hierzu macht Herr von der Schulenburg die Anmerkung: „Ich gab mir, aber vergebens, Mühe, in den Besitz dieser Dissertation zu gelangen, und weiss also nicht, auf welchem Wege Genty zu obigem Resultate kam. Es ist übrigens $359026206 = 2.3.7.11.29.127.211$.“

Hierauf folgt:

§. 1.

Aus einer Gleichung des 5ten Grades:

$$(1) \qquad x^5+\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon=0$$

mit den Unbekannten (Wurzeln) t, v, w, y, z finde ich diejenige desselben Grades:

$$(2) \qquad x^{10}+Ax^8+Bx^6+Cx^4+Dx^2+E=0$$

mit den Unbekannten t^2, v^2, w^2, y^2, z^2, indem ich aus den Gleichungen

$$\overset{5}{\Sigma}t^*) = -\alpha, \quad \overset{10}{\Sigma}tv = \beta, \quad \overset{10}{\Sigma}tvw = -\gamma, \quad \overset{5}{\Sigma}tvwy = \delta, \quad tvwyz = -\varepsilon$$

nach den bekannten Methoden die durch die Coefficienten der Gleichung (1) ausgedrückten symmetrischen Functionen

$$A = -\overset{5}{\Sigma}t^2 = 2\beta - \alpha^2, \quad B = \overset{10}{\Sigma}t^2v^2 = \beta^2 + 2\delta - 2\alpha\gamma,$$

$$C = -\overset{10}{\Sigma}t^2v^2w^2 = 2\beta\delta - \gamma^2 - 2\alpha\varepsilon, \quad D = \overset{5}{\Sigma}t^2v^2w^2y^2 = \delta^2 - 2\gamma\varepsilon,$$

$$E = -t^2v^2w^2y^2z^2 = -\varepsilon^2$$

bestimme. (Herr v. d. S. schiebt noch einen zweiten Beweis der Richtigkeit der Gleichungen

$$(3) \quad A = 2\beta - \alpha^2, \quad B = \beta^2 + 2\delta - 2\alpha\gamma, \quad C = 2\beta\delta - \gamma^2 - 2\alpha\varepsilon,$$
$$D = \delta^2 - 2\gamma\varepsilon, \quad E = -\varepsilon^2$$

ein, indem er die Gleichung (1) mit $x^5 - \alpha x^4 + \beta x^3 - \gamma x^2 + \delta x - \varepsilon$ multiplicirt und die Coefficienten der dadurch entstehenden Gleichung, worin x^9, x^7, x^5, x^3 und x^1 fortgefallen sind, einzeln genommen den Coefficienten der Gleichung (2) gleichsetzt.)

§. 2.

Die Gleichung $\overset{5}{\Sigma}t = -\alpha$ des §. 1. ist diejenige, in welche die Fermat'sche Gleichung übergeht, wenn man

$$\sqrt{ab - a^2} = t, \quad \sqrt{a^2 + ad + z^2} = v, \quad \sqrt{ma} = w, \quad \sqrt{d^2 - a^2} = y,$$
$$\sqrt{ar + a^2} = z, \quad -ab = \alpha$$

setzt. Die Wurzelgrössen aus der Fermat'schen Gleichung wegschaffen, heisst nichts anders, als aus derselben eine ganze Function von t^2, v^2, w^2, y^2, z^2, α ableiten, welche $= 0$ ist. Diese Forderung ist erfüllt, wenn man eine ganze Function von A, B, C, D, E, α gefunden hat, welche $= 0$ ist, oder, was dasselbe sagt, wenn man β, γ, δ, ε aus den Gleichungen (3) des §. 1. eliminirt hat. Da aber β zufolge der ersten unter diesen Gleichungen eine ganze Function von A und α ist, so kommt es nur

*) Ich habe die Formeln des Herrn v. d. S. durch Einführung des vor das allgemeine Glied gesetzten Summenzeichens Σ (mit darüber geschriebener Anzahl der zur Vollendung der symmetrischen Function ähnlich gebildeten Glieder) abgekürzt.

darauf an, aus den vier übrigen Gleichungen γ, δ und ε zu eliminiren. Um dies auszuführen, setzen wir zur Abkürzung:

$$B-\beta^2=m, \quad \alpha^2\beta^2-C=n,$$

wodurch m und n ganze Functionen von A, B, C, α werden, so lassen sich die vier genannten Gleichungen in

$$\beta(m+2\alpha\gamma)=2\beta\delta, \quad \alpha^2\beta^2-n+\gamma^2+2\alpha\varepsilon=2\beta\delta, \quad D=\delta^2-2\gamma\varepsilon, \quad E=-\varepsilon^2,$$

und, wenn man δ eliminirt, in

$$(1)\ \beta m+n-2\alpha\varepsilon=(\gamma-\alpha\beta)^2, \quad (2)\ D=\left(\frac{m}{2}+\alpha\gamma\right)^2-2\gamma\varepsilon, \quad (3)\ E=-\varepsilon^2$$

verwandeln. Multipliciren wir die Gleichung (1) mit α^2, und subtrahiren wir von der dadurch entstehenden Gleichung die Gleichung (2), so erhalten wir die Gleichung

$$\alpha^2(\beta m+n-2\alpha\varepsilon)-D=(2\varepsilon-2\alpha^3\beta-m\alpha)\gamma+\alpha^4\beta^2-\frac{m^2}{4},$$

welche

$$(2\varepsilon-2\alpha^3\beta-m\alpha)\gamma=\alpha^2(\beta m+n-\alpha^2\beta^2-2\alpha\varepsilon)+\frac{m^2}{4}-D,$$

also, wenn man noch auf beiden Seiten $(2\varepsilon-2\alpha^3\beta-m\alpha)\alpha\beta$ subtrahirt,

$$(2\varepsilon-2\alpha^3\beta-m\alpha)(\gamma-\alpha\beta)=\alpha^2(2\beta m+n+\alpha^2\beta^2-2\alpha\varepsilon)+\frac{m^2}{4}-2\alpha\beta\varepsilon-D,$$

und, wenn man beide Seiten der letzteren Gleichung quadrirt und dann statt $(\gamma-\alpha\beta)^2$ seinen Werth aus der Gleichung (1) setzt, die Gleichung

$$(4)\qquad (2\varepsilon-2\alpha^3\beta-m\alpha)^2(\beta m+n-2\alpha\varepsilon)$$
$$=(\alpha^2(2\beta m+n+\alpha^2\beta^2-2\alpha\varepsilon)+\frac{m^2}{4}-2\alpha\beta\varepsilon-D)^2$$

giebt, aus welcher mit Hülfe der Gleichung (3) nur noch ε zu eliminiren ist. Zu diesem Ende ordnen wir die Gleichung (4) nach den Potenzen von ε und stellen statt $2\beta-\alpha^2$ seinen Werth A und statt $\alpha^2\beta^2-n$ seinen Werth C wieder her, schreiben also:

$$-8\alpha\varepsilon^3+4(\alpha^4A+(2\alpha^2+\beta)m-C)\varepsilon^2$$
$$+\alpha(2\alpha^2(A-\alpha^2)C-(\alpha^2+3\beta)m^2-4(\alpha^2+\beta)D-4mn)\varepsilon$$
$$-\alpha^2C(\alpha^2C+\tfrac{1}{4}m^2)+2\alpha^2D(2\beta m+n+\alpha^2\beta^2)-\left(\frac{m^2}{4}-D\right)^2=0.$$

Setzen wir hier statt $-\varepsilon^3$ und ε^2 ihre aus der Gleichung (3) fliessenden Werthe $E\varepsilon$ und $-E$, und bringen wir dann alle nicht mit ε multiplicirten Glieder auf die rechte Seite der Gleichung, so erhalten wir:

$$(2\alpha^2(A-\alpha^2)C-(\alpha^2+3\beta)m^2-4(\alpha^2+\beta)D+8E-4mn)\alpha\varepsilon$$
$$=4(\alpha^4A+(2\alpha^2+\beta)m-C)E+\alpha^2C(\alpha^2C+\tfrac{1}{2}m^2)-2\alpha^2D(2\beta m+n+\alpha^2\beta^2)$$
$$+\left(\frac{m^2}{4}-D\right)^2,$$

welche Gleichung, wenn man beide Seiten quadrirt und dann statt β, m, n und ε^2 ihre in Functionen von A, B, C, E, α ausgedrückten Werthe

$$\frac{A+\alpha^2}{2},\quad B-\left(\frac{A+\alpha^2}{2}\right)^2,\quad \alpha^2\left(\frac{A+\alpha^2}{2}\right)^2-C,\quad -E$$

setzt, die gesuchte ganze Function von A, B, C, D, E, α giebt, welche $=0$ ist. Diese auf 0 gebrachte Gleichung zu bilden wird zwar keinem der geehrten Leser grosse Mühe kosten (sie ist, wenn alle Bruchnenner weggeschafft werden, folgende:

(5)

$$\left\{\begin{array}{l}((4B-(A+\alpha^2)^2)^2+64(\alpha^2C-D))^2-4096\alpha^2E((\alpha^2-A)^2-8B+2(A+\alpha^2)^2)\\ -2048(\alpha^2D-E)(4B(A+\alpha^2)+2\alpha^2(A+\alpha^2)^2-(A+\alpha^2)^3-8C)\end{array}\right\}^2$$
$$+16384\alpha^2E\left\{\begin{array}{c}((4B-(A+\alpha^2)^2)^2+64(\alpha^2C-D))(\alpha^2-A)\\ +4(64(\alpha^2D-E)+(4B-(A+\alpha^2)^2)(4B(A+\alpha^2)\\ +2\alpha^2(A+\alpha^2)^2-(A+\alpha^2)^3-8C))\end{array}\right\}^2=0);$$

indessen findet es Herr v. d. S. für gut, die Gleichung (5) der Zahlen-Controlle zu unterwerfen. Er setzt:

$$\alpha=5,\quad A=-5,\quad B=10,\quad C=-10,\quad D=5,\quad E=-1,\ *)$$

wodurch die Gleichung (5) in

$$9674588160^2-409600(-15116544)^2=0,$$

d. i. in

$$9674588160^2-(640.-15116544)^2=0$$

übergeht.

---

*) Diese sechs Zahlen können nicht unabhängig von einander nach Willkür angenommen werden, denn $\alpha(=-\frac{5}{2}t)$ ist so gut wie A, B, C, D, E eine Function von t^2, v^2, w^2, y^2, z^2. Die gewählten Zahlen genügen den Gleichungen (3) des §. 1., wenn man $\beta=10=\gamma$, $\delta=5$, $\varepsilon=1$ setzt.

§. 3.

Die Gleichung (5) des §. 2. würde zur Lösung der Fermat-schen Gleichung genügen, auch wenn die Summe der fünf gegebenen Wurzelgrössen ebenfalls eine Function unter einem Quadratwurzel-Zeichen wäre, weil die Gleichung (5) nur gerade Potenzen von α enthält. In dem von Fermat vorgelegten speciellen Falle ist $\alpha^2 = a^2b^2$. Hr. v. d. S. hat sich die Mühe gegeben, auch die von Fermat vorgelegten speciellen Werthe von t^2, v^2, w^2, y^2, z^2 in die Gleichungen

$$A = -\overset{5}{\Sigma} t^2, \quad B = \overset{10}{\Sigma} t^2v^2, \quad C = -\overset{10}{\Sigma} t^2v^2w^2, \quad D = \overset{5}{\Sigma} t^2v^2w^2y^2,$$

$$E = -t^2v^2w^2y^2z^2$$

und die auf diese Art herausgebrachten Werthe von A, B, C, D, E, α^2 in die Gleichung (5) zu substituiren, und findet dadurch eine Gleichung, welche 14 Zeilen eines auseinandergeschlagenen ganzen Bogens einnimmt, wobei überdies oft eine Klammer aus einer Zeile in die andere übergeht. Von dieser Gleichung schreibt er weiter in

§. 4.

Wollte man in dieser Gleichung auch noch alle angedeuteten Multiplicationen und Potenz-Erhebungen vollziehen, so würde dieselbe höchstens 245157 Glieder enthalten, und zwar aus folgenden Gründen.

Schon eine oberflächliche Betrachtung der Gleichung (5) des §. 2. ergiebt, dass sie, nach Ausführung der angedeuteten Multiplicationen und Potenz-Erhebungen, in Beziehung auf α^2 eine Gleichung des 16ten Grades wird. (Hr. v. d. S. hat diese angedeuteten Operationen ausgeführt, und eine Gleichung erhalten, welche sechs volle Folioseiten einnimmt. Davon enthalten die sieben letzten Zeilen, jede queer über beide auseinandergeschlagenen Folioseiten geschrieben, allein das von α^2 unabhängige Glied der nach den Potenzen von α^2 geordneten Gleichung, und dieses Glied weist sich als ein vollständiges Quadrat aus, wovon die Wurzel

$$A^8 - 16A^6B + 96A^4B^2 - 128A^4D - 2048A^3E - 256A^2B^3$$

$$+ 1024A^2BD + 8192ABE + 256B^4 - 2048B^2D - 16384CE + 4096D^2$$

ist. Hierzu macht Hr. v. d. S. die Anmerkung: Wäre also in der Fermat'schen Gleichung $\alpha = 0$, d. h. bestände die auf 0 gebrachte

Gleichung nur aus fünf Ausdrücken unter Quadratwurzeln, so genügte die Gleichung

$$A^8-16A^6B+96A^4B^2-128A^4D-2048A^3E-256A^2B^3$$
$$+1024A^2BD+8192ABE+256B^4-2048B^2D-16384CE+4096D^2=0$$

der Aufgabe. Diese letztere Gleichung hat die Eigenschaft, dass, wenn man sich nun $E=0$ denkt, wieder ein vollständiges Quadrat überbleibt, nämlich $(A^4-8A^2B+16B^2-64D)^2=0$. Wird nun auch $D=0$ gedacht, so bleibt abermals ein vollständiges Quadrat, nämlich $(A^2-4B)^2=0$, welcher Ausdruck für den Fall, dass auch $B=0$, das Quadrat $A^2=0$ übrig lässt. Die im Text aufgeführte Gleichung dürfte eine der grössten sein, welche überhaupt jemals berechnet sind. Sie hat besondere Eigenschaften, von welchen ich angebe: Denkt man sich, dass einer der Summanden (ausser α) der Gleichung $\overset{5}{\Sigma}t=-\alpha$, etwa $t_1=0$ werde, so wird auch $E=0$, weil $E=-t^2v^2w^2y^2z^2$ war. Der bleibende Rest jener Gleichung (nach Aussonderung aller Glieder, welche E zum Factor haben) giebt ein vollständiges Quadrat, welches ich aus der Gleichung (5) des §. 2. entnehme und nach Ausziehung der Quadratwurzel schreibe:

$$((4B-(A+\alpha^2)^2)^2+64(\alpha^2C-D))^2$$
$$-2048\alpha^2D(4B(A+\alpha^2)+2\alpha^2(A+\alpha^2)^2-(A+\alpha^2)^3-8C)=0,$$

welches die Gleichung repräsentirt, die aus der Gleichung

$$v+w+y+z=-\alpha$$

durch Fortschaffung der Wurzeln entsteht. Wird die gegebene Gleichung wieder um einen Summanden, ausser α, vermindert, also z. B. $v=0$, so wird in der letzteren Gleichung $D=0$ (denn D war ursprünglich $=\overset{5}{\Sigma}t^2v^2w^2y^2$); der Rest ist nun wieder ein vollständiges Quadrat und wird nach Ausziehung der Quadratwurzel sich darstellen:

$$(4B-(A+\alpha^2)^2)^2+64\alpha^2C=0.$$

Angenommen, es werde nun auch $w=0$, so wird $C=0$, und zur Fortschaffung der Wurzeln aus $y+z=-\alpha$ dient die Gleichung

$$4B-(A+\alpha^2)^2=0,$$

und so schliesslich für $z=-\alpha$ die Gleichung $A+\alpha^2=0$; es wird nämlich in diesem Falle in der That $A=-\alpha^2$. Hieraus, und weil, wie gesagt, α selbst als Grösse unter einem Wurzelzeichen angenommen werden kann, folgt, dass zur Fortschaffung von zwei

Wurzel-Summanden sich eine Gleichung ersten Grades, für drei solche Summanden eine Gleichung zweiten Grades, für vier eine solche vierten Grades, für fünf des achten, für sechs des sechszehnten als Resultat ergeben wird. Wenn also Egen in der Bemerkung zu §. 321. Theil II. seines Handbuchs überall die doppelten Grade für dieselbe Anzahl von Summanden angiebt, irrt er zwar nicht, weil angenommen werden muss, dass er die Anzahl der Grade nach α und nicht nach α^2 bemessen hat, aber jene hochgradigen Gleichungen erscheinen weniger gewaltig, wenn man berücksichtigt, dass ihnen alle Glieder mit ungeraden Exponenten fehlen).

§. 5.

Was nun die Zahl der Glieder der Gleichung nach Ausführung der angedeuteten Operationen betrifft (z. B. A^3 ist in $-(\overset{5}{\Sigma} t^2)^3$ aufzulösen), so ergiebt sich:

Alle in der Gleichung vorkommenden Glieder steigen in Beziehung auf t^2, v^2, w^2, y^2, z^2, α^2 nur auf die 16te Dimension; die Zahl der Glieder ist also höchstens derjenigen des Ausdrucks $(\overset{5}{\Sigma} t^2 + \alpha^2)^{16}$ gleich, d. i. $= \frac{6.7.8....21}{1.2.3....16} = 3.17.19.21 = 20349$.

Im speciellen Fall des Fermat vermehren sich die Elemente, aus welchen jene Combinationen zu 16 sich bilden, um 2. Es sind dieselben nämlich ab, a^2, ad, z^2, am, d^2, ar, a^2b^2; a^2 würde eigentlich viermal vorkommen, was aber hier ausser Acht bleibt; denn dadurch kann niemals eine Vermehrung, allenfalls aber eine Verminderung der Anzahl der Glieder entstehen, indem sich solche, welche $+a^2$ zum Factor haben, gegen solche, welche $-a^2$ haben, vollständig heben könnten. Höchstens würde also die Anzahl der Glieder $= \frac{8.9.10....23}{1.2.3....16} = \frac{20349}{21}.253 = 245157$ sein können.

(Hierzu macht Herr v. d. S. die Anmerkung: „Wie nun Genty in seiner angeführten Dissertation auf die Zahl 359026206 kommt, kann ich nicht errathen; sollte er etwa die einzelnen Glieder so vielfach gerechnet haben, als es ihre Zahlen-Coefficienten andeuten, z. B. $16t^{15}v$ als 16 Glieder, so würde, auch wenn es ein Mittel gäbe, diese Zahl zu berechnen, dieselbe mit 359026206 kaum hoch genug gegriffen sein.“ Ich erwiedere: Da auch mir die genannte Dissertation nicht zu Gesicht gekommen ist, so kann ich nur annehmen, dass Genty bei der Abschätzung der Anzahl

der Glieder zwar die Zahlen-Coefficienten nicht zusammengezählt, aber auch nicht genug dafür gesorgt habe, die sich von einander bloss in den Zahlen-Coefficienten unterscheidenden Glieder jedesmal in Ein Glied zu vereinigen; wie weit er in dieser Sorglosigkeit gegangen sei, kann uns ganz gleichgültig sein; es ist interessant genug, dass Hr. v. d. S. durch einen **strengen Beweis** jene ungeheure Zahl auf eine verhältnissmässig sehr kleine herabgebracht hat. W. L.) Hr. v. d. S. fährt in

§. 6.

fort: Aus dem Bisherigen lässt sich nun der Weg erkennen, auf welchem Wurzeln aller Art aus Ausdrücken, in welchen solche als Summanden vorkommen, fortgeschafft werden können. Aus der Theorie der symmetrischen Functionen ist bekannt, dass es immer möglich ist, aus einer gegebenen Gleichung eine solche desselben Grades zu construiren, in welcher die Unbekannten beliebige ganze Potenzen der Unbekannten der gegebenen Gleichung sind.

Wird nun ein Ausdruck mit e Wurzelzeichen gegeben, z. B.

$$(1) \qquad \sqrt[m]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[o]{c}+\ldots.+\sqrt[q]{d}=0,$$

so vermag ich, $\sqrt[m]{a}, \sqrt[n]{b}, \sqrt[o]{c}, \ldots.$ als Unbekannte einer Gleichung des $e-1$sten Grades anzusehen, und weiss, dass die Summe von $e-1$ Gliedern der Gleichung (1) gleich ist dem $e$ten Gliede mit entgegengesetztem Zeichen, als es in (1) gegeben. Diese Gleichung des $e-1$sten Grades sei:

$$(2) \qquad x^{e-1}+\alpha x^{e-2}+\beta x^{e-3}+\gamma x^{e-4}+\ldots.=0,$$

und ich weiss von dieser Gleichung, dass

$$(3) \qquad \alpha=-\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{b}-\sqrt[o]{c}-\ldots.=\sqrt[q]{d}.$$

Construire ich nun zur Gleichung (2) die, deren Unbekannte die $r$ten Potenzen der Unbekannten der Gleichung (2) sind (wobei ich durch r eine Zahl ausdrücke, welche $m, n, o, \ldots. q$ als Factoren hat und, wenn $m, n, o, \ldots. q$ relative Primzahlen zu einander sind, $=mno\ldots.q$ ist), so erhalte ich:

$$x^{(e-1)mno\ldots.q}+\alpha' x^{(e-2)mno\ldots.q}+\beta' x^{(e-3)mno\ldots.q}+\gamma' x^{(e-4)mno\ldots.q}+\ldots.=0,$$

und weiss, dass

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha' = -a^{no....q} - b^{mo....q} - c^{mn....q} - ...., \\ \beta' = a^{no....q}b^{mo....q} + a^{no....q}c^{mn....q} + b^{mo....q}c^{mn....q} + ..., \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{array}\right\},$$

wo $-a^{no....q} - b^{mo....q} - c^{mn....q} - ....$, $a^{no....q}b^{mo....q} + a^{no....q}c^{mn....q} + b^{mo....q}c^{mn....q} + ...$, u. s. w. mit Hülfe der Theorie der symmetrischen Functionen als ganze Functionen von α, β, γ, ... dargestellt werden müssen. Durch Elimination der Grössen β, γ, ... aus den Gleichungen (4) nach den bekannten Methoden kann ich eine ganze Function von α', β', γ',.... und von α finden, welche $=0$ ist. Stelle ich in dieser auf 0 gebrachten Gleichung statt α', β', γ',.... die ihnen gleichbedeutenden, in (4) angezeigten ganzen Functionen von a, b, c,.... wieder her, so habe ich aus der Gleichung (1) alle Wurzelgrössen mit Ausnahme von α herausgeschafft; auch die durch $\alpha = \sqrt[q]{d}$ ausgedrückte Wurzelgrösse ist in dem Fall herausgeschafft, wenn in der zuletzt erhaltenen Gleichung α nur mit Potenz-Exponenten vorkommt, welche q als Factor enthalten, dessgleichen in dem Fall, wenn d eine vollständige $q$te Potenz ist, oder, was dasselbe sagt, wenn in der Gleichung (1) nicht e Wurzelgrössen, sondern deren nur $e-1$ vorkommen, das $e$te Glied der Gleichung (1) aber ein Glied ohne Wurzelzeichen ist. Ist α nicht herausgeschafft, so fange man die Rechnung von vorne an, denke sich aber zur linken Seite der Gleichung (1) noch ein Glied hinzugefügt, welches $=0$ ist, wodurch die Gleichungen (2) und (3) in

$$x^e + \alpha x^{e-1} + \beta x^{e-2} + \gamma x^{e-3} + ... = 0,$$

$$\alpha = -\sqrt[m]{a} - \sqrt[n]{b} - \sqrt[o]{c} - .... - \sqrt[q]{d} = 0$$

übergehen, und also α zuletzt doch herausgeschafft ist, weil $\alpha = 0$ ist.

Mehr Schwierigkeiten ergeben sich, wenn die Grössen a, b, c,... selbst wieder Summen von Wurzelgrössen sind. Lässt sich ein solcher Ausdruck, z. B. $\sqrt[n]{a' + \sqrt[5]{a''}}$, in die Form $a''' + \sqrt[5]{a''''}$ bringen, so ist diese Reduction zuerst auszuführen; andernfalls betrachtet man zunächst nur die äusseren Wurzeln (in obigem Beispiel die $n$te Wurzel) als diejenigen, welche fortzuschaffen sind; die sich als Resultat ergebende Schlussgleichung enthält dann Glieder mit den inneren Wurzeln (in obigem Beispiele die fünfte

Wurzel) oder Potenzen derselben, und ist nun als Ausdruck für sich abermals nach der angegebenen Methode zu behandeln.

Freilich werden sich solchem Verfahren in den meisten Fällen Rechnungs-Schwierigkeiten entgegenstellen, welche wegen der Weitläuftigkeit der Formeln unüberwindlich sind.

Herr v. d. S. macht in

§. 7.

folgende Schlussbemerkung: Ich vermuthe, dass mir die Gleichung, welche ich in §. 4. gegeben habe, nicht häufig nachgerechnet wird, und wende daher zu ihrer Prüfung die Zahlen-Controlle an, indem ich statt der Elemente der Aufgabe, bis auf Eines, Zahlen willkürlich (aber möglichst leicht zu behandeln) wähle. So nehme ich an, statt des Ausdrucks $\overset{5}{\Sigma} t = -\alpha$ solle der Zahlenausdruck $\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}=5$ zur Controlle dienen. Die Gleichung des §. 4. ist nach α eine solche des 32sten Grades; α muss also 32 Werthe haben. Wirklich finde ich, dass dies diejenigen Werthe sind, in welche sich $\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}$ verwandelt, wenn ich jedes der fünf Glieder $\sqrt{1}$ unabhängig von den vier übrigen Gliedern in seiner doppelten Bedeutung ($+1$ und -1) nehme, wodurch 32 Combinationen entstehen. Für alle diese 32 Werthe würde man nach der Fortschaffung der Wurzeln zu demselben Resultate gelangen.

Wenn man diese 32 Werthe quadrirt, so geben je zwei und zwei dasselbe Resultat (nämlich diejenigen, von denen der eine aus dem andern dadurch entsteht, dass man alle fünf Zeichen zugleich in die entgegengesetzten verwandelt). Dies stimmt mit der Bemerkung, dass die Gleichung des §. 4. nach α^2 nur eine Gleichung des 16ten Grades ist.

Bei der Zahlen-Controlle ergeben sich nun zwar im strengsten Sinne nur sechs Werthe für α, nämlich $+5$, -5, $+3$, -3, $+1$, -1; aber es liegt dies in den gewählten Zahlen; die Gleichung hat Einen Werth $\alpha=5$, Einen Werth $\alpha=-5$, fünf Werthe $\alpha=+3$, fünf Werthe $\alpha=-3$, zehn Werthe $\alpha=+1$ und zehn Werthe $\alpha=-1$. Eben so hat die Gleichung des 16ten Grades Einen Werth $\alpha^2=25$, fünf Werthe $\alpha^2=9$ und zehn Werthe $\alpha^2=1$.

Für α^2 können also in die Gleichung des §. 4. die Werthe 25, 9 und 1 eingeführt werden; A, B, C, D, E haben immer nur Einen bestimmten Werth:

$$A=-\overset{5}{\Sigma}t^2=-5,\quad B=\overset{10}{\Sigma}t^2v^2=10,\quad C=-\overset{10}{\Sigma}t^2v^2w^2=-10,$$

$$D=\overset{5}{\Sigma}t^2v^2w^2y^2=5,\quad E=-t^2v^2w^2y^2z^2=-1.$$

Die Substitution dieser Werthe für A, B, C, D, E in die Gleichung des §. 4., ohne Vollziehung der angedeuteten Multiplicationen und Potenz-Erhebungen, nimmt wieder sechs Folioseiten ein; die Vollziehung der genannten Operationen aber führt auf die Gleichung:

$$\begin{aligned}&\alpha^{32}-16.5\alpha^{30}+8.335\alpha^{28}-16.3135\alpha^{26}+4.146535\alpha^{24}\\&-16.282261\alpha^{22}+8.2959305\alpha^{20}-16.5401095\alpha^{18}\\&+2.112223715\alpha^{16}-16.26374135\alpha^{14}+8.72514153\alpha^{12}\\&-16.36481285\alpha^{10}+4.106365735\alpha^{8}-16.13680495\alpha^{6}\\&+8.9429615\alpha^{4}-16.977589\alpha^{2}+1476225=0,\end{aligned}$$

und es wird schliesslich noch auf zwei ganzen Folioseiten controllirt, dass dieser Gleichung die Werthe

$$\alpha^2=25,\quad \alpha^2=9,\quad \alpha^2=1$$

Genüge thun, indem die Summe der positiven Glieder, je nachdem man $\alpha^2=25$ oder $=9$ oder $=1$ setzt,

$=160349671146492389785600,\quad 321226560000000000,\quad 1331200000,$

die Summe der negativen aber

$$=-160349671146492389785600,\quad -321226560000000000,$$
$$-1331200000$$

wird.

XXI.

Summirung der unendlichen Reihe

$$S_x = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Von

Herrn Doctor *am Ende*

zu Langensalza.

Der Gegenstand des folgenden Aufsatzes ist die Summirung der vorstehenden unendlichen Reihe sowohl für den Fall, dass die Glieder derselben mit einerlei Vorzeichen behaftet sind, als auch für den Fall, dass die Vorzeichen derselben, sei es gliederweise, sei es gruppenweise, abwechseln.

1. Es sei gegeben die Reihe:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots \text{ in inf.},$$

welches bekanntlich die allgemeine Form jeder regelmässigen Reihe ist. Gesetzt nun, es fände sich ein Integral, dessen Werth genau X_k ausmachte, so dass man also hätte:

$$\int_a^x f(x, k)\, dx = X_k,$$

so wäre obige Reihe gleich der folgenden:

$$\int_a^x f(x,1)\,dx + \int_a^x f(x,2)\,dx + \int_a^x f(x,3)\,dx + \ldots \text{ in inf.}$$

$$= \int_a^x \{f(x,1) + f(x,2) + f(x,3) + \ldots\}\,dx,$$

$$S_x = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

woraus ersichtlich ist, dass die Summirung der gegebenen Reihe $X_1 + X_2 + \ldots$ auf die Summirung einer anderen Reihe, nämlich die Reihe $f(x, 1) + f(x, 2) + \ldots$ übertragen ist. Ist man nun im Stande, die Summe der letzteren zu finden, und heisst dieselbe $F(x)$, so hat man schliesslich:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots \text{ in inf.} = \int_a^x F(x)dx,$$

durch welches Integral, da nun die Reihe durch einen geschlossenen Ausdruck dargestellt würde, der Forderung der Reihensummirung Genüge geleistet wäre. Dieses Verfahren lässt sich mit Leichtigkeit auf die vorstehende Reihe anwenden. Bevor wir jedoch diese Anwendung machen, suchen wir die Grenzen zu bestimmen, innerhalb deren die Reihe S_x convergirt.

2. Bezeichnet man kurz mit $u_1, u_2, \ldots$ die Glieder der Reihe so hat man hier:

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}{a_0 (p+1)^n + a_1 (p+1)^{n-1} + \ldots + a_n} x$$

$$= \frac{a_0 + \frac{a_1}{p} + \ldots + \frac{a_n}{p^n}}{a_0 (1+\frac{1}{p})^n + \frac{a_1}{p}(1+\frac{1}{p})^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{p^n}} x$$

($n =$ einer beliebigen ganzen Zahl),

folglich:

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = x \quad \text{für} \quad p = \infty;$$

somit ist die Reihe S_x sicher convergent für $1 > x > -1$.

Wir untersuchen weiter den Grenzwerth $p\left(\frac{u_p}{u_{p+1}} - 1\right)$. Man hat:

$$p\left(\frac{u_p}{u_{p+1}} - 1\right) = p\left\{ \frac{a_0 (1+\frac{1}{p})^n + \frac{a_1}{p}(1+\frac{1}{p})^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{p^n}}{(a_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \ldots \frac{a_n}{p^n}) x} - 1 \right\},$$

folglich für $p = \infty$:

$$p\left(\frac{u_p}{u_{p+1}} - 1\right) = p\left\{ \frac{(1+\frac{1}{p})^n}{x} - 1 \right\}$$

und für $x = 1$:

$$= p\{(1+\frac{1}{p})^n - 1\}.$$

Da dieser Grenzwerth bekanntlich >1 ist für jedes $n>1$, so ist demnach die Reihe S_x convergent für jedes beliebige n, wenn $1>x>-1$, und in dem Falle, dass $n>1$ ist, convergirt sie für $1\geqq x\geqq -1$.

3. Wir schreiten nun zur Summirung der Reihe und drücken obiger Methode gemäss das allgemeine Glied derselben durch ein Integral aus. Der Nenner des allgemeinen Gliedes $a_0p^n+a_1p^{n-1}+....+a_n$ bezeichnen wir kurz mit $\varphi(p)$ und setzen dann:

$$y=\frac{x^p}{\varphi(p)}.$$

Differentiirt man diese Funktion nach x und multiplicirt dann mit x, so ergiebt sich:

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{px^p}{\varphi(p)}.$$

Eine abermalige Differentiation nach x und Multiplikation mit x giebt:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=\frac{p^2x^p}{\varphi(p)}.$$

Es ist ersichtlich, dass man bei Fortsetzung dieser Behandlung der Funktion y erhält:

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=\frac{p^3x^p}{\varphi(p)},$$

. . . . . .

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+D_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+....+D_{n-1}x\frac{dy}{dx}=\frac{p^nx^p}{\varphi(p)}.$$

Bezeichnet man die nach k Differentiationen und Multiplikationen entstandene Funktion nach Scherk *) kurz mit $\frac{(xd)^ky}{dx^k}$, so hat man:

$$y=\frac{x^p}{\varphi(p)},$$

$$\frac{(xd)y}{dx}=p\frac{x^p}{\varphi(p)},$$

$$\frac{(xd)^2y}{dx^2}=p^2\frac{x^p}{\varphi(p)},$$

. . . . . .

$$\frac{(xd)^ny}{dx^n}=p^n\frac{x^p}{\varphi(p)}.$$

---

*) Scherk, de evolvenda functione $\frac{y\partial.y\partial....y\partial x}{\partial x^n}$ disquisitiones etc. Regiomonti 1824, pag. 2.

$$S_x = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Man multiplicire nun die erste dieser Gleichungen mit a_n, die zweite mit a_{n-1}, die dritte mit a_{n-2} und so fort, also die letzte mit a_0, addire dann die resultirenden Gleichungen, und man hat dann:

$$a_n y + a_{n-1}\frac{(xd)y}{dx} + a_{n-2}\frac{(xd)^2 y}{dx^2} + \ldots + a_0\frac{(xd)^n y}{dx^n}$$

$$= \frac{a_n + a_{n-1}p + a_{n-2}p^2 + \ldots + a_0 p^n}{\varphi(p)} . x^p$$

oder:

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_{n-k}\frac{(xd)^k y}{dx^k} = \frac{\varphi(p)}{\varphi(p)} x^p = x^p.$$

Das Gesetz, nach welchem die Coefficienten der Differentialquotienten des Ausdrucks $\frac{(xd)^m y}{dx^m}$, welcher offenbar folgende Gestalt hat:

$$\frac{(xd)^m y}{dx^m} = B_1 x\frac{dy}{dx} + B_2 x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + B_m x^m\frac{d^m y}{dx^m} = p^m\frac{x^p}{\varphi(p)},$$

gebildet sind, ist gegeben durch die Relation *):

$$B_k = {}'C_k^{m-k},$$

wo das Zeichen ${}'C_k^{m-k}$ die Summe der Combinationen der $(m-k)$ten Klasse mit Wiederholungen aus allen Elementen $1, 2, 3 \ldots k$ bedeutet, wobei aber die einzelnen Combinationen als Produkte der Zahlen anzusehen sind, aus denen sie bestehen. Man hat demgemäss:

$$a_0\frac{(xd)^n y}{dx^n} = a_0\left({}'C_1^{n-1} x\frac{dy}{dx} + {}'C_2^{n-2} x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + {}'C_n^{0} x^n\frac{d^n y}{dx^n}\right) = a_0 p^n\frac{x^p}{\varphi(p)},$$

. . . . . .

$$a_{n-3}\frac{(xd)^3 y}{dx^3} = a_{n-3}\left({}'C_1^{2} x\frac{dy}{dx} + {}'C_2^{1} x^2\frac{d^2y}{dx^2} + {}'C_3^{0} x^3\frac{d^3y}{dx^3}\right) = a_{n-3}p^3\frac{x^p}{\varphi(p)},$$

$$a_{n-2}\frac{(xd)^2 y}{dx^2} = a_{n-2}\left({}'C_1^{1} x\frac{dy}{dx} + {}'C_2^{0} x^2\frac{d^2y}{dx^2}\right) = a_{n-2}p^2\frac{x^p}{\varphi(p)},$$

$$a_{n-1}\frac{xdy}{dx} = a_{n-1}\,{}'C_1^{0} x\frac{dy}{dx} = a_{n-1}p\frac{x^p}{\varphi(p)},$$

$$a_n y = a_n y.$$

---

*) Scherk ebendaselbst pag. 6.

Wir nehmen aus diesen Gleichungen die Coefficienten von $\frac{d^k y}{dx^k}$ heraus und setzen ihre Summe $= A_k$, also:

$$a_{n-k}{}' \overset{0}{\underset{k}{C}} + a_{n-k-1}{}' \overset{1}{\underset{k}{C}} + a_{n-k-2}{}' \overset{2}{\underset{k}{C}} + \ldots + a_0{}' \overset{n-k}{\underset{k}{C}} = A_k.$$

Addirt man nun die vorhergehenden Gleichungen und benutzt dabei diese Bezeichnung, so folgt:

$$A_0 y + A_1 x \frac{dy}{dx} + A_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots + A_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} = x^p. \qquad (1)$$

Es ist somit durch obige Rechnungsoperationen das allgemeine Glied der Reihe $\frac{x^p}{\varphi(p)}$ auf die einfache Form x^p gebracht, und man sieht nunmehr, dass der ersten Forderung der am Eingange des Aufsatzes für die Summirung der Reihe S_x vorgeschlagenen Methode, nämlich, das allgemeine Glied dieser Reihe in der Form eines Integrales darzustellen, dadurch Genüge geschieht, dass man die Differentialgleichung (1) vollständig integrirt, eine Forderung, der man bekanntlich leicht genügen kann.

4. Um die geforderte Integration auszuführen, suchen wir die n partikulären Integrale, welche der Differentialgleichung (1) ohne zweiten Theil genügen, d. h. der Differentialgleichung:

$$A_0 y + A_1 x \frac{dy}{dx} + A_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots + A_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} = 0. \qquad (2)$$

Nennen wir $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ die partikulären Integrale dieser Differentialgleichung, so wird das allgemeine Integral derselben dargestellt durch die Gleichung:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n,$$

wo $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ willkürliche Constanten bezeichnen.

Nimmt man nun $y = x^r$, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = r x^{r-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = r(r-1) x^{r-2}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n} = r(r-1)\ldots(r-n+1) x^{r-n}.$$

Wir setzen diese Werthe von y und seinen Differentialquotienten in (2) ein und erhalten, da die resultirende Gleichung durch x^r theilbar ist:

$$A_0 + A_1 r + A_2 r(r-1) + \ldots + A_n r(r-1)\ldots(r-n+1) = 0. \qquad (3)$$

Man sieht, dass wenn r_k irgend eine der Wurzeln dieser Gleichung ist, der Gleichung (2) durch $y = x^{r_k}$ genügt wird.

$$S_x = \sum_{p=1}^{p=x} \frac{x^p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Da die Gleichung (3) in Beziehung auf r vom $n$ten Grade ist, so giebt sie im Allgemeinen n verschiedene Wurzeln. Wir bezeichnen diese Gleichung der Kürze wegen mit $f(r)$ und ihre Wurzeln mit $r_1, r_2, r_2, \ldots r_n$, und erhalten, indem wir nun n partikuläre Integrale obiger Differentialgleichung kennen, als allgemeines Integral:

$$y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} + C_3 x^{r_3} + \ldots + C_n x^{r_n}. \qquad (4)$$

Damit wir nun von diesem Integrale, welches der obigen Differentialgleichung ohne zweiten Theil genügt, zu dem Integrale gelangen, welches derselben mit dem zweiten Theile x^p genügt, betrachten wir die willkürlichen Constanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ als Funktionen von x und bestimmen dieselben so, dass in den für $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ sich ergebenden Ausdrücken die Summen der mit $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \ldots \frac{dC_n}{dx}$ multiplicirten Glieder gleich Null werden, wobei also nur die Gliedersumme nicht verschwinden darf, welche sich aus der Berechnung des $n$ten Differentialquotienten ergiebt.

Setzt man wieder y_1 für x^{r_1}, y_2 für x^{r_2} u. s. w., so hat man dem Gesagten zufolge:

$$C_1\left(A_0 y_1 + A_1 x \frac{dy_1}{dx} + A_2 x^2 \frac{d^2y_1}{dx^2} + \ldots + A_n x^n \frac{d^n y_1}{dx^n}\right)$$

$$+ C_2\left(A_0 y_2 + A_1 x \frac{dy_2}{dx} + A_2 x^2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \ldots + A_n x^n \frac{d^n y_2}{dx^n}\right)$$

$$+ C_3\left(A_0 y_3 + A_1 x \frac{dy_3}{dx} + A_2 x^2 \frac{d^2y_3}{dx^2} + \ldots + A_n x^n \frac{d^n y_3}{dx^n}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ C_n\left(A_0 y_n + A_1 x \frac{dy_n}{dx} + A_2 x^2 \frac{d^2y_n}{dx^2} + \ldots + A_n x^n \frac{d^n y_n}{dx^n}\right)$$

$$+ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dC_2}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dC_n}{dx} = x^p,$$

welche Gleichung, wie man leicht erkennt, sich vereinfacht zu der folgenden:

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dC_2}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dC_n}{dx} = x^p.$$

Die Gleichungen, welche die Bedingung aussprechen, dass die Summen der mit $\frac{dC_1}{dx}$, $\frac{dC_2}{dx}$ u. s. w. multiplicirten Glieder, welche sich bei der Berechnung der ersten $n-1$ Differentialquotienten von y ergeben, verschwinden sollen, lauten:

$$\left.\begin{aligned} y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n\frac{dC_n}{dx}&=0,\\ \frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\cdot\frac{dC_2}{dx}+\ldots+\frac{dy_n}{dx}\cdot\frac{dC_n}{dx}&=0,\\ \frac{d^2y_1}{dx^2}\cdot\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^2y_2}{dx^2}\cdot\frac{dC_2}{dx}+\ldots+\frac{d^2y_n}{dx^2}\cdot\frac{dC_n}{dx}&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\cdot\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\cdot\frac{dC_2}{dx}+\ldots+\frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\cdot\frac{dC_n}{dx}&=0. \end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Aus diesen $n-1$ Gleichungen und der folgenden:

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_2}{dx}+\ldots+\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_n}{dx}=x^p$$

können nunmehr die n Differentialquotienten $\frac{dC_1}{dx}$, $\frac{dC_2}{dx}$, $\ldots$ $\frac{dC_n}{dx}$ bestimmt werden, und zwar lässt sich die Bestimmung derselben, da die Bestimmungsgleichungen sämmtlich vom ersten Grade sind, allgemein ausführen. Man hat nach den Lehren der Algebra:

$$\frac{dC_k}{dx}=\frac{x^{p-r_k-1}}{(r_k-r_1)(r_k-r_2)\ldots(r_k-r_{k-1})(r_k-r_{k+1})\ldots(r_k-r_n)}.$$

Um den Ausdruck rechter Hand zu vereinfachen, setzen wir:

$$(r-r_1)(r-r_2)\ldots(r-r_n)=0.$$

Diese Gleichung erhält man offenbar aus der unter (3) angegebenen durch Division mit A_n, also:

$$\frac{f(r)}{A_n}=(r-r_1)(r-r_2)\ldots(r-r_n).$$

Es folgt weiter:

$$\frac{f(r)}{A_n(r-r_k)}=(r-r_1)(r-r_2)\ldots(r-r_{k-1})(r-r_{k+1})\ldots(r-r_n).$$

Wird hier $r=r_k$ gesetzt, so nimmt $\frac{f(r)}{A_n(r-r_k)}$ die vieldeutige Form $\frac{0}{0}$

$$S_x = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

an. Um nun den wahren Werth dieses Ausdruckes zu finden, differentiiren wir sowohl Zähler als Nenner nach r und erhalten so nach Einsetzung des Werthes r_k für r:

$$\frac{f'(r_k)}{A_n} = (r_k - r_1)(r_k - r_2) \ldots (r_k - r_{k-1})(r_k - r_{k+1}) \ldots (r_k - r_n).$$

Folglich hat man jetzt:

$$\frac{dC_k}{dx} = \frac{A_n x^{p-r_k-1}}{f'(r_k)},$$

also überhaupt, wenn man von dem Faktor A_n absieht:

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{x^{p-r_1-1}}{f'(r_1)}, \quad \frac{dC_2}{dx} = \frac{x^{p-r_2-1}}{f'(r_2)}, \ldots \frac{dC_n}{dx} = \frac{x^{p-r_n-1}}{f'(r_n)}.$$

Um nun die Werthe von C_1, C_2, ... C_n zu erhalten, multiplicire man mit dx; man erhält dann:

$$C_1 = \int \frac{x^{p-r_1-1}}{f'(r_1)} dx + c_1, \quad C_2 = \int \frac{x^{p-r_2-1}}{f'(r_2)} dx + c_2, \ldots .$$

$$\ldots . C_n = \int \frac{x^{p-r_n-1}}{f'(r_n)} dx + c_n;$$

wo c_1, c_2, ... c_n die bei den Integrationen sich ergebenden Constanten bezeichnen.

Setzt man jetzt diese Werthe von C_1, C_2, ... C_n in Gleichung (4) ein, so erhält man:

$$y = \frac{x^p}{\varphi(p)} = x^{r_1}\left(\int \frac{x^{p-r_1-1}}{f'(r_1)} dx + c_1\right) + x^{r_2}\left(\int \frac{x^{p-r_2-1}}{f'(r_2)} dx + c_2\right) + \ldots$$

$$\ldots . + x^{r_n}\left(\int \frac{x^{p-r_n-1}}{f'(r_n)} dx + c_n\right).$$

Somit haben wir der ersten Forderung unserer Aufgabe, das allgemeine Glied der Reihe S_x durch ein Integral darzustellen, genügt.

Wir haben hier noch das Weglassen des Coefficienten A_n in den Ausdrücken für $\frac{dC_1}{dx}$, $\frac{dC_2}{dx}$, ... $\frac{dC_n}{dx}$ zu rechtfertigen.

Da die Gleichungen unter (5), welche zur Bestimmung von $\frac{dC_1}{dx}$ u. s. w. dienten, aus Gleichung (3) nur die Wurzeln r_1, r_2, ... r_n entlehnen, so ist ersichtlich, dass das Integral

$$A_n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} x^{r_k}\left(\int \frac{x^{p-r_k-1}}{f'(r_k)}\,dx + c_k\right)$$

das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} + \frac{A_{n-1}}{A_n}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{A_n}x\frac{dy}{dx} + \frac{A_0}{A_n}y = x^p$$

ist. Wir hatten aber das Integral der Differentialgleichung

$$A_nx^n\frac{d^ny}{dx^n} + \ldots + A_0y = x^p$$

oder, was dasselbe ist, der Gleichung

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} + \frac{A_{n-1}}{A_n}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{A_0}{A_n}y = \frac{x^p}{A_n}$$

zu suchen. Es ist leicht zu sehen, dass das Integral dieser letzteren Gleichung $A_n$mal kleiner als das Integral jener ist, folglich war oben das Weglassen des Coefficienten A_n gerechtfertigt.

5. a) Es seien nun die aus den Integrationen von $\frac{dC_1}{dx}$ u. s. w. sich ergebenden n Constanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke führen wir die oben nur angedeuteten Integrationen aus, und erhalten:

$$y = \frac{x^p}{\varphi(p)}$$

$$= x^{r_1}\left(\frac{x^{p-r_1}}{(p-r_1)f'(r_1)} + c_1\right) + x^{r_2}\left(\frac{x^{p-r_2}}{(p-r_2)f'(r_2)} + c_2\right) + \ldots$$

$$\ldots + x^{r_n}\left(\frac{x^{p-r_n}}{(p-r_n)f'(r_n)} + c_n\right)$$

$$= \frac{x^p}{(p-r_1)f'(r_1)} + c_1x^{r_1} + \frac{x^p}{(p-r_2)f'(r_2)} + c_2x^{r_2} + \ldots + \frac{x^p}{(p-r_n)f'(r_n)} + c_nx^{r_n}$$

$$= x^p\left\{\frac{1}{(p-r_1)f'(r_1)} + \frac{1}{(p-r_2)f'(r_2)} + \ldots + \frac{1}{(p-r_n)f'(r_n)}\right\}$$

$$+ \{c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2} + \ldots + c_nx^{r_n}\}.$$

Durch Division mit x^p folgt hieraus:

$$\frac{1}{\varphi(p)} = \left\{\frac{1}{(p-r_1)f'(r_1)} + \frac{1}{(p-r_2)f'(r_2)} + \ldots + \frac{1}{(p-r_n)f'(r_n)}\right\}$$

$$+ \{c_1x^{r_1-p} + c_2x^{r_2-p} + \ldots + c_nx^{r_n-p}\}.$$

$$S_x = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Nach den Lehren der Algebra ist aber:

$$\frac{1}{(p-r_1)f'(r_1)} + \frac{1}{(p-r_2)f'(r_2)} + \ldots + \frac{1}{(p-r_n)f'(r_n)} = \frac{1}{f(p)},$$

folglich:

$$\frac{1}{\varphi(p)} = \frac{1}{f(p)} + \sum_{k=1}^{k=n} c_k x^{r_k - p}.$$

Da nun $\frac{1}{\varphi(p)}$ unabhängig von x sein muss, so folgt, dass die mit Potenzen von x multiplicirten Glieder verschwinden müssen, folglich ist:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \ldots . c_n = 0$$

und

$$\frac{1}{\varphi(p)} = \frac{1}{f(p)} \text{ oder } \varphi(p) = f(p).$$

Man sieht demnach zugleich, dass die Funktionen $\varphi(p)$ und $f(p)$ vollkommen identisch sind.

b) Ein zweiter Beweis für die Identität von $\varphi(p)$ und $f(p)$, aus welchem dann ebenfalls folgen würde, dass $c_1 = 0$, $c_2 = 0, \ldots . c_n = 0$ sind, ergiebt sich auf folgendem Wege:

Man erkennt leicht, dass man für $x = 1$ für das Integral

$$\sum_{k=1}^{k=n} x^{r_k} \left(\int \frac{x^{p-r_k-1}}{f'(r_k)} dx + c_k \right)$$

immer denselben Werth erhalten wird, mit welcher Potenz von x man auch immer dieses Integral multipliciren mag. Desshalb darf die Wurzel r_k in der Potenz x^{r_k} ausserhalb des Integrationszeichens, so lange es sich um den Werth des Integrales für $x = 1$ handelt, als ein positiver Zahlenwerth angesehen werden, und die Summe $\sum_{k=1}^{k=n} c_k x^{r_k}$ wird dann für $x = 0$ verschwinden müssen. Da ferner, weil p stets eine positive ganze Zahl bedeutet, auch $\frac{x^p}{\varphi(p)}$ für $x = 0$ verschwinden muss und ebenso auch $\int \frac{x^{p-r_k-1}}{f'(r_k)} dx$ für $x = 0$ verschwindet, vorausgesetzt, dass $p - r_k$ nicht negativ und nicht $= 0$ wird (welcher Voraussetzung in allen Fällen dadurch entsprochen werden kann, dass man die Reihe S_x von einem in genügend weiter Ferne liegenden Gliede an summirt), so hat man jetzt:

$$\frac{1}{\varphi(p)} = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^1 \frac{x^{p-r_k-1}}{f'(r_k)}\, dx + \sum_{k=1}^{k=n} c_k$$

oder:

$$\frac{1}{\varphi(p)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{(p-r_k) f'(r_k)} + \sum_{k=1}^{k=n} c_k.$$

Es ist nun:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{(p-r_k) f'(r_k)} = \frac{1}{A_n (p-r_1)(p-r_2) \ldots (p-r_n)}$$

und

$$\frac{1}{\varphi(p)} = \frac{1}{a_0 (p-p_1)(p-p_2) \ldots (p-p_n)},$$

wo $r_1, r_2, \ldots r_n$ die bekannte Bedeutung haben und $p_1, p_2, \ldots p_n$ die Wurzeln der Gleichung $\varphi(p) = 0$ bezeichnen. Setzt man C für Σc_k, so ist:

$$\frac{1}{a_0 (p-p_1)(p-p_2) \ldots (p-p_n)} = \frac{1}{A_n (p-r_1)(p-r_2) \ldots (p-r_n)} + C,$$

also auch:

$$A_n (p-r_1)(p-r_2) \ldots (p-r_n) = a_0 (p-p_1)(p-p_2) \ldots (p-p_n)$$
$$+ a_0 A_n C (p-r_1) \ldots (p-r_n)(p-p_1) \ldots (p-p_n).$$

Setzt man hier $p = r_k$, wo r_k eine von den Wurzeln der Gleichung $f(p) = 0$ bezeichnet, so ergiebt sich:

$$a_0 (r_k - p_1)(r_k - p_1) \ldots (r_k - p_n) = 0,$$

welche Gleichung offenbar aussagt, dass r_k eine von den n Wurzeln der Gleichung $\varphi(p) = 0$ ist. Wie man leicht sieht, sind ebenso auch die übrigen Wurzeln r der Gleichung $f(p) = 0$ zugleich Wurzeln der Gleichung $\varphi(p) = 0$. Da nun, wie aus der Aufgabe und aus den vorhergehenden Berechnungen folgt, sowohl die Gleichung $\varphi(p)$, als auch die Gleichung $f(p)$ vom $n$ten Grade ist, so haben wir hier zwei ganze rationale algebraische Funktionen des $n$ten Grades, welche für n ungleiche Werthe von p (wir setzen voraus, dass beide Gleichungen nur ungleiche Wurzeln liefern) gleiche Werthe erhalten. Um ihre Identität nachzuweisen, werden wir zu zeigen haben, dass sie auch noch für einen $(n+1)$ten Werth von p gleiche Werthe erhalten *).

Da Null keine von den Wurzeln der Gleichung

*) Dieses Archiv. Theil XXXI. Heft 1. pag. 31.

$$S_x = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

$$\varphi(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

ist, indem wir voraussetzen, dass a_n nicht $=0$ ist, so setze man 0 für p in $\varphi(p)$, und man hat:

$$\varphi(0) = a_n;$$

und ebenso setze man 0 für p in

$$f(p) = A_0 + A_1 p + A_2 p(p-1) + \ldots A_n p(p-1)\ldots(p-n+1),$$

und man hat:

$$f(0) = A_0.$$

Nun ist aber nach Früherem:

$$f(0) = A_0 = a_n {}'\overset{0}{C}_0 + a_{n-1} {}'\overset{1}{C}_0 + \ldots + {}'\overset{n}{C}_0,$$

folglich, da ${}'\overset{0}{C}_0 = 1$ ist und ${}'\overset{k}{C}_0$ für alle Werthe von $k = 1, 2, \ldots n$ verschwindet:

$$f(0) = a_n.$$

Demnach erhalten die beiden ganzen rationalen algebraischen Funktionen $\varphi(p)$ und $f(p)$, die beide vom $n$ten Grade sind, für mehr als n verschiedene Werthe von p gleiche Werthe und sind folglich identisch gleich, woraus zugleich folgt, dass $C = \Sigma c_k = 0$ ist.

Sollte der Fall eintreten, dass in $\varphi(p)$ das Glied $a_n = 0$ wäre, so würde nach dem Vorigen auch $A_0 = 0$ sein. Dividirt man dann beide Funktionen mit p, so erhält man zwei Funktionen vom $(n-1)$ten Grade, deren Identität sich durch dieselbe Betrachtung, die wir im Vorhergehenden machten, ergeben würde, folglich sind dann auch diese mit p multiplicirten Funktionen, d. h. die Funktionen, von denen wir ausgingen, identisch gleich.

c) Der im Vorigen gegebene Beweis für die identische Gleichheit der Funktionen $\varphi(p)$ und $f(p)$ wird offenbar dann nicht mehr ausreichen, wenn diese Funktionen gleiche Wurzeln darbieten.

Da wir oben die Gleichheit der von p freien Glieder a_n und A_0 in $\varphi(p)$ und $f(p)$ leicht nachweisen konnten, so liegt die Frage nahe, ob sich nicht auch die Gleichheit der Coefficienten der mit Potenzen von p multiplicirten Glieder der Funktionen $\varphi(p)$ und $f(p)$ allgemein nachweisen liesse.

Wir liefern diesen Nachweis mit Folgendem:

Der Coefficient in der Funktion $\varphi(p)$, welcher mit der $k$ten Potenz von p multiplicirt ist, ist a_{n-k}. Wir suchen nun den Coefficienten, welcher in $f(p) = A_0 + A_1 p + \ldots + A_n p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)$ mit derselben Potenz von p multiplicirt ist.

Man hat allgemein:

$$p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)$$

$$= \overset{0}{C}'_{n-1} p^n - \overset{1}{C}'_{n-1} p^{n-1} + \overset{2}{C}'_{n-1} p^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-k} \overset{n-k}{C}'_{n-1} p^k \pm \ldots + (-1)^{n-1} \overset{n-1}{C}'_{n-1} p$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n-k} \overset{n-k}{C}_{n-1} p^k.$$

Hier bedeutet $\overset{k}{C}'_{n-1}$ die Summe der Combinationen der $k$ten Klasse ohne Wiederholungen aus allen Zahlen $1, 2, \ldots n-1$, wobei aber die einzelnen Combinationen als Produkte der Zahlen anzusehen sind, aus denen sie bestehen.

Von den Gliedern A_0, $A_1 p$, $A_2 p(p-1), \ldots A_n p(p-1)\ldots(p-n+1)$ ist offenbar $A_k p(p-1)\ldots(p-k+1)$ das erste, in welchem p^k vorkommt. Somit ergiebt sich, wenn wir uns jetzt $f(p)$ nach Potenzen von p geordnet denken, für p^k folgender Coefficient:

$$A_k \overset{0}{C}'_{k-1} - A_{k+1} \overset{1}{C}'_{k} + A_{k+2} \overset{2}{C}'_{k+1} - \ldots + (-1)^{m-k} A_m \overset{m-k}{C}'_{m-1} \pm \ldots + (-1)^{n-k-1} A_{n-1} \overset{n-k-1}{C}'_{n-2}$$

$$+ (-1)^{n-k} A_n \overset{n-k}{C}'_{n-1}.$$

Es ist aber:

$$A_k = a_{n-k} {}'\overset{0}{C}_{k} + a_{n-k-1} {}'\overset{1}{C}_{k} + \ldots + a_0 {}'\overset{n-k}{C}_{k},$$

folglich geht, wenn man die Glieder, die mit gleichen as multiplicirt sind, zusammenfasst, obiger Coefficient über in:

$$a_0 ({}'\overset{n-k}{C}_{k} \overset{0}{C}'_{k-1} - {}'\overset{n-k-1}{C}_{k+1} \overset{1}{C}'_{k} + \ldots + (-1)^{n-k-1} {}'\overset{1}{C}_{n-1} \overset{n-k-1}{C}'_{n-2} + (-1)^{n-k} {}'\overset{0}{C}_{n} \overset{n-k}{C}'_{n-1})$$

$$+ a_1 ({}'\overset{n-k-1}{C}_{k} \overset{0}{C}'_{k-1} - {}'\overset{n-k-2}{C}_{k+1} \overset{1}{C}'_{k} + \ldots + (-1)^{n-k-2} {}'\overset{1}{C}_{n-2} \overset{n-k-2}{C}'_{n-3}$$

$$+ (-1)^{n-k-1} {}'\overset{0}{C}_{n-1} \overset{n-k-1}{C}'_{n-2})$$

. . . . . .

$$+ a_{n-k-1} ({}'\overset{1}{C}_{k} \overset{0}{C}'_{k-1} - {}'\overset{0}{C}_{k+1} \overset{1}{C}'_{k})$$

$$+ a_{n-k} ({}'\overset{0}{C}_{k} \overset{0}{C}'_{k-1}).$$

$$S_x = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Nun hat man aber:

$$\Sigma(-1)^{n-\lambda} {}'\overset{n-\lambda}{C}_{\lambda}\ \overset{\lambda-k}{C'}_{\lambda-1} = 0 \text{ *)} \quad (\text{für } \lambda = n,\ n-1, \ldots k),$$

wenn $k < n$; folglich müssen, da wir für alle Coefficienten von a_0, a_1, ... bis a_{n-k-1} incl. diesen Fall haben, alle obigen Glieder verschwinden bis auf das einzige:

$$a_{n-k} \{ {}'\overset{0}{C}_{k}\ \overset{0}{C'}_{k-1} \},$$

und da ${}'\overset{0}{C}_{k}\ \overset{0}{C'}_{k-1} = 1$ ist, so gelangt man schliesslich zu dem einfachen Coefficienten a_{n-k}; d. h. p^k hat sowohl in $\varphi(p)$, als auch in $f(p)$ denselben Coefficienten. Da aber k irgend einer von den Zahlenwerthen n, $n-1, \ldots 0$ ist, so folgt nun allgemein:

Denkt man sich die Funktionen $\varphi(p)$ und $f(p)$ in gleicher Weise nach Potenzen von p geordnet, so sind die homologen Coefficienten einander gleich, woraus folgt, dass $\varphi(p)$ und $f(p)$ identisch gleiche Funktionen sind, w. z. b. w.

6. Könnte man für x in $y = \frac{x^p}{\varphi(p)}$ einen Ausdruck substituiren, welcher so beschaffen wäre, dass seine Differentialquotienten ohne Anwendung weiterer Rechnungs-Operationen ihre ursprüngliche Gestalt beibehielten, so würde sich die weitere Rechnung bedeutend vereinfachen.

Ein solcher Ausdruck, welcher diese Bedingung genau erfüllt, ist die Exponentialgrösse. Man hat bekanntlich:

$$\frac{de^{px}}{dx} = pe^{px}, \quad \frac{d^2e^{px}}{dx^2} = p^2e^{px}, \ldots \quad \frac{d^n e^{px}}{dx^n} = p^n e^{px}.$$

Setzt man daher in (1) e^x für x, also e^{px} für x^p, so erhält man die einfachere Differentialgleichung:

$$a_n y + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_{n-2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + a_0\frac{d^n y}{dx^n} = e^{px}, \quad \left(y = \frac{e^{px}}{\varphi(p)}\right),$$

deren Integration, wie bekannt, keine Schwierigkeiten darbietet.

7. Wir wenden uns jetzt zu dem zweiten Theile unserer Aufgabe, welcher die Forderung stellt, die Summe derjenigen Grössen auf einen geschlossenen Ausdruck zu bringen, deren

*) Scherk pag. 17.

Integrale, wie im Vorigen gezeigt worden ist, eine der gegebenen Reihe gleiche Reihe bilden.

Man hat den vorhergehenden Rechnungen gemäss bei einerlei und zwar positiven Vorzeichen der Reihenglieder:

$$S_x = \sum_{p=1,\ k=1}^{p=\infty,\ k=n} x^{r_k} \int_0^x \frac{x^{p-r_k-1}}{f'(r_k)}\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^{r_k}}{f'(r_k)} \int_0^x \{x^{-r_k} + x^{-r_k+1} + x^{-r_k+2} + \ldots \text{ in inf.}\}\,dx.$$

Hier lässt sich die eingeklammerte Reihe summiren, wenn $x < 1$ ist. Man hat:

$$x^{-r_k} + x^{-r_k+1} + x^{-r_k+2} + \ldots \text{ in inf.} = x^{-r_k}(1 + x + x^2 + \ldots \text{ in inf.})$$

$$= \frac{x^{-r_k}}{1-x}, \text{ wenn } x < 1 \text{ ist,}$$

folglich:

$$S_x = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^{r_k}}{f'(r_k)} \int_0^x \frac{x^{-r_k}}{1-x}\,dx \quad (x < 1).$$

8. Sind die Vorzeichen der Glieder der Reihe einfach abwechselnd, so hat man, wenn das erste Glied positiv ist:

$$1 - x + x^2 - \ldots \text{ statt } 1 + x + x^2 + \ldots$$

Es ist

$$1 - x + x^2 - \ldots = \frac{1}{1-x^2} - \frac{x}{1-x^2} = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}.$$

Wechseln die Vorzeichen so ab, dass die ersten beiden Glieder positiv, die nächsten beiden negativ sind u. s. w., so hat man:

$$1 + x - x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1+x}{1-x^4} - \frac{x^2+x^3}{1-x^4} = \frac{1+x}{1+x^2}.$$

Wechseln die Vorzeichen dreigliederweise ab, so ist:

$$1 + x + x^2 - x^3 - x^4 - x^5 + \ldots = \frac{1+x+x^2}{1-x^6} - \frac{x^3+x^4+x^5}{1-x^6} = \frac{1+x+x^2}{1+x^3}.$$

Man sieht, dass, wenn die Glieder νgliederweise abwechseln, man haben wird:

$$\sum_{k=0}^{k=\nu-1} x^k - \sum_{k=\nu}^{k=2\nu-1} x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{k=\nu-1} \frac{x^k}{1-x^{2\nu}} - \sum_{k=\nu}^{k=2\nu-1} \frac{x^k}{1-x^{2\nu}}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\nu-1} \frac{x^k}{1+x^\nu}.$$

$$S_x = \sum_{p=1}^{p=x} \frac{x^p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Demnach ist das summirende Integral für die Reihe S_x, wenn die Vorzeichen der Glieder νgliederweise abwechseln:

$$S_x = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^{r_k}}{f'(r_k)} \int_0^x \frac{\sum_{h=0}^{h=\nu-1} x^h}{x^{r_k}(1+x^\nu)} dx.$$

9. Wir haben am Eingange gesehen, dass die Reihe S_x im Allgemeinen auch für $x=1$ noch convergirt. Dagegen ist die Anwendung des geschlossenen Ausdrucks $\frac{1}{1-x}$ für die unendliche Reihe $1+x+x^2+\ldots$ und ebenso die Anwendung von $\frac{1}{1+x^\nu}$ für die zugehörige unendliche Reihe, für den Werth $x=1$ nicht mehr statthaft.

Hat man aber ein bestimmtes Integral von der Form

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

in welchem $f(x)$ so lange den Summenwerth einer unendlichen Reihe ausdrücken möge, als $x<b$ ist, so ist bekanntlich die Anwendung von $f(x)$ auch für die obere Integrationsgrenze b nicht in allen Fällen ausgeschlossen.

Um in unserem Falle alle Zweifel zu heben, unterwerfen wir die die Reihe S_x summirende Integralsumme einer genaueren Betrachtung, und zwar beschäftigen wir uns zunächst mit dem Falle, in welchem die Glieder der Reihe einerlei Vorzeichen haben. Die summirenden Integrale haben dann die Gestalt:

$$\frac{x^{r_k}}{f'(r_k)} \int_0^x \frac{x^{-r_k}}{1-x}\,dx.$$

Dieses Integral wird offenbar für $x=1$ unendlich, da $\frac{x^{-r_k}}{1-x}$ für $x=1$ unendlich wird, was zu dem Werthe der für $x=1$ convergenten Reihe nicht stimmt. Man erkennt aber leicht bei näherer Betrachtung, dass der hiermit ausgesprochene Widerspruch nur ein scheinbarer ist. Denn subtrahirt man unter jedem der Integrationszeichen die Grösse $\frac{1}{1-x}$, so erhält man, wenn man das Abgezogene wieder ersetzt:

$$S_x = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^{r_k}}{f'(r_k)} \int_0^x \frac{x^{-r_k}-1}{1-x}\,dx + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x_r{}^k}{f'(r_k)} \int_0^x \frac{dx}{1-x}.$$

Nun hat man aber nach (5):

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0,$$

oder, wenn man für die y und $\frac{dC}{dx}$ ihre Werthe setz

$$x^{p-1}\left(\frac{1}{f'(r_1)} + \frac{1}{f'(r_2)} + \ldots + \frac{1}{f'(r_n)}\right) = 0,$$

folglich auch:

$$\frac{1}{f'(r_1)} + \frac{1}{f'(r_2)} + \ldots + \frac{1}{f'(r_n)} = 0,$$

woraus folgt, dass die zweite Integralsumme $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^{r_k}}{f'(r_k)} \int_0^x \frac{dx}{1-x}$ verschwindet, und man hat demnach das einfachere Resultat:

$$S_x = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^{r_k}}{f'(r_k)} \int_0^x \frac{x^{-r_k}-1}{1-x}\, dx.$$

Da wir den Exponenten $-r_k$ in x^{-r_k} immer als einen positiven Zahlenwerth ansehen können, weil r_k einen endlichen Zahlenwerth bezeichnet und die Reihe S_x von einem beliebigen Gliede an summirt werden kann, so dass, wenn auch $-r_k$ negativ, $-r_k+m$, indem wir vom $m+1$ten Gliede an summiren, stets einen positiven Werth haben wird, — so ist das zuletzt gefundene Integral offenbar für die Integrationsgrenzen $x=0$ und $x=1$ endlich, indem dann die Funktion $\frac{x^{-r_k}-1}{1-x}$ während des Intervalles $x=0$ bis $x=1$ eine stetige und endliche Funktion ist.

Da also die Reihe links im Allgemeinen (wenn nämlich $n>1$) für $x=1$ noch convergirt und die Funktion rechts für $x=1$ weder unendlich, noch diskontinuirlich wird, so gilt das gefundene Resultat auch für $x=1$, und es ist folglich:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{f'(r_k)} \int_0^1 \frac{x^{-r_k}-1}{1-x}\, dx.$$

Ganz ähnliche Betrachtungen führen uns zu der Ueberzeugung, dass die Funktion $\frac{x^h}{1+x^v}$ für die ihr innerhalb der Grenzen $+1$ und -1 gleichbleibende unendliche Reihe in unserem Falle auch noch für $x=1$ gesetzt werden darf. Denn setzt man für $\frac{x^m}{1+x^m}$

$$S_x = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

den identischen Ausdruck $\frac{x^m - x^{2m}}{1-x^{2m}}$ oder $\frac{x^m(1-x^m)}{1-x^{2m}}$, so bleibt das Integral $\int_0^x \frac{x^{-r_k+m}(1-x^m)}{1-x^{2m}}\,dx$ ebenfalls für die Integrationsgrenzen $x=0$ und $x=1$ endlich und stetig.

Man hat somit auch für den Fall, dass die Glieder die Zeichen wechseln, und zwar für den Fall, wo der jedesmalige Zeichenwechsel nach ν Gliedern eintritt:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{f'(r_k)} \int_0^1 x^{-r_k} \sum_{h=0}^{h=\nu-1} \frac{x^h}{1+x^\nu}\,dx.$$

10. Es wurde bisher immer vorausgesetzt, dass die Wurzeln, welche die Gleichung $f(r)=0$ darbietet, reell und ungleich wären.

Gesetzt, diese Gleichung liefert auch jetzt nur ungleiche Wurzeln, darunter aber eine imaginäre $r_1 = \alpha + \beta i$, so liefert sie, da die imaginären Wurzeln stets paarweise vorhanden sind, auch noch die imaginäre Wurzel $r_2 = \alpha - \beta i$. Man findet dann leicht:

$$S_1 = \frac{2A}{A^2+B^2} \int_0^1 \frac{x^{-\alpha}\cos(\beta l x) - 1}{1-x}\,dx - \frac{2B}{A^2+B^2} \int_0^1 \frac{x^{-\alpha}.\sin(\beta l x)}{1-x}\,dx + R;$$

oder, wenn wir e^z für x setzen, wodurch die Integrationsgrenzen 0 und 1 übergehen in die Grenzen $-\infty$ und 0, und dann das Theorem

$$\int_{-a}^{-b} f(x)dx = \int_b^a f(-x)\,dx$$

anwenden:

$$S_1 = \frac{2A}{A^2+B^2} \int_0^\infty \frac{e^{-(\alpha+1)z}\cos(\beta z) - e^{-z}}{1-e^{-z}}\,dz + \frac{2B}{A^2+B^2} \int_0^\infty \frac{e^{-(\alpha+1)z}\sin(\beta z)}{1-e^{-z}}\,dz + R,$$

wo die Bedeutung von A und B sich aus den Gleichungen

$$\frac{1}{f'(r_1)} = \frac{1}{A+Bi} \quad \text{und} \quad \frac{1}{f'(r_2)} = \frac{1}{A-Bi}$$

ergiebt, und R die Summe der übrigen Integrale bezeichnet.

Für die Reihe mit wechselnden Vorzeichen findet man:

$$S_1 = \sum_{h=0}^{h=\nu-1} \frac{2A}{A^2+B^2} \int_0^1 \frac{x^{h-\alpha}.\cos(\beta l x)}{1+x^\nu} dx$$
$$- \sum_{h=0}^{h=\nu-1} \frac{2B}{A^2+B^2} \int_0^1 \frac{x^{h-\alpha}.\sin(\beta l x)}{1+x^\nu} dx + R$$

oder

$$S_1 = \sum_{h=0}^{h=\nu-1} \frac{2A}{A^2+B^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z}\cos(\beta z)}{1+e^{-\nu z}} dz$$
$$+ \sum_{h=0}^{h=\nu-1} \frac{2B}{A^2+B^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z}\sin(\beta z)}{1+e^{-\nu z}} dz + R,$$

wo a für $h-\alpha+1$ gesetzt ist.

11. Wir betrachten weiter den Fall, wo die Gleichung $f(r)=0$ gleiche und reelle Wurzeln darbietet.

Zur Wiederherstellung des allgemeinen Integrales der Differentialgleichung dient uns das bekannte Verfahren, zu Folge dessen man, bei zwei gleichen Wurzeln $r_1=r_2$, $r_2=r_1+d$, wo d einen bis zum Verschwinden abnehmenden Zahlenwerth bedeutet, und

$$\frac{1}{(r-r_3)(r-r_4)\ldots.(r-r_n)} \int_0^1 \frac{x^{-r}-1}{1-x} dx = \varphi_1(r)$$

setzt. Man findet dann, indem man zur Grenze für unendlich abnehmende d übergeht und

$$\frac{1}{(r-r_{m+1})\ldots.(r-r_n)} = \psi_{m-1}(r)$$

setzt:

$$S_1 = \psi_1'(r_1) \int_0^1 \frac{x^{-r_1}-1}{1-x} dx - \psi_1(r_1) \int_0^1 \frac{x^{-r_1} lx}{1-x} dx + R.$$

Man hat allgemein bei Anwendung des bekannten Theorems:

$$\frac{F(a+d)-F(a)}{d^n} = \frac{1}{1.2\ldots.n} F^{(n)}(a+\lambda_n d), \quad (1 \geqq \lambda_n \geqq 0),$$

welches unter der Voraussetzung gilt, dass die Funktionen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, $\ldots.F^{(n)}x$ innerhalb des Intervalles $x+a$ bis $x=a+d$ stetig und endlich sind und mit Ausnahme der ersten und letzten für $x=a$ verschwinden, in dem Falle, wo m gleiche Wurzeln vorhanden sind:

$$S_x = \sum_{p=1}^{p=x} \frac{x^p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

$$S_1 = \frac{1}{1.2\ldots.(m-1)} \{ \psi_{m-1}^{(m-1)}(r_1) \int_0^1 \frac{x^{-r_1}-1}{1-x} dx$$

$$-(m-1)_1 \psi_{m-1}^{(m-2)}(r_1) \int_0^1 \frac{x^{-r_1} lx}{1-x} dx + (m-1)_2 \psi_{m-1}^{(m-3)}(r_1) \int_0^1 \frac{x^{-r_1}(lx)^2}{1-x} dx$$

$$- \ldots + (-1)^{m-1} \psi_{m-1}(r_1) \int_0^1 \frac{x^{-r_1}(lx)^{m-1}}{1-x} dx \} + R,$$

wo $(m-1)_1$, $(m-1)_2 \ldots$ die bekannte Bedeutung der Binomial-Coefficienten haben. Für die Reihe S_1 bei nach ν Gliedern eintretendem Zeichenwechsel ist:

$$S_1 =$$

$$\frac{(-1)^k}{1.2\ldots.(m-1)} \sum_{k=0}^{k=m-1} (m-1)_k \psi_{m-1}^{(m-k-1)}(r_1) \int_0^1 x^{-r_1} (lx)^k \sum_{h=0}^{h=p-1} \frac{x^h}{1+x^p} dx$$

$$+ R.$$

Dass man oben sowohl, wie auch hier dazu berechtigt war, unter den Integrationsgrenzen nach r zu differentiiren, ersieht man sofort daraus, dass die Differentialquotienten nach r der unter den Integrationszeichen stehenden Funktionen ($-r_1$ sehen wir als positiv an) von $x = 0$ bis $x = 1$ stetig und endlich bleiben.

12. Es bleibt noch der Fall übrig, dass unter den gleichen Wurzeln auch imaginäre auftreten. Um auch für diesen Fall die Gestalt der die Reihe summirenden Integrale kennen zu lernen, nehme man an, die Gleichung $f(r) = 0$ lieferte drei gleiche imaginäre Wurzeln, nämlich:

$$r_1 = \alpha + \beta i, \quad r_2 = \alpha + \beta i, \quad r_3 = \alpha + \beta i;$$

also auch:

$$r_4 = \alpha - \beta i, \quad r_5 = \alpha - \beta i, \quad r_6 = \alpha - \beta i.$$

Man wird ferner haben:

$$\psi_2(r_1) = \frac{1}{A+Bi}, \quad \psi_2(r_4) = \frac{1}{A-Bi};$$

$$\psi_2'(r_1) = \frac{1}{A'+B'i}, \quad \psi_2'(r_4) = \frac{1}{A'-B'i};$$

$$\psi_2''(r_1) = \frac{1}{A''+B''i}, \quad \psi_2''(r_4) = \frac{1}{A''-B''i}.$$

Bei Benutzung dieser Abkürzungen ist:

$$S_1=\frac{A}{A^2+B^2}\int_0^1\frac{x^{-\alpha}(lx)^2\cos(\beta lx)}{1-x}dx-\frac{B}{A^2+B^2}\int_0^1\frac{x^{-\alpha}(lx)^2\sin(\beta lx)}{1-x}dx$$

$$-\frac{2A'}{A'^2+B'^2}\int_0^1\frac{x^{-\alpha}lx\cos(\beta lx)}{1-x}dx+\frac{2B'}{A'^2+B'^2}\int_0^1\frac{x^{-\alpha}lx\sin(\beta lx)}{1-x}dx$$

$$+\frac{A''}{A''^2+B''^2}\int_0^1\frac{x^{-\alpha}\cos(\beta lx)-1}{1-x}dx-\frac{B''}{A''^2+B''^2}\int_0^1\frac{x^{-\alpha}\sin(\beta lx)}{1-x}dx+R.$$

Wie sich die Integrale für die Reihe S_1 gestalten, wenn ihre Glieder die Vorzeichen wechseln, ergiebt sich nunmehr leicht von selbst.

XXII.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

Ich bin oft wegen der Etymologie des Worts „Theodolit“ oder „Theodolith“ befragt worden, und gestehe gern, wegen einer genügenden Antwort zuweilen in Verlegenheit gewesen zu sein. Vielleicht ist mancher Leser dieser Zeitschrift in gleichem Falle gewesen, und wird mir es danken, wenn ich die folgende Notiz aus dem „Lehrbuche der praktischen Geometrie zum Gebrauche an höheren technischen Lehranstalten. Von G. Chr. C. Hunäus. Hannover. 1848. S. 138.“, einem überhaupt recht sehr zu empfehlenden Buche, hier mittheile:

„Hinsichtlich der Unterlage endlich, die man dem Theodolithen giebt, ist zu bemerken, dass man dazu früher ausschliesslich pyramidalisch geformte Postamente aus Stein anwandte, was auch jetzt noch bei Vermessungen, bei welchen nur grössere Theodolithen angewandt werden, geschieht, und wonach auch ohne Zweifel der Name Theodolith (von θέα, das Anschauen; ὁδός, der Weg; und λιθος, der Stein) gebildet sein möchte.“ G.

XXIII.

Untersuchungen über die Pothenot'sche Aufgabe, falls solche auf den Raum ausgedehnt wird.

Von

Herrn *C. W. Plath*,

Bezirks-Ingenieur in Hamburg.

Einleitung.

Die Pothenot'sche Aufgabe bezieht sich bekanntlich auf den Fall, wenn in der Ebene drei feste Punkte *A*, *B* und *C* (Taf. VII. Fig. I.) gegeben sind und die Bestimmung eines vierten Punktes *D* gefordert wird in der Art, dass der Beobachter diesen Punkt *D* nicht verlassen darf, in welchem Falle also nur die Winkel α und β zur Lösung der Aufgabe gemessen werden können.

Es liegt nun die Frage nahe, wie sich die Lösung gestalten wird, wenn diese Aufgabe auf den Raum ausgedehnt wird, wenn also drei Punkte im Raume mittelst ihrer Coordinaten gegeben sind und die Bestimmung eines vierten Punktes durch blosse Winkelmessung von demselben nach den drei gegebenen Punkten verlangt wird.

Diese Aufgabe lässt sich, unter den später folgenden Voraussetzungen, sowohl graphisch mittelst der darstellenden Geometrie behandeln, als auch auf analytischem Wege.

Was die Auflösung durch Zeichnung anbelangt, so findet sich eine solche in dem Werke von G. Schreiber, (Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Carlsruhe 1828), woselbst die Aufgabe in folgender Fassung vorkommt, aus welcher zugleich ihre Bedeutung für die Praxis sich erkennen lässt.

Ein Ingenieur durchwandert eine Gebirgsgegend und ist mit einer Charte versehen, auf welcher die besonders merkwürdigen Punkte der Gegend genau verzeichnet sind, und zugleich deren Höhe über der Meeresfläche durch beigeschriebene Zahlen (Coten) angegeben ist.

Er kommt auf einen merkwürdigen Punkt, der in der Charte nicht verzeichnet ist, und man verlangt, dass er, ohne die Stelle zu verlassen, durch blosse Winkelmessung nach drei, der Lage nach genau bekannten Punkten den vierten Punkt in der Charte bezeichne, und zugleich seine Höhe über der Meeresfläche angebe.

Schreiber löset die Aufgabe auf zweierlei Art, indem er zuerst annimmt, dass der Ingenieur mit einem Messinstrument versehen ist, welches einen Vertikalkreis und Loth besitzt, und dann zweitens annimmt, dass das Instrument nach Art der Sextanten eingerichtet ist und die schiefen Winkel, welche die Gesichtsstrahlen aus dem zu bestimmenden Punkte nach den gegebenen Punkten mit einander einschliessen, gemessen werden.

Im ersteren Falle ist der Durchschnitt dreier senkrechter, kreisförmiger Kegelflächen, im zweiten Falle der Durchschnitt dreier Umdrehungsflächen mit Hülfe der darstellenden Geometrie zu bestimmen.

In Nachstehendem will ich versuchen die Lösung durch Rechnung auszuführen, und nehme deshalb folgende Voraussetzungen an:

I. Der Beobachter, welcher sich auf dem zu suchenden Punkte befindet, ist mit einem Messinstrumente versehen, welches einen getheilten Horizontalkreis besitzt, und ein Fernrohr, welches sich in einer Vertikalebene darüber bewegen lässt, wo also die Horizontalwinkel der Gesichtslinie von dem zu suchenden Punkte nach den gegebenen Punkten gemessen werden.

II. Der Beobachter ist mit einem einfachen Messinstrument, aus einem Vertikalkreise mit Fernrohr bestehend, versehen, mit welchem er die Winkel messen kann, welche die einzelnen Gesichtsstrahlen mit der Vertikale bilden.

III. Der Beobachter ist mit einem Winkelinstrument, nach Art der Sextanten eingerichtet, versehen, mit welchem er zwar auch mit Hülfe eines künstlichen Horizontes Höhenwinkel messen kann, jedoch durch das Instrument hauptsächlich auf Messung der schiefen Winkel, welche die Gesichtsstrahlen unter sich bilden, angewiesen ist.

Auflösung ad I.

Instrument mit Horizontalkreis.

Da durch die Messungen mit einem solchen Instrumente sich nur die Horizontalwinkel der drei Gesichtslinien ergeben, die Höhen der Punkte aber gar nicht in die Messung mit hineingezogen werden können, so lässt sich die Aufgabe unter dieser ersten Voraussetzung nicht vollständig lösen. Man kann wohl zwei Coordinaten des zu suchenden Punktes bestimmen, nicht aber die dritte, nemlich die Höhe des Punktes über der gemeinsamen Horizontalfläche.

Die Aufgabe reducirt sich in diesem Falle auf das bekannte Pothenot'sche Problem in der Ebene, und man hat unter den in der Figur (Taf. VII. Fig. 2.) angegebenen Bezeichnungen:

für die drei gegebenen Punkte A, B, C;

ihre Coordinaten $x_I = 0$, $x_{II} = l$, $x_{III} = m$;
$y_I = a$, $y_{II} = b$, $y_{III} = c$;

und für den gesuchten Punkt D die zu bestimmenden Coordinaten x und y.

Da das Dreieck ABC vollkommen durch die Coordinaten seiner Eckpunkte bestimmt ist, sich also alle Seiten und Winkel leicht aus diesen Daten bestimmen lassen, so kann ich sofort die Längen

$$AB = d, \quad BC = e,$$

so wie Winkel B an der Spitze, als bekannt in die Rechnung einführen.

Aus der Winkelmessung ergiebt sich ferner Winkel α und β und demnach:

$$A + C = 360^0 - \{B + \alpha + \beta\} = w,$$

woraus sich mit Hülfe der Gleichungen

$$BD . \sin\alpha = d \sin A \quad \text{und} \quad BD . \sin\beta = e \sin C,$$

oder

$$\frac{d \sin A}{\sin\alpha} = \frac{e \sin C}{\sin\beta},$$

die Gleichung:

$$\frac{d\sin\beta}{e\sin\alpha} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

ableiten lässt, und hieraus wiederum:

$$d\sin\beta : e\sin\alpha = \sin C : \sin A,$$

oder

$$\{d\sin\beta + e\sin\alpha\} : \{d\sin\beta - e\sin\alpha\} = \{\sin C + \sin A\} : \{\sin C - \sin A\}$$
$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\{C+A\} : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\{C-A\},$$

also:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\{C-A\} = \frac{1-\frac{e\sin\alpha}{d\sin\beta}}{1+\frac{e\sin\alpha}{d\sin\beta}} \cdot \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\{C+A\}.$$

Hieraus ergiebt sich nun Winkel $C-A$, und da $C+A$ nach Obigem bekannt ist, so sind also die Winkel A und C ebenfalls bekannt.

Aus den nun gefundenen Daten lassen sich die direkten Entfernungen des gesuchten Punktes von den gegebenen Punkten AD, BD und CD leicht ableiten; es ist nämlich:

$$AD = \frac{d\sin\{A+\alpha\}}{\sin\alpha},$$

$$BD = \frac{d\sin A}{\sin\alpha} = \frac{e\sin C}{\sin\beta},$$

$$CD = \frac{e\sin\{C+\beta\}}{\sin\beta}.$$

Für die Bestimmung der Coordinaten x, y des Punktes D hat man zunächst: $\cos\gamma = \frac{l}{d}$, und hieraus: $\delta = 90^0 - \{A-\gamma\}$; folglich:

$$x = AD.\sin\delta \quad \text{und} \quad y = a - AD.\cos\delta.$$

Die Aufgabe ist also, soweit sie sich überhaupt aus den mit oben angenommenem Instrument zu messenden Winkeln bestimmen lässt, aufgelöset; es sind die beiden Coordinaten x, y bestimmt worden durch blosse Winkelmessungen von dem gesuchten Punkt D aus, es hat sich aber nicht die dritte Coordinate bestimmen lassen, weil die Höhen der gegebenen Punkte nicht bei den Winkelmessungen mit hineingezogen werden konnten, sondern nur die Horizontalwinkel sich direkt aus der Messung ergaben.

Auflösung ad II.

Instrument mit Vertikalkreis.

Der Beobachter misst von dem zu bestimmenden Punkt *D* (Taf. VII. Fig. 3.) aus die Winkel, welche die Gesichtslinien nach den drei gegebenen Punkten *A*, *B* und *C* mit der Vertikalen einschliessen.

Dieselben Winkel werden von den Gesichtslinien mit den Vertikalen gebildet werden, welche man sich durch die Punkte *A*, *B* und *C* gezogen denkt.

Man hat also drei Paar Linien, von denen je eine vertikal ist, und von der andern unter einem bestimmten Winkel geschnitten wird; und indem man sich die schneidende Linie in derselben Neigung um die Vertikale in allen drei Fällen herumgeführt denkt, so entstehen drei senkrechte kreisförmige Kegelflächen, die sich in mehreren Punkten schneiden werden, welche alle der Aufgabe Genüge thun, von denen jedoch nur Einer für eine bestimmte Aufgabe Gültigkeit hat.

Es werden sich nämlich die drei Kegelflächen im Allgemeinen in vier Punkten des Raumes schneiden, es wird jedoch für den Beobachter leicht sein, aus der Lage der gegebenen Punkte gegen seinen Standpunkt zu bestimmen, welcher von den vier Punkten für den vorliegenden Fall gemeint sei.

Stellt man also die Gleichungen der drei Kegelflächen auf, und verbindet je zwei und zwei derselben, so wird man die Gleichungen ihrer gemeinsamen Durchschnittscurve finden. — Die drei gefundenen Durchschnittslinien müssen sich in dem zu bestimmenden Punkt schneiden, und man erhält also die Coordinaten dieses Punktes, wenn man die Gleichungen der Durchschnittslinien der Kegel wiederum zu zwei und zwei verbindet und eliminirt.

Gleichungen der drei Kegelflächen.

Die Coordinaten des Punktes *A* seien:

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = m;$$

so kann man sich die Kegelfläche erzeugt denken durch die Bewegung der oben angeführten Gesichtslinie, welche beständig durch den Punkt *A* geht, und sich dabei auf die kreisförmige

Leitlinie vom Halbmesser r stützt, wobei $r = m \operatorname{tang} \alpha$ und α der gemessene Winkel ist.

Die Gleichungen der Linie, welche durch den Mittelpunkt A (Taf. VII. Fig. 4.) der Kegelfläche geht, werden also sein:

$$x = a(z - z'),$$
$$y = b(z - z');$$

und die Gleichungen der kreisförmigen Leitlinie:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$
$$z = 0.$$

Durch Verbindung dieser Systeme von Gleichung erhält man die Gleichung der ersten Kegelfläche:

$$(x^2 + y^2)z'^2 = r^2(z - z')^2.$$

Da $z' = m$ ist, so erhält man, wenn man $\frac{r}{m} = p$ setzt: die Gleichung der ersten Kegelfläche:

$$x^2 + y^2 = p^2(z - m)^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Coordinaten des Punktes B (Taf. VII. Fig. 5.) seien:

$$x'' = \alpha, \quad y'' = 0, \quad z'' = n;$$

so erhält man durch eine ähnliche Herleitung, wenn man $\frac{R}{n} = q$ setzt, die Gleichung der zweiten Kegelfläche:

$$(x_, - \alpha)^2 + y_,^2 = q^2(z_, - n)^2; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und endlich (Taf. VII. Fig. 6.), unter Substituirung von s für $\frac{\varrho}{t}$, die Gleichung der dritten Kegelfläche:

$$(x_{,,} - \gamma)^2 + (y_{,,} - \beta)^2 = s^2(z_{,,} - t)^2. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Aus der Verbindung der Gleichungen (1) und (2) erhält man nach Elimination von y die Projectionsgleichung der Durchschnittslinie dieser beiden Kegelflächen auf der Ebene XZ, nämlich:

$$x = \left\{\frac{p^2 - q^2}{2\alpha}\right\} z^2 - \left\{\frac{mp^2 - nq^2}{\alpha}\right\} z + \frac{m^2p^2 - n^2q^2 + \alpha^2}{2\alpha}, \quad (4)$$

oder wenn man die bestimmten Coeffizienten mit A, B und C bezeichnet:

$$x = Az^2 - Bz + C. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Aus der Verbindung der Gleichungen (1) und (3) erhält man nach Elimination von y die Gleichung der Projection der Durchschnittslinie dieser beiden Kegelflächen auf der Ebene der XZ, nämlich:

$$\left\{\frac{p^2-s^2}{2\beta}\right\}z^2+\left\{\frac{s^2t-p^2m}{\beta}\right\}z+\frac{\gamma^2+r^2+\beta^2-\varrho^2}{2\beta}-\frac{\gamma}{\beta}x$$

$$=\sqrt{p^2(z-m)^2-x^2}.$$

Substituirt man hierin für x den oben in Gleichung (4) gefundenen Werth, so erhält man, nachdem man geordnet hat:

(6)

$$\left\{\frac{p^2-s^2-\frac{\gamma}{\alpha}(p^2-q^2)}{2\beta}\right\}z^2+\left\{\frac{s^2t-p^2m+\frac{\gamma}{\alpha}(mp^2-nq^2)}{\beta}\right\}z$$

$$+\frac{\gamma^2+r^2+\beta^2-\varrho^2-(m^2p^2-n^2q^2+\alpha^2)\frac{\gamma}{\alpha}}{2\beta}=\sqrt{p^2(z-m)^2-x^2},$$

oder, indem man die Coeffizienten mit D, E und F bezeichnet:

(7)

$$Dz^2+Ez+F=\sqrt{p^2(z-m)^2-x^2}.$$

Um aus dieser Gleichung z bestimmen zu können, muss x^2 noch in z ausgedrückt werden, und man darf also nur auf beiden Seiten quadriren und für x^2 seinen Werth aus Gleichung (5) setzen, so erhält man:

$$D^2z^4+E^2z^2+F^2+2DEz^3+2DFz^2+2EFz$$

$$=p^2(z-m)^2-\{A^2z^4+B^2z^2+C^2-2ABz^3+2ACz^2-2BCz\}.$$

Ordnet man nun nach z, so erhält man eine Gleichung vierten Grades, aus welcher sich diese Grösse bestimmen lässt, und es ist somit eine der Coordinaten des gesuchten Punktes berechnet; man erhält nämlich:

(8)

$$\{D^2+A^2\}z^4+\{2DE-2AB\}z^3+\{2DF+B^2-p^2+E^2+2AC\}z^2$$

$$+\{2EF+2mp^2-2BC\}z+\{F^2+C^2-m^2p^2\}=0,$$

in welcher Gleichung die Buchstaben A, B, C, D, E, F die oben berechneten Werthe der Coeffizienten von z^2 und z in den Gleichungen (4) und (6) haben.

Da die Gleichung für z vom vierten Grade ist, so werden der Aufgabe also auch im Allgemeinen vier Punkte Genüge thun, wobei es aber im Allgemeinen für den Beobachter leicht sein wird, aus der Vergleichung seiner Lage gegen die gegebenen Punkte zu bestimmen, welcher von den vier gefundenen Punkten für den speciellen Fall gemeint ist.

Die zweite der Coordinaten, x, ergiebt sich sofort aus Gleichung (5):

$$x = Az^2 - Bz + C;$$

so dass für jeden der vier Werthe von z sich auch ein Werth von x vorfindet.

Die dritte der Coordinaten, y, lässt sich am besten aus der Verbindung der Gleichungen (1) und (3) herleiten, woraus man erhält:

$$y = \frac{p^2\{z-m\}^2 - s^2\{z-t\}^2 - 2\gamma x + \gamma^2 + \beta^2}{2\beta}, \quad \ldots \quad (9)$$

in welche Gleichung die zusammengehörigen Werthe von x und z zu substituiren sind.

Im Vorstehenden sind die Werthe der zu bestimmenden Coordinaten des Standpunktes des Beobachters aus der Verbindung der Durchschnittslinien der Kegel I. und II., und I. und III. berechnet, und es ergeben diese Gleichungen die vollständigen Daten, um die Coordinaten zu bestimmen. Zu dem gleichen Resultat würde man gelangt sein, wenn man die Durchschnitte der Kegel I. und II. und II. und III. oder I. und III. und II. und III. mit einander verbunden hätte, so wie sich denn auch unter Berücksichtigung der Durchschnitte aller dreier Kegelflächen eine Controlle für die Richtigkeit der Rechnung ergiebt.

Beispiel.

Die drei gegebenen Punkte seien wiederum bezeichnet mit A, B und C.

Dieselben sind gegeben durch ihre Coordinaten:

$$\text{für } A \quad \begin{cases} x' = 0, \\ y' = 0, \\ z' = m = 24; \end{cases}$$

$$\text{für } B \quad \begin{cases} x'' = \alpha = 20, \\ y'' = 0, \\ z'' = n = 20; \end{cases}$$

$$\text{für } C \quad \begin{cases} x''' = \gamma = 10, \\ y''' = \beta = 10, \\ z''' = t = 13.103.... \end{cases}$$

und es seien ferner von dem Standpunkte des Beobachters aus die Winkel gemessen worden, welche die drei Gesichtslinien nach den Punkten *A*, *B* und *C* mit der Vertikalen bilden, nämlich:

$$\text{für Punkt } A: \quad \delta = 26^0\,33'\,54''.2,$$

$$\text{„ „ } B: \quad \varepsilon = 63^0\,26'\,5''.8,$$

$$\text{„ „ } C: \quad \eta = 71^0\,33'\,54''.2;$$

so ergeben sich daraus zunächst die, für die Berechnung der Coordinaten, erforderlichen Werthe von:

$$r = m \operatorname{tang} \delta, \quad R = n \operatorname{tang} \varepsilon, \quad \varrho = t \operatorname{tang} \eta;$$

nämlich:

$$r = 12, \quad R = 40, \quad \varrho = 39.309....$$

und hieraus:

$$p = \frac{r}{m} = 0.5, \quad q = \frac{R}{n} = 2, \quad s = \frac{\varrho}{t} = 3.$$

Substituirt man nun, nachdem man die Coeffizienten in den Gleichungen (5) und (7) berechnet hat, diese Werthe in die Gleichung (8), so erhält man diejenige Zahlengleichung, aus welcher sich *z* berechnen lässt. Es ist nun:

$$\text{Coeffizient } A = \frac{p^2 - q^2}{2\alpha} = -0.09375,$$

$$\text{„ } B = \frac{mp^2 - nq^2}{\alpha} = -3.7,$$

$$\text{„ } C = \frac{m^2p^2 - n^2q^2 + \alpha^2}{2\alpha} = -26.4,$$

$$\text{„ } D = \frac{p^2 - s^2 - \frac{\gamma}{\alpha}(p^2 - q^2)}{2\beta} = -0.34375,$$

Coeffizient $E = \dfrac{s^2t - p^2m + \frac{\gamma}{\alpha}\{mp^2 - nq^2\}}{\beta} = 7.492746,$

„ $F = \dfrac{\gamma^2 + r^2 + \beta^2 - \varrho^2 - \{m^2p^2 - n^2q^2 + \alpha^2\}\frac{\gamma}{\alpha}}{2\beta} = -33.660464,$

und die Gleichung (8) verwandelt sich also in folgende:

$$0.126953125\,z^4 - 5.8450130599175\ldots z^3 + 97.67282623911\,z^2$$
$$- 687.7788628742026172\ldots z + 1685.98787343782436\ldots = 0;$$

hieraus ergiebt sich:

$$z^4 - 46.0407183\ldots z^3 + 769.361339\ldots z^2$$
$$- 5417.5811968\ldots z + 13280.396787\ldots = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei reelle positive und zwei imaginäre Wurzeln.

Die beiden ersteren sind:

$z = 10 \ldots\ldots$ { positive Glieder $= 100216.5307\ldots,$
negative „ $= 100216.5303\ldots,$

$z = 5.525777\ldots$ { positive Glieder $= 37704.5766\ldots,$
negative „ $= 37704.5768\ldots$

Die beiden letzteren sind:

$$z = 15.2574706\ldots + \sqrt{-7.544029\ldots},$$
$$z = 15.2574706\ldots - \sqrt{-7.544029\ldots}$$

Die Lage der Kegel und die Beschaffenheit derselben bedingen also in diesem speciellen Falle nur zwei Durchschnittspunkte dieser drei krummen Flächen, wie sich solches auch aus Taf. VIII. ergiebt.

Die Coordinaten x und y berechnen sich nun leicht aus den Gleichungen (5) und (9), nämlich:

$$x = Az^2 - Bz + C,$$
$$y = \frac{p^2(z-m)^2 - s^2(z-t)^2 - 2\gamma x + \gamma^2 + \beta^2}{2\beta};$$

und man findet:

für $z = 10$, $x = 1.225....$,

„ $z = 5.525777$, $x = -8.8172....$;

für die beiden ersten Werthe von z und x erhält man:

$$y = 6.8921....$$

und für die beiden letzten Werthe von z und x:

$$y = -2.7529....$$

Die Coordinaten für beide Punkte sind also:

$x = +1.225....$ $x = -8.8172....$

$y = +6.8921....$ und $y = -2.7529....$

$z = +10.0000....$ $z = +5.5258....$,

durch welche Berechnung die Aufgabe aufgelöset ist.

Die Untersuchung der Projectionen der Durchschnittslinien der Kegelflächen auf den drei Haupt-Coordinatenebenen gewährt manches Interesse, und ich will in Nachstehendem diese Projectionen für die Schnitte der Kegelflächen I. und II. näher zu discutiren versuchen.

Untersuchung der Projection des Schnittes der Kegelflächen I. und II. auf der Ebene *XZ*.

Im Allgemeinen ist zuvörderst zu bemerken, dass die Schnittlinie dieser beiden Kegel, weil solche keine parallelen Kanten haben, eine geschlossene Curve von doppelter Krümmung sein wird, und zwar mit Rücksicht auf die beiden Netze einer jeden dieser Kegelflächen, eine aus zwei Zweigen bestehende Curve.

Es ist damit aber nicht gesagt, dass die Projectionen dieser Curve ebenfalls geschlossene Linien sein werden, und es ergiebt sich auch aus Nachstehendem, dass die Projection auf *XZ* keine geschlossene Curve ist.

Die Gleichung dieser Curve ist nun (s. pag. 246, (5)):

$$Az^2 - Bz - x + C = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Es ist dies die Gleichung einer Parabel, und man kann sie leicht auf die übliche Form bringen, indem man den Anfangspunkt der Coordinaten unter paralleler Verschiebung der Achsen verlegt.

Setzt man nämlich:

$$z = z' + \delta, \quad x = x' + d;$$

so erhält man:

$$Az'^2 + 2A\delta z' + A\delta^2 - Bz' - B\delta - x' - d + C = 0, \quad (11)$$

und indem man

$$2A\delta z' - Bz' = 0$$

und

$$A\delta^2 - B\delta - d + C = 0$$

setzt, erhält man die Abstände der neuen Coordinatenachsen von den alten, nämlich:

$$\delta = \frac{B}{2A}, \quad d = \frac{4AC - B^2}{4A}.$$

Die Gleichung (11) verwandelt sich also in:

$$Az'^2 - x' = 0, \quad \text{oder} \quad z'^2 = \frac{1}{A} \cdot x'.$$

Nach Substituirung der Werthe für A, B, C (p. 249) erhält man:

$$\delta = 19.7333\ldots, \quad d = 10.107\ldots$$

und

$$z'^2 = -10.666\ldots x'. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Die Parabel öffnet sich also nach der Seite des negativen x', weil nur für solche Werthe von x' die Gleichung reell bleibt, und beide Zweige der Curvenprojection sind Theile dieser Parabel, wie auch aus Taf. VII. Fig. 7. ersichtlich ist.

Untersuchung der Projection des Schnittes der Kegelflächen I. und II. auf der Ebene *XY*.

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man durch Elimination von z:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{p^2}} + m = \sqrt{\frac{(x - \alpha)^2 + y^2}{q^2}} + n,$$

oder nach Substitution der Werthe von p, q u. s. w.:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{0.25}} + 24 = \sqrt{\frac{(x - 20)^2 + y^2}{4}} + 20.$$

Nach Wegschaffung der Wurzelgrössen erhält man:

$$x^4+y^4+2x^2y^2+5.33....x^3+5.33....xy^2-55.88....x^2$$
$$-62.96y^2-119.168....x+501.76=0;$$

und wenn man die Gleichung nach y^2 auflöset:

$$y^2=31.48-2.66x-x^2\pm\sqrt{489.23-48.312x}. \quad (13)$$

Der Charakter dieser Curve ist nicht auf den ersten Blick aus der Gleichung zu erkennen, es lässt sich nur von vorne herein das sagen, dass sie in Bezug auf die Achse der x symmetrisch ist, und dass für jeden Werth von x innerhalb bestimmter Grenzen vier Werthe für y vorhanden sind, wie solches auch, mit Rücksicht auf die Entstehung der Curve, wegen ihrer beiden Zweige nothwendig sein wird.

Es muss die Gleichung also näher untersucht werden.

Für $x=0$ ergiebt sich zunächst:

$$y^2=9.36.... \text{ und } 53.60....$$

und folglich:

$$y=\pm 3.06.... \text{ und } y=\pm 7.32....$$

Um die Werthe zu finden, wo die Curve die Abscissenachse schneidet, also $y=0$ ist, so hat man die Gleichung:

$$x^4+5.33....x^3-55.88....x^2-119.168....x+501.76=0$$

aufzulösen; diese giebt zwei positive und zwei negative Werthe von x, nämlich:

$$y=0 \text{ für } \begin{cases} x=5.598...., \\ x=2.402...., \\ x=-9.332...., \\ x=-3.998.... \end{cases}$$

Für die Grenzen von $x=\begin{cases} 2.402.... \\ -3.998.... \end{cases}$ erhält y vier Werthe; ausserhalb dieser Punkte bis zu $x=\begin{cases} 5.598.... \\ -9.332.... \end{cases}$ hat y zwei Werthe.

Um die ausgezeichneten Punkte der Curve zu finden, hat man zunächst den ersten Differential-Coeffizienten zu bestimmen,

und es ergeben sich sofort aus $\frac{dy}{dx}=0$ die ausgezeichneten Werthe für y, wo die Tangente parallel mit der X-Achse ist. Es ist nun:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2.66....-2x\mp\frac{48.312....}{2\sqrt{489.23-48.312....x}}}{2y}=0,$$

$$2x+2.666....=\mp\frac{48.312....}{2\sqrt{489.23....-48.312....x}},$$

$$\{x+1.333....\}^2=\frac{\{12.078....\}^2}{489.23....-48.312....x},$$

$$48.312x^3-360.4302x^2-1218.828x-719.2508=0,$$

$$x^3-7.46x^2-25.23x-14.89=0.$$

Dieser Gleichung entsprechen die Werthe:

$$x=-0.798,\quad x=-1.846,\quad x=+10.104.$$

Die beiden ersten Werthe können nur in Betracht gezogen werden, weil der dritte Werth von x keinem Curvenpunkte entspricht, indem y dafür imaginär wird.

Für $x=-0.798$ wird $y=\pm 7.48$ und $=\pm 3.16$,

„ $x=-1.846$ „ $y=\pm 7.55$ „ $=\pm 2.99$.

Wenn man den doppelten Werth von $\frac{dy}{dx}$ und zugleich die Bedingung $\frac{dy}{dx}=0$ berücksichtigt, so ergiebt sich, dass dem einen Curvenzweige, dessen Gleichung

$$y=\pm\sqrt{31.48-2.66....x-x^2+\sqrt{489.23-48.312x}}$$

ist, nur der Werth von $x=-1.846$ als Abscisse des ausgezeichneten Werthes von y entspricht, während dem anderen Zweige:

$$y=\pm\sqrt{31.48-2.66....x-x^2-\sqrt{489.23-48.312x}}$$

der Werth von $x=-0.798$ angehört.

Die ausgezeichneten Werthe sind also:

für den einen Zweig: $x=-1.846$, $y=\pm 7.55$,

„ „ anderen „ $x=-0.798$, $y=\pm 3.16$.

Dass diese Werthe von y Maxima sind, weiset der zweite Differentialcoeffizient nach:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\{[489.23-48.312x]^{\frac{1}{2}} \pm 291.756\}}{(489.23-48.312x)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{31.48-2.66....x-x^2 \pm \sqrt{489.23-48.312x}}}$$

$$-\frac{\{-(1.33....+x)\sqrt{489.23-48.312x} \mp 12.078\}^2}{(489.23-48.312x).\{31.48-2.66....x-x^2 \pm \sqrt{489.23-48.312x}\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Derselbe wird für beide Werthe von x negativ und zwar für

$$x=-1.846: \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-0.135...,$$

und für

$$x=-0.798: \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-0.309...$$

Die Werthe von $\frac{dy}{dx}=\infty$ werden die Punkte geben, wo die Tangente parallel mit der Ordinatenachse geht, nämlich an allen Punkten, wo $y=0$ ist.

Unter Berücksichtigung des Vorstehenden bildet also die Projection des Schnittes der Kegel I. und II. auf der Ebene XY eine aus zwei geschlossenen Zweigen bestehende Curve, und es liegen, wie sich leicht aus der Vergleichung der gefundenen Werthe ergiebt, die Maxima der Ordinaten in der Mitte der entsprechenden Achsen der Curvenzweige. Diese beiden Curven haben für den hier untersuchten Fall wenig Abweichung von der Kreisform, denn für die grössere ist der Halbmesser in der Richtung der X-Achse $=7.465$, die in der Mitte vorhandene Maximal-Ordinate $=7.55$.

Für die kleinere ist der Halbmesser in der Richtung der X-Achse $=3.20$, die in der Mitte vorhandene Maximal-Ordinate $=3.16$.

Die grössere bildet also eine etwas überhöhete kreisförmige Linie, die kleinere dagegen eine etwas gedrückte kreisförmige Linie; die Unterschiede machen sich aber erst in der zweiten Decimalstelle bemerklich (Taf. VII. Fig. 8.).

Auf diese geringe Abweichung der Curven von der Kreisform wurde ich zuerst durch das Studium der darstellenden Geometrie aufmerksam, wo sich bei der graphischen Darstellung des Durch-

schnittes zweier senkrechter kreisförmiger Kegel herausstellte, dass, unter nicht gar zu extravaganten Annahmen in dem Verhältnisse der Kegel zu einander, die Linie bei aller Genauigkeit der Zeichnung so wenig von dem Kreise unterschieden ist, dass die Darstellung derselben mittelst des Zirkels vollkommen genügt, und dass man eben zuerst nicht weiss, ob die Abweichung in der Mangelhaftigkeit der Arbeit, der Instrumente oder der wirklichen Verschiedenheit von der Kreislinie liegt.

Mit Hülfe des hyperbolischen Kegelschnittes lässt sich aber bei näherer Ueberlegung leicht nachweisen, dass im Allgemeinen die beiden Zweige der Projection der Curve auf XY keine Kreise sein werden, und dass dieses nur in besonderen Fällen Statt findet. Je mehr nämlich die Höhen der Mittelpunkte der Kegel einander gleich werden, desto ähnlicher werden beide Zweige der Horizontalprojection der Curve einander; der eine verliert seine überhöhete Form nach und nach, der andere geht aus dem flachen Oval nach und nach in den Kreis über.

Sind die Höhen der Kegel einander gleich, so fallen beide Zweige der Horizontalprojection in einen zusammen und dieser ist dann ein Kreis, während die Vertikalprojection nach wie vor ein Theil einer Parabel bleibt (Taf. VII. Fig. 9.).

Man hat nämlich für den Fall der gleichen Höhen der Mittelpunkte der Kegel aus (1) und (2):

$$\frac{x^2+y^2}{p^2}=\frac{(x-\alpha)^2+y^2}{q^2},$$

und hieraus:

$$x^2+\frac{2\alpha p^2}{q^2-p^2}x+y^2=\frac{\alpha^2p^2}{q^2-p^2}.$$

Durch Vergleichung mit der allgemeinen Kreisgleichung, wenn die Coordinaten nicht vom Mittelpunkte aus gezählt werden:

$$x^2-2Ax+y^2=R^2-A^2,$$

erhält man die Abscisse des Mittelpunktes:

$$A=-\frac{\alpha p^2}{q^2-p^2},$$

und den Halbmesser des Kreises:

$$R=\frac{\alpha pq}{q^2-p^2}.$$

Die Gleichung der parabolischen Vertikalprojection auf XZ findet sich für diesen Fall aus der Gleichung:

$$p^2\{z-m\}^2-x^2=q^2\{z-m\}^2-(x-\alpha)^2;$$

und sie ist:

$$z^2-2mz+\frac{2\alpha}{q^2-p^2}\cdot x-\frac{\alpha^2-m^2q^2+m^2p^2}{q^2-p^2}=0,$$

eine Gleichung von derselben Form wie (10) pag. 251.

Als ganz speciellen Fall will ich schliesslich den noch anführen, wenn die Kegel keine gleiche Höhe haben, wenn aber ihre Achsen zusammenfallen (Taf IX. Fig. 10.). In diesem Falle ist natürlich nicht nur die Projection der Durchschnittscurve auf XY ein Kreis, sondern die Curve ist an und für sich eine ebene Curve, ein Kreis, wie sich solches auch durch die Gleichungen darstellt.

Man hat zur Bestimmung der Horizontalprojection auf XY die Gleichung:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{p^2}}+m=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{q^2}}+n,$$

und hieraus:

$$x^2+y^2=\frac{(n-m)^2p^2q^2}{(p-q)^2}=R^2;$$

der Halbmesser des Kreises also $R=\frac{(n-m)pq}{p-q}$; und für die Projection auf XZ hat man in diesem besonderen Falle:

$$p^2(z-m)^2-x^2=q^2(z-n)^2-x^2,$$

und hieraus:

$$z=\frac{pm-qn}{p-q},$$

eine gerade Linie, parallel mit der Achse der x.

Untersuchung der Projection des Schnittes der Kegelflächen I. und II. auf der Ebene YZ.

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man durch Elimination von x:

$$[\sqrt{(z-m)^2p^2-y^2}-\alpha]^2=q^2(z-n)^2-y^2,$$

$$(z-m)^4p^4+\alpha^4+q^4(z-n)^4-2p^2q^2(z-m)^2(z-n)^2$$
$$-2\alpha^2q^2(z-n)^2=2\alpha^2(z-m)^2p^2-4\alpha^2y^2.$$

Wenn man diese Gleichung weiter entwickelt und nach z ordnet, so erhält man:

(14)

$$z^4.(p^2-q^2)^2+z^3\{4p^2q^2(n+m)-4mp^4-4nq^4\}$$
$$+z^2\{6m^2p^4+6n^2q^4-2p^2q^2[(n+m)^2+2nm]-2\alpha^2q^2-2\alpha^2p^2$$
$$+z\{4p^2q^2(n+m)nm-4m^3p^4-4n^3q^4+4\alpha^2q^2n+4\alpha^2p^2m\}$$
$$+\{m^4p^4+\alpha^4+n^4q^4-2n^2m^2p^2q^2-2\alpha^2q^2n^2-2\alpha^2p^2m^2\}=-4\alpha^2y^2$$

Das ist eine Gleichung von der Form:

(15)

$$Az^4+Bz^3+Cz^2+Dz+E=Fy^2.$$

Wenn man die Coeffizienten A bis F nach den früheren Daten (s. pag. 249.) nämlich:

$$p=0.5,\quad m=24,\quad n=20,$$
$$q=2,\qquad \alpha=20$$

berechnet, so ergiebt sich:

$$A=\ 14.0625,\quad B=-1110,\quad C=29424,$$
$$D=-293376,\quad E=884736,\quad F=-1600;$$

und die Gleichung (15) verwandelt sich, wenn man zugleich z^4 von seinem Coeffizienten frei macht, in folgende:

(16)

$$z^4-78.9333....z^3+2092.3733....z^2-20862.2933....z+62914.56$$
$$=-113.7777....y^2.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich zunächst, dass die ihr entsprechende Curve in Bezug auf die Achse der Z symmetrisch ist, da die Gleichung für gleiche positive und negative y denselben Werth behält.

Für jedes y wird die Gleichung im Allgemeinen vier Werthe von z geben, die Curve wird, wie man aus der Entstehung derselben schon schliessen kann, aus zwei geschlossenen Zweigen

bestehen und einem jeden dieser Zweige werden eben zwei der Werthe von z zufallen.

Bei weiterer Untersuchung ergiebt sich aus dem ersten Differenzialcoeffizienten:

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{227,555\,y}{4z^3 - 236.7999....z^2 + 4184,7466....z - 20862,2933....},$$

dass derselbe $= 0$, oder, was dasselbe ist, dass die Tangenten parallel mit der Y-(Abscissen-) Achse an allen denjenigen Punkten sind, wo $y = 0$ ist.

Um die entsprechenden Werthe von z zu finden, hat man nur den linken Theil der Gleichung (16) gleich Null zu setzen und die vier Werthe von z zu berechnen.

Es sind aber die vier Wurzeln dieser Gleichung:

$$z^4 - 78.9333....z^3 + 2092.3733....z^2 - 20862.2933....z + 62914.56 = 0,$$

in solchem Falle:

$$z' = 5.3333...., \quad z'' = 12.8, \quad z''' = 28.8, \quad z^{IV} = 32,$$

wie solches auch in Taf. IX. Fig. 11. bezeichnet ist.

Aus dem ersten Differentialcoeffizienten ergiebt sich ferner, dass derselbe $= \infty$, oder, was dasselbe, dass die Tangenten parallel mit der Z-(Ordinaten-) Achse an allen denjenigen Punkten sind, welche der Gleichung:

$$4z^3 - 236.7999....z^2 + 4184.7466....z - 20862.2933.... = 0$$

entsprechen.

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$z' = 8.4461, \quad z'' = 30.5224, \quad z''' = 20.2316.$$

Die letztere dieser Wurzeln kommt nicht in Betracht, weil sie, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich, keinem Curvenpunkt mehr entspricht.

Für $z' = 8.4461$ ergeben sich aus Gleichung (16) die dazu gehörigen Werthe von $y = \pm 7.557$.

Für $z'' = 30.5224$ ergeben sich die Werthe von $y = \pm 3.16$.

Hierdurch sind nun auch die Grenzen gegeben, innerhalb welcher aus der Grundgleichung (16) für verschiedene Werthe

von y entweder vier reelle oder zwei reelle und zwei imaginäre oder nur lauter imaginäre Werthe von z entstehen.

Es wird nämlich diese Gleichung ergeben:

für y zwischen den Grenzen 0 und ± 3.16
vier reelle Werthe für z;

für y zwischen den Grenzen ± 3.16 und $\pm 7{,}557$
zwei reelle und zwei imaginäre Werthe für z;

und endlich

für y grösser als ± 7.557
vier imaginäre Werthe für z.

Wenn man nun noch die Annahme macht, dass beide Kegel gleiche Höhe haben, so wird $m = n$ und die Gleichung (14) verwandelt sich für solchen Fall in folgende:

(17)

$$z^4(p^2-q^2) - z^3\{4n(p^2-q^2)^2\} + z^2\{6n^2(p^2-q^2)^2 - \alpha^2(p^2+q^2)\}$$
$$-z\{4n^3(p^2-q^2)^2 - 4n\alpha^2(p^2+q^2)\} + \{n^4(p^2-q^2)^2 - \alpha^2[2n^2(p^2+q^2)-\alpha^2]\}$$
$$= -4\alpha^2y^2.$$

Nach Berechnung der Coeffizienten der verschiedenen Potenzen von z erhält man:

$$z^4 - 80z^3 + 2158.222....z^2 - 22328.888....z + 74666.666.... = -113.777....y^2.$$

Die beiden Zweige der Curve müssen in solchem Falle symmetrische Linien sein, und es ergiebt sich auch solches aus der Gleichung, sobald man die Y-Achse bis zum Mittelpunkt der Kegelflächen in die Höhe rückt, also $+20$ höher; für diesen Fall erhält man neue z, und wenn man setzt: $z = s + 20$, so ergiebt sich aus der letzten Gleichung:

$$s^4 - 241.777....s^2 + 11377.777.... = -113.777....y^2.$$

Es sind nun die Glieder, welche die ungeraden Potenzen von z enthalten, weggefallen, und die letzte Gleichung weiset die Symmetrie der Curve in Bezug auf beide Achsen nach.

Die letzte Gleichung ist leicht direkt aufzulösen; wenn man $s^2 = v$ setzt, so erhält man:

$$v^2 - 241.777....v = -113.777....y^2 - 11377.777....,$$

woraus sich die Werthe von v, und demnach auch von s, für jedes angenommene y leicht berechnen lassen.

So lange in der aus Vorstehendem sich ergebenden Gleichung:

$$v = 120.8888.... \pm \sqrt{3236.348365.... - 113.777....y^2}$$

der Werth unter dem Wurzelzeichen positiv bleibt, so lange erhält man für jedes y reelle Werthe von v und von s.

Sobald $y = \pm 5.333....$ wird, so wird der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen $= 0$, und man erhält die letzten reellen Werthe von v und s, nämlich:

$$v = 120.8888.... \quad \text{und} \quad s = \pm 11.44....$$

Bei grösseren y wird v und s imaginär.

Für $y = 0$ erhält man die Punkte, wo die Curve die Ordinatenachse schneidet, nämlich an denjenigen Stellen, welche der Gleichung:

$$s = \pm\sqrt{v} = \pm\sqrt{120.88 \pm \sqrt{3236.348365....}}$$

entsprechen; dies ist da, wo $s = \pm\sqrt{177.777....}$ und $= \pm\sqrt{64}$ wird, also bei $s = \pm 13.333....$ und $= \pm 8$ (Taf. IX. Fig. 12.).

Macht man schliesslich noch die Annahme, dass ausser der Gleichheit der Höhen der beiden Kegel auch noch die Neigungen der Erzeugungslinie gegen die Achsen gleich sein sollen, für welchen Fall $p = q$ wird, so reducirt sich die Gleichung (17) abermals und wird:

$$z^2(4\alpha^2q^2) - z.8n\alpha^2q^2 + \alpha^2(4n^2q^2 - \alpha^2) = 4\alpha^2y^2;$$

oder nach Berechnung der Coeffizienten:

$$z^2 - 40z + 375 = \frac{y^2}{4}.$$

Wenn man wiederum die Achse der Y bis zum Mittelpunkt der Kegelflächen in die Höhe rückt, also

$$z = s + 20$$

setzt, so ergiebt sich:

$$s^2 - 25 = \frac{y^2}{4}, \quad \text{oder} \quad y = \pm 2\sqrt{s^2 - 25},$$

nämlich die Gleichung einer Hyperbel, wie es der Entstehung der Curve gemäss in diesem Falle auch sein muss (Taf. IX. Fig. 13.).

Für $s = \pm 5$ wird $y = 0$; für kleinere s wird y imaginär, für grössere s wächst y bis ins Unendliche.

Auflösung ad III.

Instrument nach Art der Sextanten.

A, B, C (Taf. IX. Fig. 14) sind die drei gegebenen bekannten Punkte; *P* ist der zu bestimmende Punkt, an welchem sich der Beobachter befindet, und welchen er nicht verlassen darf.

Derselbe kann also nur die Winkel ε, η und ϑ, welche die Gesichtslinien von *P* nach den Punkten *A*, *B* und *C* bilden, messen.

Die Aufgabe reducirt sich also, wie man sieht, darauf:

Von einer Pyramide, bei welcher die Grundfläche und die Winkel, welche die Kanten am Scheitel einschliessen, bekannt sind, das Fehlende zu finden, namentlich die Coordinaten des Scheitels.

Es ist in diesem Falle nicht gerathen, direkt die Coordinaten des Scheitels aus den gegeben Daten zu bestimmen, sondern man thut gut, zunächst die Länge der Kanten *a*, *b*, *c* zu bestimmen und hieraus die Coordinaten von *P*.

Setzt man

$$AC = T, \quad \text{ferner} \quad \cos\varepsilon = p,$$
$$BC = S, \qquad \cos\eta = q,$$
$$AB = U; \qquad \cos\vartheta = r;$$

so hat man folgende Grundgleichungen:

$$T^2 = a^2 + b^2 - 2ab.p,$$
$$S^2 = b^2 + c^2 - 2bc.q,$$
$$U^2 = a^2 + c^2 - 2ac.r;$$

in welchen *a*, *b*, *c* die drei Unbekannten sind, und welche also daraus bestimmt werden können.

Man wird leicht bemerken, dass die Form der gegebenen Gleichungen nicht eine solche ist, welche eine leichte Ausscheidung zweier der Unbekannten möglich macht; die Rechnung führt auf weitläufige Ausdrücke und dürfte es nicht nöthig sein, die ganze Entwickelung hier wieder zu geben; ich will das Wesentlichste aus dem Ganzen der Entwickelung hier anführen, und be-

merke dabei, dass ich davon ausgegangen bin, b und c zu eliminiren und a zunächst zu bestimmen.

Nach Elimination von b gelangt man zunächst sehr bald zu folgendem Ausdruck:

$$c^2.\{4a^2r^2-8a^2rpq+4T^2-4T^2q^2-4a^2+4a^2q^2+4a^2p^2\}$$
$$+ca\{4T^2pq-4T^2r-4S^2r+4S^2pq+4U^2r-4U^2pq\}$$
$$=2T^2S^2-4a^2S^2+4S^2a^2p^2-T^4-S^4-U^4+2T^2U^2+2S^2U^2.$$

Es sind nun noch c^2 und c wegzuschaffen. Zunächst kann man für c^2 seinen Ausdruck $U^2-a^2+2ac.r$ in vorstehende Gleichung hineinsetzen, darnach gelangt man nach einigen, nicht schwierigen, aber umständlichen Entwickelungen zu folgender Gleichung:

$$c-ar= \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} a^4\{-2r^4+4pqr^3+r^2[3-2q^2-2p^2]-2pqr-1+q^2+p^2\} \\ +a^2\{T^2[1-q^2-r^2+2q^2r^2-pqr]+S^2[-1+p^2+r^2-pqr] \\ \qquad\qquad +U^2[1-2r^2-q^2-p^2+3pqr]\} \\ +T^2U^2q^2-\left(\frac{T^2+U^2-S^2}{2}\right)^2 \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c} a^3\{2r^3-4pqr^2-r[2-2q^2-2p^2]\} \\ +a\{r[T^2-2T^2q^2-S^2+U^2]+pq[T^2+S^2-U^2]\} \end{array}\right\}}.$$

Im Zähler und Nenner des Bruches sind die Glieder nach den Potenzen der unbekannten Grösse a geordnet; die Coeffizienten sind bekannte Grössen, welche der Kürze halber durch die Buchstaben d, e, f, g und h bezeichnet werden sollen, wodurch die Gleichung sich, wie folgt, schreiben lässt:

$$c-ar=\frac{da^4+ea^2+f}{ga^3+ha}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Nun ist aber auch:

$$c-ar=\sqrt{U^2-a^2+a^2r^2}.$$

Durch Gleichsetzung dieser Ausdrücke und Quadrirung auf beiden Seiten erhält man:

$$U^2-a^2+a^2r^2=\frac{d^2a^8+e^2a^4+f^2+2dea^6+2dfa^4+2efa^2}{g^2a^6+h^2a^2+2hga^4}.$$

Nach weiterer Entwickelung und Ordnung nach a erhält man folgende Schlussgleichung:

(20)

$$a^8\{g^2r^2-g^2-d^2\}+a^6\{U^2g^2-2hg+2hgr^2-2de\}$$
$$+a^4\{2U^2hg-h^2+h^2r^2-e^2-2df\}+a^2\{U^2h^2-2ef\}-f^2=0,$$

oder, wenn man die bekannten Coeffizienten von a^8, a^6, a^4 und a^2 durch l, m, n und w bezeichnet, erhält man:

$$a^8l+a^6m+a^4n+a^2w-f^2=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Setzt man $a^2=v$, so erhält man:

$$v^4l+v^3m+v^2n+vw-f^2=0.$$

Diese Gleichung giebt also im Allgemeinen vier Werthe für v und folglich acht, oder richtiger vier Doppelwerthe für a.

Es entsprechen nämlich im Allgemeinen acht Punkte der Aufgabe oder, was dasselbe: es lassen sich aus den gegebenen Daten acht Pyramiden bilden, von denen je zwei und zwei symmetrisch sind mit gleichen Längen der Kanten, jedoch nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

Der Beobachter wird sich also noch einige Merkmale nehmen müssen in Bezug auf die Lage seines Punktes zu den gegebenen drei Punkten, um danach zu beurtheilen, welchen der acht gefundenen Punkte er, als seiner Aufgabe angehörig, zu wählen hat.

Nachdem somit nun a bestimmt ist, d. h. die Länge Einer Kante, lassen sich hiemit die beiden andern Kanten b und c aus den Dreiecken, welche die Seitenflächen bilden, leicht berechnen, da in diesen Dreiecken in solchem Falle zwei Seiten und ein Winkel bekannt sind.

Nach Bestimmung der Länge der drei Kanten lässt sich dann schliesslich die Berechnung der Coordinaten des Scheitels, als Hauptpunkt der Aufgabe, vornehmen.

Das nachstehende Beispiel wird den Gang der Rechnung deutlich machen.

Beispiel.

Die drei gegebenen Punkte seien bezeichnet durch A, B und C, und ihre Coordinaten seien dieselben, wie im Beispiel ad Auflösung II. (pag. 248. und 249.) angenommen ist, nämlich:

$$\text{für } A \quad \begin{cases} x'=0, \\ y'=0, \\ z'=m=24; \end{cases}$$

$$\text{für } B \quad \begin{cases} x'' = \alpha = 20, \\ y'' = 0, \\ z'' = n = 20; \end{cases}$$

$$\text{für } C \quad \begin{cases} x''' = \gamma = 10, \\ y''' = \beta = 10, \\ z''' = t = 13.103\ldots; \end{cases}$$

so folgt hieraus zunächst:

$$AC = T = 17.853,$$
$$AB = U = 20.396,$$
$$BC = S = 15.734;$$

die gemessenen Winkel seien:

$$\left.\begin{array}{l} APC = \varepsilon = 85^0 47' 20'' \\ CPB = \eta = 37^0 22' 32'' \\ BPA = \vartheta = 61^0 57' 56'' \end{array}\right\} \text{ dann ist: } \begin{array}{l} \cos\varepsilon = p = 0.0734, \\ \cos\eta = q = 0.7947, \\ \cos\vartheta = r = 0.47; \end{array}$$

und man kann nun direkt zur Berechnung der Coeffizienten d, e, f, g, h in den Gleichungen (18) und (19) pag. 263 übergehen.

Es ist:

$$d = -2r^4 + 4pqr^3 + r^2[3 - 2q^2 - 2p^2] - 2pqr - 1 + q^2 + p^2 = -0.1100045,$$

$$e = T^2[1 - q^2 - r^2 + 2q^2r^2 - pqr] + S^2[-1 + p^2 + r^2 - pqr] + U^2[1 - 2r^2 - q^2 - p^2 + 3pqr] = -69.61271529,$$

$$f = T^2U^2q^2 - \left[\frac{T^2 + U^2 - S^2}{2}\right]^2 = 24400.370019,$$

$$g = 2r^3 - 4pqr^2 - r[2 - 2q^2 - 2p^2] = -0.185272,$$

$$h = r[T^2 - 2T^2q^2 - S^2 + U^2] + pq[T^2 + S^2 - U^2] = 48.5335095.$$

Mit Hülfe dieser gefundenen Werthe kann man nun zur Berechnung der Coeffizienten l, m, n, w, f^2 in den Gleichungen (20) und (21) pag. 264., schreiten, und es ergiebt sich daraus Folgendes:

$$l = g^2r^2 - g^2 - d^2 = -0.03884415,$$

$$m = U^2g^2 - 2hg + 2hgr^2 - 2de = 12.97525064,$$

$$n = 2U^2hg - h^2 + h^2r^2 - e^2 - 2df = -8794.061477,$$

$$w = U^2h^2 - 2ef = 4377040.664511,$$

$$f^2 = 595378057.064114.$$

Die Schlussgleichung (21) wird sich demnach wie folgt stellen:

$$-0.03884415a^8 + 12.97525064a^6 - 8794.061477a^4 + 4377040.664511a^2 - 595378057.064114 = 0.$$

Wenn man nun a^8 von seinem Coeffizienten befreiet, und wie schon angegeben, v statt a^2 setzt, so erhält man:

(22)

$$v^4 - 334.03358395v^3 + 226393.45891v^2 - 112682106.945v + 15327354493.9 = 0.$$

Für die vier Wurzeln dieser Gleichung habe ich nachstehende Näherungswerthe gefunden:

$$v' = 245.055\ldots., \quad v''' = -82.417908025 + \sqrt{-239633.80139},$$

$$v'' = 253.8144\ldots., \quad v^{IV} = -82.417908025 - \sqrt{-239633.80139}.$$

Nach dem Gesetze der Coeffizienten soll die Summe der Wurzeln gleich dem Coeffizienten des zweiten Gliedes mit umgekehrtem Zeichen sein, demnach in diesem Falle:

$$= 334.03358395$$

und man findet in der That für:

$$245.055\ldots. + 253.8144 - 82.417908025 + \sqrt{-239633.80139} - 82.417908025 - \sqrt{-239633.80139}$$

die obige Summe 334.03358395.

Die acht Werthe von a werden demnach folgende sein:

Erste Doppelpyramide.

$$a' = +\sqrt{245.055\ldots.} = 15.6542\ldots.,$$

$$a'' = -\sqrt{245.055\ldots.} = -15.6542\ldots.$$

Zweite Doppelpyramide.

$$a''' = +\sqrt{253.8144\ldots.} = 15.9315\ldots.,$$

$$a^{IV} = -\sqrt{253.8144\ldots.} = -15.9315\ldots.$$

Dritte Doppelpyramide (imaginär).

$$a^V = +\sqrt{-82.417908025 + \sqrt{-239633.80139}},$$

$$a^{VI} = -\sqrt{-82.417908025 + \sqrt{-239633.80139}}.$$

Vierte Doppelpyramide (imaginär).

$$a^{VII} = +\sqrt{-82.417908025 - \sqrt{-239633.80139}},$$

$$a^{VIII} = -\sqrt{-82.417908025 - \sqrt{-239633.80139}}.$$

In diesem speciellen Falle entsprechen der Aufgabe also nur vier reelle Werthe von a, von denen je zwei und zwei Einer Doppelpyramide, bei welcher die Kanten zu zweien gleiche Länge haben, angehören. Die beiden Scheitel dieser Doppelpyramide liegen symmetrisch zur Grundfläche und die Perpendikel von diesen Scheiteln auf die Grundfläche müssen gleich lang werden.

Durch die Bestimmung von a ist nun die Länge Einer der Kanten gegeben, und es erfolgt jetzt die Berechnung der beiden anderen Kanten b, c wie pag. 264. bereits angedeutet ist.

Bei dem vorliegenden Beispiel will ich zunächst für die erste Doppelpyramide die fehlenden Kanten und die Coordinaten des Scheitels bestimmen, es ergiebt sich alsdann aus der einen dreieckigen Seitenfläche, in welcher zwei Seiten nebst einem Winkel bekannt sind, auf einfache Weise die andere Kante (Taf. IX. Fig. 15.):

$$c = 22.36....$$

und ebenso die dritte Kante:

$$b = 9.8114....$$

Bei der anderen Hälfte dieser ersten Doppelpyramide sind diese gefundenen Kantenlängen mit negativem Vorzeichen zu nehmen, weil eben diese Kanten nach entgegengesetzter Seite gerichtet sind.

Die Berechnung der Coordinaten des Scheitels P (Taf. IX. Fig. 16.) macht nun weiter keine Schwierigkeit, und ergiebt sich aus Nachstehendem:

Es ist:

$$x^2 + y^2 + (m-z)^2 = a^2,$$

$$(x-a)^2 + y^2 + (n-z)^2 = c^2,$$

$$(x-\gamma)^2+(y-\beta)^2+(t-z)^2=b^2.$$

Durch Combination der beiden ersten Gleichungen gelangt man zu dem Ausdruck:

$$x=\frac{a^2-c^2+\alpha^2-m^2+n^2}{2\alpha}+\frac{m-n}{\alpha}\cdot z=F+Gz.$$

Durch Combination der ersten und dritten Gleichung und mit Hülfe des so eben für x gefundenen Werthes gelangt man ferner zu dem Ausdruck:

$$y=\frac{a^2-b^2+\beta^2+\gamma^2-m^2+t^2-\frac{\gamma}{\alpha}(a^2-c^2+\alpha^2-m^2+n^2)}{2\beta}$$

$$+\frac{m-t-\frac{\gamma}{\alpha}(m-n)}{\beta}\cdot z=D+Ez.$$

Wenn man diese Ausdrücke für x und y in die erste Gleichung substituirt, so erhält man einen Ausdruck, in welchem nur z als unbekannte Grösse vorhanden ist, nämlich:

$$(F+Gz)^2+(D+Ez)^2+(m-z)^2=a^2,$$

und hieraus:

$$z^2+2z.\left\{\frac{FG+DE-m}{1+E^2+G^2}\right\}=\frac{a^2-F^2-D^2-m^2}{1+E^2+G^2},$$

oder Kürze halber:

$$z^2+2z.H=J,$$

woraus sich dann schliesslich ergiebt:

$$z=-H\pm\sqrt{J+H^2}.$$

Es wird mithin:

$$x=F+G\{-H\pm\sqrt{J+H^2}\} \quad \text{und} \quad y=D+E\{-H\pm\sqrt{J+H^2}\}.$$

Bei dieser Coordinaten-Berechnung ist nicht ausser Acht zu lassen, dass die Grössen a, b, c, nämlich die Kanten, nur in den zweiten Potenzen vorkommen; die doppelten Ausdrücke von x, y, z geben mithin sofort die Coordinaten für beide Scheitel der jedesmaligen Doppelpyramide.

Die numerische Berechnung der Coefficienten F, G, D, E, H und J ergiebt:

$$F = \frac{a^2 - c^2 + \alpha^2 - m^2 + n^2}{2\alpha} = -0.772865,$$

$$G = \frac{m-n}{\alpha} = 0.2,$$

$$D = \frac{a^2 - b^2 + \beta^2 + \gamma^2 - m^2 + t^2 - \frac{\gamma}{\alpha}\{a^2 - c^2 + \alpha^2 - m^2 + n^2\}}{2\beta} = -2.00313305,$$

$$E = \frac{m - t - \frac{\gamma}{\alpha}\{m-n\}}{\beta} = 0.8897,$$

$$H = \frac{FG + DE - m}{1 + E^2 + G^2} = -14.16097,$$

$$H^2 = 200.533071,$$

$$J = \frac{a^2 - F^2 - D^2 - m^2}{1 + E^2 + G^2} = -183.206536.$$

Es ist mithin:

$z = 14.16097 \pm 17.326535 = 9.998....$ und $= 18.323....,$

$y = 6.892....$ „ $= 14.299....,$

$x = 1.227....$ „ $= 2.892....$

Für die zweite Doppelpyramide, welche neben der ersten bei den angenommenen Daten im Raume möglich ist, wurde die Länge der einen Kante a (s. pag. 266.) gefunden $= \pm 15.9315....$ Durch ähnliche Rechnungsweise wie bei der ersten Pyramide erhält man hier:

$$b = \pm 9.4714 \text{ und } c = \pm 22.1722$$

und wenn man sodann die Berechnung der Coeffizienten F bis J ausgeführt hat, ergeben sich für die zweite Doppelpyramide die Coordinaten beider Scheitel wie folgt:

$z = 9.813....$ und $18.087....,$

$y = 7.0652....$ „ $14.4266....,$

$x = 1.6178....$ „ $3.2686....$

Man sieht aus den Werthen der Coordinaten, dass die gleichnamigen Scheitel beider Doppelpyramiden sehr nahe im Raume bei einander liegen; die direkte Entfernung der gleichnamigen Scheitel von einander beträgt:

$$L = \sqrt{(z-z_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_1)^2} = 0.46.$$

(M. vergl. Taf. IX. Fig. 17.) Die dritte und vierte Doppelpyramide (pag. 267.) werden imaginär, und fallen deshalb ganz aus der Rechnung aus.

Die Aufgabe ist somit auch auf diese Weise, dass von dem zu bestimmenden Punkt die Winkel, welche die Gesichtslinien nach den drei gegebenen Punkten einschliessen, gemessen werden, aufgelöset. Man kann schliesslich nun noch folgende kleine Rechnung anstellen, die einigermaassen zur Controle der, für die Coordinaten der Pyramidenscheitel gefundenen Werthe dienen kann.

Da nämlich jede Hälfte einer Doppelpyramide symmetrisch zur Grundfläche liegt, so müssen die Perpendikel, welche von den Scheiteln auf die Grundfläche gefällt werden, und welche eben die Höhen der Pyramiden darstellen, einander gleich werden.

Der Ausdruck für die Länge λ eines Perpendikels von einem Punkt x', y', z' auf eine Ebene, deren allgemeine Gleichung $Ax+By+Cz+D=0$ ist, stellt sich aber bekanntlich wie folgt:

$$\lambda = \frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

In diesem Ausdruck müssen noch die Coeffizienten A, B, C, und D, welche von der Gleichung der Ebene herrühren, bestimmt werden.

Die Ebene, welche hier durch die Grundfläche der Pyramide dargestellt wird, ist durch die drei festen Punkte, durch welche sie geht, gegeben. Wenn aber die Coordinaten dreier Punkte, durch welche eine Ebene geht, bezeichnet werden mit:

$$x_i,\ y_i,\ z_i;\quad x_{ii},\ y_{ii},\ z_{ii};\quad x_{iii},\ y_{iii},\ z_{iii};$$

so haben die Coeffizienten der Ebenengleichung nach den Lehren der analytischen Geometrie folgende Werthe:

$$A = y_i z_{iii} - y_{iii} z_i + y_{ii} z_i - y_i z_{ii} + y_{iii} z_{ii} - y_{ii} z_{iii},$$

$$B = x_i z_{ii} - x_{ii} z_i + x_{ii} z_{iii} - x_{iii} z_{ii} + x_{iii} z_i - x_i z_{iii},$$

$$C = x_i y_{iii} - x_{iii} y_i + x_{ii} y_i - x_i y_{ii} + x_{iii} y_{ii} - x_{ii} y_{iii},$$

$$D = x_i(y_{ii} z_{iii} - y_{iii} z_{ii}) + x_{ii}(y_{iii} z_i - y_i z_{iii}) + x_{iii}(y_i z_{ii} - y_{ii} z_i).$$

Für den vorliegenden Fall ist nun:

$$x_{,}=0, \quad x_{,,}=20, \quad x_{,,,}=10,$$

$$y_{,}=0, \quad y_{,,}=0, \quad y_{,,,}=10,$$

$$z_{,}=24, \quad z_{,,}=20, \quad z_{,,,}=13.10305....$$

Nach Substitution dieser Werthe ergiebt sich:

$$A=-40, \quad B=-177.939...., \quad C=-200, \quad D=4800.$$

Der Ausdruck für das Perpendikel wird demnach:

$$\lambda=\frac{-40.x'-177.939....y'-200.z'+4800}{\pm 270.67...}.$$

Wenn man nun in Bezug auf die erste Doppelpyramide zuerst die Werthe:

$$\left\{\begin{array}{l}1.227....\\6.892....\\9.998....\end{array}\right. \quad \text{und sodann die Werthe} \quad \left\{\begin{array}{l}2.892....\\14.299....\\18.323....\end{array}\right.$$

für x', y' und z' in den Ausdruck für λ substituirt, so erhält man im ersten Falle $\lambda=5.64....$ und im zweiten Falle $\lambda=5.63....$, also nahezu übereinstimmend. Bei der nicht unbedeutenden Grösse des Coeffizienten B und C kann eine grössere Genauigkeit für beide Perpendikel nur erreicht werden, wenn die Coordinaten x', y', z' von vorneherein auf eine viel grössere Anzahl Decimalstellen, als hier geschehen, berechnet werden.

Für die zweite Doppelpyramide hat man für x', y', z' in dem Ausdruck für λ die Werthe:

$$\left\{\begin{array}{l}1.6178....\\7.0652....\\9.813....\end{array}\right. \quad \text{und} \quad \left\{\begin{array}{l}3.2686....\\14.4266....\\18.087 ....\end{array}\right.$$

und man erhält dadurch:

$$\lambda=5.599.... \quad \text{und} \quad \lambda=5.598....$$

Unter den pag. 269. gefundenen vier Werthen für den zu bestimmenden Punkt hat der Ingenieur nun denjenigen zu wählen, welcher nach Maassgabe anderweitig festgestellter Merkmale als derjenige von ihm anerkannt ist, welcher in Bezug auf die drei festen Punkte die richtige Lage hat.

Bei dem vorliegenden Beispiel ist leicht nachzuweisen, welcher Punkt genommen werden muss, weil bei beiden Auflösungen ad II. und ad III. die Daten für einen und denselben Punkt gegeben sind.

Man hat demnach nur nöthig die beiden gefundenen Werthe für den zu bestimmenden Punkt, wie solche sich aus der Auflösung ad II. (pag. 245.) ergeben, nämlich:

$x = \mathbf{1.225}\ldots$ und -8.8172,

$y = \mathbf{6.8921}\ldots$ „ -2.7529,

$z = \mathbf{10.0000}\ldots$ „ $+5.5258$,

mit den vier Werthen zu vergleichen, welche sich aus der Auflösung ad III. (pag. 269.) ergeben, nemlich:

$x = \mathbf{1.227}\ldots$	$2.892\ldots$	$1.6178\ldots$	$3.2686\ldots$
$y = \mathbf{6.892}\ldots$	$14.299\ldots$	$7.0652\ldots$	$14.4266\ldots$
$z = \mathbf{9.998}\ldots$	$18.323\ldots$	$9.813\ldots$	$18.087\ldots$

um zu erkennen, dass die jedesmaligen ersten mit grösseren Ziffern gedruckten Werthe diejenigen sind, durch welche der gesuchte Punkt festgestellt wird.

Schlussfolgerungen.

Was nun die Anwendung dieser Auflösungsmethoden in der Praxis anbelangt, so ist es allerdings recht hübsch, durch blosse Winkelmessung einen Punkt im Raum mit Hülfe dreier anderer bestimmen zu können, ohne dass man ihn zu verlassen nöthig hat; allein, wenn eine grosse Schärfe erfordert wird, so bleibt die Sache immer etwas misslich.

Wenn man frei zu wählen hat, so dürfte sich die Methode ad Auflösung II. noch am besten eignen; denn man erhält hier durch die Rechnung zwar allerdings auch noch vier Werthe, unter welchen man entscheiden muss, allein man erhält doch direkt die Coordinaten des gesuchten Punktes, während man bei der Auflösung ad III. erst die Längen der Pyramidenkanten bestimmen muss, und aus diesen dann erst die Coordinaten des Scheitels. — Ganz abgesehen von der Weitläufigkeit, dass man bei dieser letzteren Auflösung im Allgemeinen mit acht Punkten, welche der Aufgabe Genüge thun, zu schaffen hat, so ist es eben

sehr schwer, die Schlussgleichung (22) pag. 266. so genau zu bestimmen, dass die vier Doppelwerthe für die Kantenlänge a sich richtig genug ergeben. Man muss zu diesem Zwecke gleich von vorne herein mit sehr vielen Decimalstellen zu rechnen anfangen, und da die gewöhnlichen siebenstelligen Logarithmen oft nicht ausreichend sind, so wird die Rechnung sehr mühsam und zeitraubend.

Bei aller Sorgfalt habe ich es nicht erreichen können, dass die Gleichung (22) genau genug ausgefallen ist, denn wenn solches gewesen wäre, so hätten die Wurzeln anders ausfallen müssen.

Bei den Daten, wie ich sie angenommen habe, hätte die Gleichung (22) so ausfallen müssen, dass $v' = 245.00166741....$ geworden wäre, während sich aus der Gleichung $v' = 245.055....$ ergab. Wenn ich den Werth $v' = a^2 = 245.00166741$ hätte einführen können, so würde $a = \pm 15.6525$ ausgefallen sein, während bei $v' = a^2 = 245.055.... a = \pm 15.6542$ geworden ist.

Dieser Unterschied, wenn auch erst in der dritten Decimale, hat sofort Einfluss auf b und c, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man zuerst b und c und a berechnet und dann c und b oder b und c. Man wird verschiedene Werthe für b und c erhalten, wie es eben auch nicht anders möglich ist, sobald a nicht ganz genau genommen wird.

Wenn aber a, b und c nicht genau sind, so sind es ihre zweiten Potenzen noch viel weniger, und da solche bei der Berechnung der Scheitel-Coordinaten erforderlich sind, so können letztere eben auch nicht ganz nach Wunsch ausfallen. Wenn ich den genaueren Werth von v' hätte in Rechnung bringen können, so würde ich die Scheitel-Coordinaten ganz übereinstimmend mit der Auflösung ad II. (pag. 245.) gefunden haben, nämlich:

$$\begin{cases} x = 1.225 \\ y = 6.8921 \\ z = 10.0000 \end{cases} \quad \text{während sie jetzt sind:} \quad \begin{cases} x = 1.227.... \\ y = 6.892.... \\ z = 9.998.... \end{cases}$$

Was endlich die Entscheidung betrifft, welcher von den vier, resp. acht gefundenen Punkten genommen werden muss, so dürfte dieselbe in manchen Fällen schwierig ausfallen. Der Beobachter kann wohl leicht erkennen, ob der zu bestimmende Punkt über oder unter der Fläche der drei festen Punkte liegt, aber, wenn mehre der gefundenen Punkte ganz nahe zusammenfallen, wie es z. B. bei der Auflösung ad III. der Fall ist,

so sind schon sehr sorgfältige Nebenbestimmungen zur Erkennung des richtigen Punktes nothwendig.

Es wird vorausgesetzt, dass dem Beobachter immer nur Eins der im Eingange erwähnten Instrumente zu Gebote steht, und derselbe also entweder Horizontalwinkel, oder Höhenwinkel, oder sogenannte schiefe Winkel messen kann; wäre die Aufgabe so gestellt, dass der vierte Punkte, ohne denselben verlassen zu dürfen, überhaupt durch Winkelmessung bestimmt werden sollte, und es ständen dem Beobachter beliebige Winkelmessinstrumente zu Dienst, so wäre in solchem Falle die Sache sehr einfach. Man würde dann zunächst mit Hülfe der gewöhnlichen Pothenot'schen Aufgabe nach Messung der Horizontalwinkel die Horizontallängen berechnen und hierauf eine oder zwei Elevationen messen.

Schliesslich habe ich noch anzuführen, dass bei der Auflösung ad II. von den drei festen Punkten nothwendig zwei nicht in gleicher Höhe mit dem Beobachter liegen dürfen, weil es sich sonst um den Durchschnitt eines Kegels mit zwei Ebenen handeln würde und dadurch die Auflösung unbestimmt bliebe.

XXIV.

Bemerkungen über Lagrange's analytische Mechanik.

Von

Herrn Doctor *Heinrich Bley* *)

zu Bernburg.

Die analytische Mechanik Lagrange's ist ein anerkanntes Meisterwerk. Sowohl durch das, was der berühmte Verfasser den wissenschaftlichen Erkenntnissen hinzugefügt hat, als durch die Art, wie er es mit dem bereits Vorhandenen zu einem wohl gegliederten Ganzen verbunden hat, nicht minder endlich durch die klare, ruhige Logik seiner Darstellung, wird die analytische Mechanik für alle Zeiten eine Zierde der mathematischen Literatur bleiben.

Dennoch finden sich auch in diesem Werke manche Fehler und Nachlässigkeiten, wie schon die Noten, welche der von mir benutzten Ausgabe beigefügt sind, beweisen. Ausser demjenigen, was hierin besprochen worden ist, habe ich aber bei einem sorgfältigen Studium der analytischen Mechanik noch manche Stellen gefunden, welche Unrichtigkeiten enthalten, manche andere, zu denen eine Erläuterung mir nicht überflüssig schien; und ich habe geglaubt, meine Bemerkungen um so mehr mittheilen zu dürfen, als es zu wünschen ist, dass das Studium des ausgezeichneten Werkes immer häufiger werde.

Ich habe die von Bertrand besorgte Ausgabe der analytischen Mechanik des Lagrange benutzt, welche unter dem Titel:

*) Der Herr Verfasser dieser schon seit geraumer Zeit in meinen Händen befindlichen Bemerkungen über eins der wichtigsten und schönsten mathematischen Werke hat leider den Abdruck derselben nicht mehr erlebt, was für mich um so mehr Antrieb und Herzensbedürfniss gewesen ist, mein gegebenes Versprechen, den Aufsatz in das Archiv aufzunehmen, so bald als es irgend die Umstände gestatteten, zu erfüllen. Die Wichtigkeit des betreffenden berühmten Werks rechtfertigt jedenfalls die Aufnahme vollkommen. In wie weit alle Bemerkungen des Herrn Verfassers richtig und wohl begründet sind, muss natürlich hier dahin gestellt bleiben. Jedenfalls werden sie zu weiterem sorgfältigen Nachdenken anregen. G.

Mécanique analytique, par J. L. Lagrange. Troisième édition, revue, corrigée et annotée par M. J. Bertrand in den Jahren 1853–55 in zwei Quartbänden bei Mallet-Bachelier in Paris erschienen ist. Sie enthält, ausser kürzeren, unmittelbar unter den Text gedruckten Anmerkungen Bertrand's, ausführlichere Noten von Poinsot, Lejeune-Dirichlet, Bertrand, Puiseux, Serret, Ossian Bonnet, Bravais und von Lagrange selbst, welche hinter dem Texte folgen. Die unter dem Texte befindlichen Noten Bertrand's sind meistens recht zweckmässig und zeugen von einer grossen Belesenheit; doch habe ich bisweilen seine Ansichten nicht theilen können, wie sich aus meinen Bemerkungen ergiebt.

Meine Bemerkungen folgen dem Texte von Paragraph zu Paragraph, und da die Paragraphen niemals sehr lang sind, so wird es leicht sein, die specielle Stelle, auf welche sie sich beziehen, aufzufinden. Sie erstrecken sich auch auf die längeren, hinten angehängten Noten verschiedener Gelehrten. Meine Bemerkungen über diese habe ich zwischen die auf den Text bezüglichen Bemerkungen dahin gestellt, wo sich diese Noten dem Texte anschliessen. In Bezug auf die Benennung der Abtheilungen Lagrange's habe ich noch zu bemerken, dass ich, der bei uns gebräuchlichen Terminologie folgend, das, was Lagrange „Article" nennt, mit „§." bezeichnet habe; das, was Lagrange mit „§." bezeichnet, könnte man durch „Abtheilung" übersetzen.

Analytische Mechanik.

Erster Theil.

Die Statik.

Erster Abschnitt.

§. 2. Am Ende des zweiten Absatzes ist offenbar eine Zeile ausgelassen. Es heisst dort: Donc la charge que supporte le point d'appui du levier qui fait la base du triangle, et qui est chargé à ses deux extrémités de poids égaux, sera égale au poids double du sommet, et, par conséquent, égale à la somme des deux poids. statt: Donc la charge que supporte le point d'appui du levier qui fait la base du triangle, et qui est chargé à ses deux extrémités de poids égaux, sera égale au poids du sommet, et la charge que supporte le levier transversal sera égale au poids double du sommet, et, par conséquent, égale à la somme des poids.

Der Beweis des Satzes wird übrigens durchaus nicht geführt.

§. 3. Wenn der gerade und horizontale Hebel AB (Taf. IX. Fig. 18.) in C unterstützt ist und zugleich eine Last trägt, und man denkt sich einen zweiten Hebel von gleicher Beschaffenheit und Länge mit dem ersten so verbunden, dass der Unterstützungspunkt A des zweiten mit dem einen Ende des ersten Hebels zusammenfällt, und nimmt an, dass der zweite Hebel an seinen beiden Enden gleiche Lasten trägt, so kann man die Combination als einen geraden, einarmigen Hebel betrachten, dessen Unterstützungspunkt in C ist, und welcher in A und E, also in einfacher und doppelter Entfernung von C, eine doppelte und eine einfache Last trägt, welche aber in entgegengesetzten Richtungen wirken (indem man statt des Unterstützungspunktes A eine der Summe der in C und E auf den Hebel EC wirkenden Lasten gleiche, aber entgegengesetzte Kraft annimmt).

Denkt man sich ferner den zweiten Hebel von ungleicher Länge mit dem ersten, z. B. $\frac{4}{3}$mal so lang als den ersten, und alles Uebrige, wie vorher, so erhält man einen geraden, zweiarmigen Hebel FB (Taf. IX. Fig. 19.), welcher in C unterstützt ist, und in D und F, also in einfacher und siebenfacher Entfernung vom Unterstützungspunkte, gleiche Lasten trägt, wozu aber noch die doppelte, aufwärts wirkende Kraft in A, also in dreifacher Entfernung von C, gerechnet werden muss. Bezeichnen wir die in F und D wirkenden Kräfte (Momente) mit 7 und 1, so ist die in A wirkende Kraft (Moment) $=6$, und da sie der Kraft in F entgegenwirkt, so bleibt auf beiden Seiten des Unterstützungspunktes C die Kraft 1, und es ist also Gleichgewicht.

Der horizontale Hebel wird also im Gleichgewicht sein, wenn die einander entgegenwirkenden Kräfte (in einem speciellen Falle die Lasten zu beiden Seiten des Unterstützungspunktes) im umgekehrten Verhältnisse ihrer Entfernungen vom Unterstützungspunkte stehen.

§. 5. Der Beweis von Stevin für den Satz, dass die Kraft auf der schiefen Ebene sich zur Last wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge verhalte, genügt nicht: denn eine immerwährende Bewegung der Kette ist keineswegs unmöglich, wenn man die Hindernisse der Bewegung hinwegdenkt.

§. 9. Die Bemerkung Bertrand's zu diesem Paragraphen, in welcher er behauptet: zwei Kräfte, welche nicht in derselben Ebene sind, haben keine Resultirende, ist deshalb unzulässig, weil hier nur von Kräften die Rede sein kann, welche denselben Angriffspunkt haben.

§. 12. Das Varignon'sche Theorem ist nicht ganz richtig

angegeben. Es heisst nämlich, dass, wenn man von irgend einem Punkte in der Ebene eines Parallelogramms Senkrechte auf die Diagonale und die beiden Seiten, welche die Diagonale einschliessen, fällt, das Produkt der Diagonale in ihre Senkrechte gleich ist der Summe oder Differenz der Produkte der beiden Seiten in die entsprechenden Perpendikel, je nachdem der Punkt ausserhalb oder innerhalb des Parallelogramms liegt, statt: je nachdem der Punkt ausserhalb oder innerhalb der beiden Seiten liegt, welche die Diagonale einschliessen, wie es in der Anwendung des Theorems auf die Mechanik richtig heisst.

§. 16. In Bezug auf das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist noch zu bemerken, dass die sich Gleichgewicht haltenden Kräfte einander entgegen wirken müssen.

§. 17. In dem hier gegebenen Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten wird gewöhnlich das System von Körpern oder Punkten als in einem Punkte oder an einer Axe befestigt gedacht, und die Kräfte wirken auf entgegengesetzten Seiten des Ruhepunkts oder der Axe einander entgegen.

§. 18. Man kann sich allerdings vorstellen, dass das Gleichgewicht des Gewichtes am Flaschenzuge durch ein Hinderniss hervorgerufen werde, welches bewirkt, dass trotz einer versuchten unendlich kleinen Verschiebung des beweglichen Systems das Gewicht nicht sinkt. Indem Bertrand dieser Vorstellungsweise das Beispiel eines auf dem höchsten Punkte einer Curve ruhenden schweren Punktes entgegensetzt, führt er nur eben ein Analogon an: die geringste Verschiebung würde denselben fallen machen, und doch fällt er nicht, eben wegen des Hindernisses, in welchem das Wesen des Gleichgewichtes besteht. Lagrange's Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ist vollkommen streng. Denn es kann entweder, während die Punkte des Systems eine unendlich kleine Verschiebung erleiden, das Gewicht dennoch in Ruhe bleiben, weil es wegen seiner Lage nicht mehr sinken kann; dieser Vorstellungsweise setzt Bertrand das Beispiel eines auf dem höchsten Punkte einer Curve ruhenden schweren Punktes entgegen; oder es kann das Gewicht in Ruhe bleiben, weil eine unendlich kleine Verschiebung der Punkte des Systems unmöglich ist.

Zweiter Abschnitt.

§. 1. Für das Gleichgewicht dreier Kräfte P, Q, R wird man haben, wenn ξ, ψ, φ u. s. w. die unabhängigen Variablen sind, als deren Functionen p, q, r gedacht werden können:

$$P\frac{\partial p}{\partial \xi} + Q'\frac{\partial q}{\partial \xi} = 0 \quad \text{und} \quad Q''\frac{\partial q}{\partial \xi} + R\frac{\partial r}{\partial \xi} = 0,$$

folglich:

$$P\frac{\partial p}{\partial \xi} + Q\frac{\partial q}{\partial \xi} + R\frac{\partial r}{\partial \xi} = 0;$$

ebenso:

$$P\frac{\partial p}{\partial \psi} + Q\frac{\partial q}{\partial \psi} + R\frac{\partial r}{\partial \psi} = 0,$$

$$P\frac{\partial p}{\partial \varphi} + Q\frac{\partial q}{\partial \varphi} + R\frac{\partial r}{\partial \varphi} = 0,$$

. . . . . .

mithin:

$$P\partial p + Q\partial q + R\partial r = 0.$$

Ebenso verfährt man, um das Gleichgewicht von vier und mehreren Kräften analytisch auszudrücken.

§. 7. Damit die Formeln dieses Paragraphen vollkommen richtig sind, muss man annehmen, dass die Centra, nach welchen die Kräfte P, Q, R u. s. w. streben, dem Anfangspunkte der Coordinaten näher liegen, als ihre Angriffspunkte.

§. 8. $\partial p = 0$ wird die Differentialgleichung einer Fläche sein, auf welcher die Richtung der Kraft P senkrecht steht, indem man sich den Angriffspunkt von P in einem beliebigen Punkte der Fläche denkt. Ist also der Mittelpunkt der Kraft P constant, so muss die Fläche nothwendig eine Kugelfläche um denselben bilden; bei einer ebenen Fläche wird sich der Mittelpunkt stetig mit dem Angriffspunkte verändern.

Lagrange behandelt nur den Fall, wo a, b, c constant sind, wo also die Fläche, deren Gleichung $A\partial x + B\partial y + C\partial z = 0$ ist, eine Kugelfläche ist. Sind dagegen die Coordinaten des Mittelpunktes der Kraft veränderlich, während die Gleichung der auf p senkrecht stehenden Fläche sich nicht ändert, so hat man die Gleichungen:

$$A\partial x + B\partial y + C\partial z = 0$$

und

$$\frac{x - x'}{p}(\partial x - \partial x') + \frac{y - y'}{p}(\partial y - \partial y') + \frac{z - z'}{p}(\partial z - \partial z') = 0,$$

folglich:

$$(Ap + x' - x)\partial x + (Bp + y' - y)\partial y + (Cp + z' - z)\partial z$$
$$= (x' - x)\partial x' + (y' - y)\partial y' + (z' - z)\partial z'.$$

Nimmt man nun an, was oft erlaubt ist, dass sich verhalte:

$$x'-x:y'-y:z'-z=Ap+x'-x:Bp+y'-y:Cp+z'-z,$$

so ist:

$$\partial p=\frac{(Ap+x'-x)(\partial x'-\partial x)+(Bp+y'-y)(\partial y'-\partial y)+(Cp+z'-z)(\partial z'-\partial z)}{\sqrt{(Ap+x'-x)^2+(Bp+y'-y)^2+(Cp+z'-z)^2}}.$$

Gelten obige Proportionen nicht, so lässt sich die Gleichung

$$\partial p=\frac{x-x'}{p}(\partial x-\partial x')+\frac{y-y'}{p}(\partial y-\partial y')+\frac{z-z'}{p}(\partial z-\partial z')$$

nicht weiter umändern. Jedoch hat man:

$$\partial p=A\partial x+B\partial y+C\partial z.$$

Es ist übrigens zu bemerken, dass die Flächen, auf welchen die Kräfte P, Q, R u. s. w. senkrecht stehen, von beliebiger Beschaffenheit sind, und keineswegs mit dem System der Angriffspunkte von P, Q, R u. s. w. zusammenzufallen brauchen.

§. 9. Es scheint mir, als ob Bertrand sich hier im Irrthum befände, indem Lagrange mit $P\partial p$ nicht eine Summe von virtuellen Momenten, sondern nur das Moment einer Kraft bezeichnen will. Es ist in der That gar kein Grund für die gezwungene Bertrand'sche Auffassung dieses Paragraphen vorhanden. Wenn p, q u. s. w. hier als Functionen der Coordinaten angesehen werden, so ist damit noch keineswegs gesagt, dass sie auch Differentiale der Coordinaten enthalten.

§. 14. Lagrange sagt mit Bezug auf die beiden Systeme von Kräften P, Q, R u. s. w., und P', Q', R' u. s. w., zwei Systeme von Kräften können nur auf eine Art völlig äquivalent sein, weil die Bewegung eines Körpers immer bestimmt und eine einzige sei. Denn die beiden äquivalenten Systeme von Kräften P, Q, R u. s. w. und P', Q', R' u. s. w. rufen hier ein und dieselbe Bewegung, nicht aber Gleichgewicht hervor, wie Bertrand in seiner unpassenden Note annimmt.

§. 15. Am Ende des ersten Absatzes muss es heissen: et réciproquement, lorsque deux systèmes de forces sont équivalents, et peuvent être substitués l'un à l'autre dans le même système de corps, la somme des moments des forces de l'un de ces systèmes est toujours égale à la somme des moments des forces de l'autre. statt: et réciproquement, lorsque la somme des moments des forces d'un système est toujours égale à la somme des moments des forces d'un autre système, ces deux systèmes

de forces sont équivalents, et peuvent être substitués l'un à l'autre dans le même système de corps.

Bertrand hätte in seiner Note zu diesem Paragraphen noch anführen sollen, dass die Linien ξ, ψ, φ sich rechtwinklig durchschneiden müssen, wenn Ξ, Ψ, Φ die angegebenen Werthe haben. Vergl. Poinsot's Note (Nro. I.).

Dritter Abschnitt.

§. 5. Lagrange's Annahme, dass man die Centra der Kräfte P, P' u. s. w. in einen beliebigen Punkt ihrer Richtung verlegen könne, wodurch $p=P$ wird, lässt sich nicht rechtfertigen. Auch vereinfacht sie die Formeln nur vorübergehend, da sie gleich darauf wieder aufgehoben wird.

Es ist leicht einzusehen, dass die ganze Betrachtung dieses Paragraphen, in welchem angenommen wird, dass ein System von Punkten sich um eine ausserhalb desselben befindliche Axe drehe, sich auch auf den Fall übertragen lässt, wo ein beliebiger Punkt des Systems selbst in die Axe gelegt und zum Anfangspunkt der Coordinaten gemacht wird.

§. 8. Es ist in der That sonderbar, dass Bertrand behauptet, die drei Rotationen um die Axen der x, y, z könnten nicht gleichzeitig, sondern nur nach einander stattfinden. Nur durch Zusammensetzung der gleichzeitigen Rotationen um diese drei Axen lässt sich eine Rotation um eine zwischen ihnen liegende Axe darstellen.

§. 10. Die hier aufgestellten sechs Bedingungsgleichungen sind nicht absolut nothwendig, aber sie sind die einfachsten, welche der Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$$

genügen. Lagrange betrachtet mit Unrecht den Werth von $x^2+y^2+z^2$ als mit $x'^2+y'^2+z'^2$ identisch: beide Grössen sind nur gleich.

§. 17. Die Zusammensetzung der Momente der Rotationsbewegung folgt denselben Regeln, als die Zusammensetzung der geradlinigen Bewegungen, doch nur unter der Bedingung, dass die Momente den Rotationswinkeln proportional sind.

§. 19. Legt man durch den Schwerpunkt eines Systems eine Verticalebene, und nimmt auf beiden Seiten derselben zwei Kräfte

P und P' (Taf. IX. Fig. 20.) an, die sich Gleichgewicht halten, so hat man, wenn a und b ihre Entfernungen vom Schwerpunkte sind:

$$aP = bP'.$$

Ist nun der Abstand einer zweiten Verticalebene von der durch den Schwerpunkt gehenden c, so ist

$$(a+c)P-(b-c)P' = c(P+P').$$

Nimmt man eine schief liegende Ebene durch den Schwerpunkt an, die z. B. mit der Verticalebene den Winkel α macht, so sind die beiden gleichen Producte in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt gelegte Ebene:

$$a\cos\alpha . P = b\cos\alpha . P',$$

und es wird:

$$(a+c)\cos\alpha . P-(b-c)\cos\alpha . P' = c\cos\alpha . (P+P').$$

Was für zwei Kräfte gilt, wird für jede beliebige Zahl gelten, da man sich diese stets auf zwei reducirt denken kann, die sich Gleichgewicht halten.

§. 21. Denkt man sich eine Horizontalebene durch den Schwerpunkt des Systems gelegt und eine damit parallele Ebene durch den Mittelpunkt der Erde, und versteht unter p, q, r u. s. w. die Entfernungen der einzelnen schweren Punkte von dieser letzteren Ebene, so ist $\Pi =$ der Summe der Producte der schweren Punkte in ihre Entfernungen von dieser Ebene, und $\frac{\Pi}{P+Q+R+\ldots} =$ dem Abstande beider Horizontalebenen oder des Schwerpunktes des Systems vom Erdmittelpunkte.

§. 22. Π ist meistentheils ein Minimum oder ein Maximum, wenn das System sich im Gleichgewichte befindet, aber nicht immer; wenn dagegen Π ein Minimum oder ein Maximum ist, so befindet sich das System nothwendig im Gleichgewichte. Vergl. §. 21. Daher ist das System in der Lage des Gleichgewichts, wenn die lebendige Kraft desselben ein Maximum oder ein Minimum ist; aber der umgekehrte Satz gilt nicht immer.

§. 26. Die Kräfte P, Q, R u. s. w. werden hier von Lagrange offenbar mit Recht als constant angenommen, da sie von der Anzahl der Seile abhängen. p, q, r u. s. w. bezeichnen die mittlere Länge der Seile zwischen je zwei Flaschen, also auch hier die Entfernungen der Angriffspunkte der Kräfte von den Centren; und $\Pi = Pp + Qq + Rr + \ldots$ hat denselben Werth wie am Schlusse des §. 21.

§. 27. Offenbar liegt ein Fehler dieses Beweises darin, dass Lagrange einseitig nur die Wirkung des Gewichtes in Betracht zieht, und nicht die des Systems der festen Punkte, von welchen genau dasselbe gilt, wie von dem Gewichte, nur dass die Wirkung gerade entgegengesetzt ist, so dass beide Kräfte sich stets aufheben müssen, und nur die Trägheit wirken kann.

Vierter Abschnitt.

§. 2. Ist die Gleichung des Gleichgewichts

$$P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s = 0,$$

und man hat die Bedingungsgleichungen

$$\partial r + a = 0, \quad \partial s - b + c = 0;$$

so wird durch Elimination von ∂r und ∂s:

$$P\partial p + Q\partial q - aR + (b-c)S = 0,$$

also

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad -aR + (b-c)S = 0.$$

Nach der neuen Methode wird aber:

$$P\partial p + Q\partial q + (R+\lambda)\partial r + a\lambda + (S+\mu)\partial s + \mu(c-b) = 0,$$

also

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

$$R + \lambda = 0, \quad S + \mu = 0,$$

$$a\lambda + \mu(c-b) = 0, \quad \lambda = -R, \quad \mu = -S;$$

woraus folgt:

$$a\lambda + \mu(c-b) = -aR + (b-c)S = 0.$$

§. 10. Die Erklärung, welche Lagrange hier giebt, um die mit ∂ bezeichneten Differentiale von den mit δ bezeichneten Variationen zu unterscheiden, ist ungenügend und dunkel, zum Theil sogar fehlerhaft. Erstere bezeichnen die wirklichen Wege, welche die Punkte des Körpers zurücklegen, indem die Lage desselben unendlich wenig verändert wird, wobei es ausser der Lage eines Punktes auch auf die Aenderung ankommt, welche das Gesetz der Verbindung der Punkte während der Bewegung etwa erleidet. Letztere dagegen bezeichnen die Wege, welche die Punkte zurücklegen, indem die Lage des Körpers unendlich wenig verän-

dert wird, wenn die gegenseitige Verbindung der Punkte hiebei als unverändert angesehen wird, sei es, dass sie wirklich constant bleibt oder dass von einer Veränderung derselben abgesehen wird. Vergl. §. 33. des dritten Abschnitts des zweiten Theils. Dieser Unterschied ist jedoch erst für die Dynamik von Wichtigkeit, und deshalb auch hier von Lagrange noch nicht berücksichtigt. Es ist aber falsch, zu sagen, dass die mit δ bezeichneten Variationen von der gegenseitigen Lage der Punkte unabhängig sind.

Man bezeichnet mit ∂ auch Elemente von Linien und Massen, wie ∂x, ∂m. Diese betrachtet man besonders in der Geometrie, und auf sie bezieht sich hier Lagrange.

§. 16. Bertrand giebt richtig den Grund an, weshalb die unbestimmten Bedingungsgleichungen $L=0$, $M=0$,.... der Zahl nach nicht drei sein können. Hätte man deren drei bei nur drei unbestimmten Particulargleichungen des Gleichgewichts $\Xi=0$, $\Upsilon=0$, $\Psi=0$, so könnte man auch nur zwei der drei unbestimmten Coefficienten λ, μ, ν eliminiren, den dritten dagegen nur als Function von x, y, z und ihren Differentialen bestimmen.

§. 21. Man hat:

$$\Xi=\frac{1}{\partial x}(\partial U-\partial U)=0.$$

§. 22. Die hier für Ξ, Υ und Ψ gegebenen Werthe gehören vielmehr den Grössen $\Xi\partial x$, $\Upsilon\partial x$ und $\Psi\partial x$ an.

Wenn nur die Variable z von der Bedingungsgleichung $L=0$ abhängt, so ist L von y unabhängig, und man hat:

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial z}\delta z+\frac{\partial L}{\partial z'}\delta z'+....=\frac{1}{\partial x}\partial L\,\delta x+\frac{\partial L}{\partial z}\delta v+\frac{\partial L}{\partial z'}\frac{\partial.\delta v}{\partial x}+....,$$

$$\Upsilon=\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{\partial x}\partial.\frac{\partial U}{\partial y'}+\frac{1}{\partial x^2}\partial^2.\frac{\partial U}{\partial y''}-....$$

§. 23. Es ist

$$\delta.\int U\partial x$$

$$=\int(\Upsilon\delta y+\Psi\delta z+....)\partial x+(\Upsilon'\delta y+\Upsilon''\partial\delta y+....+\Psi'\delta z+\Psi''\partial\delta z+....)\partial x.$$

Will man wirklich, obgleich ∂x als constant angesehen wird, auf die Variation von x Rücksicht nehmen, so hat man, ausser der Veränderung, welche δy und δz erleiden, noch $\int\partial U\delta x$ zu dem Werthe von $\delta.\int U\partial x$ zu addiren.

§. 28. Sieht man bei der Lösung der mechanischen Probleme eine der Variablen hinsichtlich der Variationen nach δ als con-

stant an, so erhält man nur zwei Gleichungen, welche noch den unbestimmten Coefficienten λ in sich enthalten. Eliminirt man diesen, so bleibt nur eine Gleichung mit drei Variablen, also eine weniger als nöthig ist.

λ drückt übrigens nicht die Kraft aus, mit welcher das Element ∂m der Wirkung der Kräfte P, Q, R u. s. w. widersteht, sondern

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2},$$

und $\lambda\delta L$ ist das Moment dieser Kraft, welche senkrecht gegen eine Fläche wirkt, die durch die Gleichung $\delta L=0$ dargestellt wird.

§. 31. Lagrange sagt, es seien bisher nur Functionen unabhängiger Variablen betrachtet worden; es wurden aber vielmehr sämmtliche Variablen als von x abhängig angesehen.

§. 32. Ich finde folgende Werthe für $\delta z''$ und $\delta z_{''}$:

$$\delta z''=\frac{\partial^2(\delta z-z'\delta x-z_1\delta y)}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}-z''\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}-z_1'\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)\delta y,$$

$$\delta z_{''}=\frac{\partial^2(\delta z-z'\delta x-z_1\delta y)}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}-z_1'\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}-z_{''}\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}\right)\delta y.$$

§. 33. Man hat also für δU den Werth:

$$\delta U=\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z''}\left(\frac{\partial z''}{\partial x}-z''\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial U}{\partial z_1'}\frac{\partial z_1'}{\partial x}+\ldots\right)\delta x$$
$$+\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z''}\left(\frac{\partial z''}{\partial y}-z_1'\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial U}{\partial z_1'}\frac{\partial z_1'}{\partial y}+\ldots\right)\delta y$$
$$+\frac{\partial U}{\partial z}\delta u+\frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z_1}\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z''}\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2}+\frac{\partial U}{\partial z_1'}\frac{\partial^2\delta u}{\partial x\partial y}+\ldots.$$

§. 35. Setzt man in der Gleichung $\Psi=0$

$$U=\sqrt{1+z'^2+z_1^2},$$

so dass $SS\partial x\partial y\sqrt{1+z'^2+z_1^2}$ der Werth der kleinsten krummen Fläche ist, so hat man:

$$\Psi=0=\frac{\partial.\dfrac{z'\partial z'}{U}}{\partial x}+\frac{\partial.\dfrac{z_1\partial z_1}{U}}{\partial y};$$

folglich:

$$\frac{\partial z'^2}{\partial x}+z'\frac{\partial^2 z'}{\partial x}+z'^3\frac{\partial^2 z'}{\partial x}+z_1{}^2\frac{\partial z'^2}{\partial x}+z'z_1{}^2\frac{\partial^2 z'}{\partial x}+\frac{\partial z_1{}^2}{\partial y}+z_1\frac{\partial^2 z_1}{\partial y}+z_1{}^3\frac{\partial^2 z_1}{\partial y}$$
$$+z'^2\frac{\partial z_1{}^2}{\partial y}+z'^2z_1\frac{\partial^2 z_1}{\partial y}=z_1\partial z_1z'\frac{\partial z'}{\partial x}+z'\partial z'z_1\frac{\partial z_1}{\partial y}.$$

Man erhält also keine identische Gleichung.

§. 36. Es ist

$$\Psi=\lambda\frac{\partial U}{\partial z}-\lambda\left(\frac{\partial U'}{\partial x}\right)-U'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)-\lambda\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)-U_1\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)+\lambda\left(\frac{\partial^2 U''}{\partial x^2}\right)$$
$$+U''\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\right)+\lambda\left(\frac{\partial^2 U_1{}'}{\partial x\partial y}\right)+U_1{}'\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}\right)+\ldots.$$

Fünfter Abschnitt.

§. 3. Lagrange behauptet offenbar zu viel, indem er sagt, es sei gleichgültig, in welchen Punkt der Richtungen der Kräfte P, Q, R u. s. w. man die Centra der Kräfte verlege. Es wird es vielmehr nur für einen ganz speciellen Fall $P=p$, $Q=q$, $R=r$ u. s. w. sein.

§. 5. Da der Druck des Körpers auf die Fläche, deren Gleichung $L=0$ ist, offenbar durch $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ vorgestellt wird, so ist der Widerstand der Fläche:

$$-\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2},$$

was auch mit den Formeln des §. 5. des vorigen Abschnitts stimmt.

Note I., von Poinsot.

§. 1. Es ist sonderbar, dass Lagrange die Kräfte Ξ, Π, Σ und Ξ, Ψ, Φ in der ersten Ausgabe neben einander gebraucht.

§. 2. Poinsot sagt, die Formeln des §. 1. gelten nur, wenn ξ, π, σ.... die Entfernungen der Körper von fixen Centren oder von festen Ebenen vorstellen; aber aus §. 7. geht hervor, dass zwei von den Coordinaten auch Winkel oder Kreislinien sein können. Ferner müssen für die gegebenen Werthe von Ξ, Π, Σ die Coordinaten ξ, π, σ rechtwinklige sein.

§. 5. Wenn $\xi=\pi$ ist, so sind die beiden Resultirenden der Kräfte X und Y und der Kräfte Ξ und Π:

$$\sqrt{X^2+Y^2} \text{ und } \sqrt{\Xi^2-2\Xi\Pi\cos\alpha+\Pi^2},$$

und es verhalten sich ihre Werthe wie $1:\sin\alpha$.

§. 6. Poinsot nimmt an, man könne die Centra der gegebenen Kräfte P, Q, R,.... in einen beliebigen Punkt ihrer Richtung legen, und daher p, q, r.... willkührlich bestimmen, so dass man, wie immer die Function f beschaffen sein möge, welche man gewählt hat,

$$f'(p)=P,\ f'(q)=Q,\ f'(r)=R,....$$

oder

$$P:Q:R:.... = f'(p):f'(q):f'(r):....$$

machen könne. Vielmehr sind aber die Centra der gegebenen Kräfte P, Q, R,.... auch gegeben, also p, q, r,.... bestimmt; dagegen ist die Function f willkührlich, und kann so gewählt werden, dass man habe:

$$f'(p)=P,\ f'(q)=Q,\ f'(r)=R,....$$

oder

$$P:Q:R:.... = f'(p):f'(q):f'(r):....$$

Wenn z. B. $P=p^2$, $Q=q^3$, $R=r^4$, so kann man

$$f(p,q,r)=\frac{Pp}{3}+\frac{Qq}{4}+\frac{Rr}{5}=\frac{p^3}{3}+\frac{q^4}{4}+\frac{r^5}{5}=\text{const.}$$

setzen, und es ist:

$$f'(p)=p^2=P,\ f'(q)=q^3=Q,\ f'(r)=r^4=R.$$

§. 7. Indem Poinsot sagt, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten führe nicht so unmittelbar zu den Gleichungen des Gleichgewichts eines festen Systems, als das Princip der Zusammensetzung der Kräfte, da es die drei letzteren Gleichungen nur mittelst einer Coordinatenverwandlung gebe, so wendet sich seine Kritik nur gegen zwei der von Lagrange angewandten Methoden, nämlich gegen die in §. 8. und §. 10. des dritten Abschnitts erörterten.

§. 8. Die von Poinsot beschriebene Methode, um die wahren Werthe von Ξ', Π', Σ' zu gewinnen, ist nicht die von ihm befolgte, vielmehr setzt er:

$$P\partial p+Q\partial q+R\partial r+.... = \Xi'\delta\xi+\Pi'\delta\pi+\Sigma'\delta\sigma = \Xi\partial\xi+\Pi\partial\pi+\Sigma\partial\sigma,$$

bestimmt die Werthe von $\delta\xi$, $\delta\pi$, $\delta\sigma$ in $\partial\xi$, $\partial\pi$, $\partial\sigma$, und vereinigt alle Glieder mit $\partial\xi$, mit $\partial\pi$ und mit $\partial\sigma$.

§. 9. Der Werth von Σ' ist:

$$\Sigma' = \frac{\Sigma(1-\lambda^2) + \Xi(\lambda\nu - \mu) + \Pi(\lambda\mu - \nu)}{1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\lambda\mu\nu}.$$

§. 10. Die Gleichungen

$$\Xi = 0, \quad \Pi = 0, \quad \Sigma = 0$$

bedingen die Gleichungen

$$\Xi' = 0, \quad \Pi' = 0, \quad \Sigma' = 0,$$

aber nicht umgekehrt.

Es werden also, wenn $P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots = 0$ ist, die Gleichungen $\Xi=0$, $\Pi=0$, $\Sigma=0$ stets möglich, wenn auch nicht nothwendig sein.

---

§. 10. In der Formel $m = \frac{4\pi}{3} S\Gamma\partial.\alpha^3$ muss man α als veränderlich von 0 bis α ansehen.

Jedes Glied der durch Entwickelung des Radicals

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2by-2cz+b^2+c^2}}$$

nach den Potenzen von b und c erhaltenen Grösse hat die Form

$$Hb^{2m}c^{2n}$$

und verwandelt sich in:

$$\frac{(1.3.5\ldots.2m-1)\,(1.3.5\ldots.2n-1)\,H(B^2-A^2)^m(C^2-A^2)^n}{5.7.9\ldots.2m+2n+3}.$$

Der bei Lagrange noch vorhandene Factor m ist offenbar überflüssig.

Ferner weichen die von mir berechneten Werthe von R, T, V, X, Y, Z.... etwas ab von denen des Textes. Ich finde:

$$R = \frac{1}{r} - \frac{e^2+i^2}{2.5r^3} + \frac{9(e^4+i^4)-6e^2i^2}{8.5.7r^5} - \ldots., \quad T = \frac{3e^2}{2.5r^5} - \frac{3e^4+3e^2i^2}{2.10r^7} + \ldots.,$$

$$U = \frac{3i^2}{2.5r^5} - \frac{3i^4+3e^2i^2}{2.10r^7} + \ldots., \quad X = \frac{3e^4}{8r^9} - \ldots.,$$

$$Y = \frac{3e^2i^2}{4r^9} - \ldots., \quad Z = \frac{3i^4}{8r^9} - \ldots.$$

Diejenige Componente der Attraction des Sphäroides, welche durch das partielle Differential

$$\frac{\partial \Sigma}{r \sin \mu \partial \nu}$$

ausgedrückt wird, steht senkrecht auf $r \sin \mu$, aber nicht auf dem Radius r.

§. 12. Da f und g constant, also auch keiner Verminderung fähig sind, so denkt man sich am besten die drei Körper an den Endpunkten und an dem Drehungspunkte eines messingenen, zweiarmigen Winkelhebels befestigt, dessen Arme leicht drehbar sind.

§. 16. Differenzürt man f nur nach x', y', z', so erhält man:

$$\partial f = \frac{(x'-x'')\partial x' + (y'-y'')\partial y' + (z'-z'')\partial z'}{\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}} = 0,$$

und nimmt man x'', y'', z'' als die Coordinaten des Mittelpunkts der Kugel, der zugleich Anfangspunkt der Coordinaten ist, an, und x', y', z' als die Coordinaten eines beliebigen Punkts der Oberfläche, so wird:

$$\partial f = \frac{x'\partial x' + y'\partial y' + z'\partial z'}{f} = 0.$$

Die Gleichung der Kugel aus dem Mittelpunkte ist aber

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

welche durch Differentiation giebt:

$$0 = x\partial x + y\partial y + z\partial z,$$

wie oben.

§. 18. Obgleich die Formeln für F, G u. s. w. ganz dieselben, als für λ, μ u. s. w. in §. 12. sind, so sind doch die absoluten Werthe beider Arten von Grössen nur in dem Falle identisch, wenn durch die äusseren Kräfte X', Y', Z', X'' u. s. w. keine wirkliche Ausdehnung der Theile des extensiblen Fadens stattgefunden hat. Sobald aber die Länge von f, g u. s. w. zugenommen hat, so sind auch die Werthe der Veränderlichen x', y', z', x'' u. s. w. andere geworden, als in §. 12., und die absoluten Werthe von F, G u. s. w. folglich von denen von λ, μ u. s. w. verschieden.

§. 21. Die ersten drei Gleichungen dieses Paragraphen zeigen, dass die Translationsbewegung des Systems Null ist, die letzten drei, dass die Rotationsbewegung desselben um den Anfangspunkt der Coordinaten Null ist. Da vermöge der Bedin-

gungsgleichungen auch die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich ist, so sind hiermit alle Bedingungen des Gleichgewichts erschöpft. Bemerkenswerth ist, dass hier und in §. 23., §. 24. die drei verschiedenen Arten der Bewegung, welche ein System von Körpern überhaupt haben kann, und die in §. 1. des dritten Abschnitts aufgeführt sind, von einander gesondert zur Betrachtung kommen, indem jede ihre drei, respective sechs, besonderen Gleichungen des Gleichgewichts hat.

§. 25. Die Lage eines Punktes ist durch die Entfernungen desselben von drei anderen Punkten bestimmt, wenn diese nicht in einer Ebene liegen, in welchem Falle der Punkt zwei verschiedene Lagen haben kann. Liegen alle vier Punkte in einer Ebene, so ist die Lage des einen durch seine Entfernungen von den drei anderen bestimmt, wenn diese nicht in einer geraden Linie liegen, widrigenfalls zwei Lagen möglich sind. Hierauf muss bei der Bestimmung der Coordinaten x', y', z', x'' u. s. w. für den Fall des Gleichgewichts Rücksicht genommen werden. Man kann die Gleichungen, von welchen man bei der Lösung der Aufgabe ausgeht, stets so auswählen, dass jede Zweideutigkeit verschwindet, ohne eine grössere Zahl von Gleichungen zu bedürfen, als der Paragraph angiebt.

§. 26. Bertrand's Entwicklung der Bedeutung von $E\partial e$ ist sehr gesucht, und ausserdem fehlerhaft: denn $E\partial e$ kann nicht proportional mit ∂e sein, wenn E, wie es der Fall ist, Function von e und also veränderlich ist.

Nimmt man e als bekannt an, so wird, da man $-\frac{Eh}{fg\sin e}$ bestimmen kann, auch $E=\varphi(e)$ sich bestimmen lassen. Was Bertrand in seiner Note über die Unmöglichkeit, E direct zu bestimmen, sagt, ist also unbegründet.

§. 33. Zeile 8 bis 10 dieses Paragraphen muss es heissen: Ainsi, comme les trois premières équations intégrales de l'art. 30 donnent, pour le premier point du fil où les quantités affectées de f deviennent $=0$, statt: Ainsi, comme les trois premières équations intégrales de l'art. 30 donnent, pour le premier point du fil où les quantités affectées de f deviennent alors.

§. 35. Man erhält hier:

$$\lambda''\left(\frac{\partial x''}{\partial s''}+a''\frac{\partial z''}{\partial s''}\right)=0,\quad \lambda''\left(\frac{\partial y''}{\partial s''}+b''\frac{\partial z''}{\partial s''}\right)=0;$$

also entweder

$$\lambda''=0 \quad \text{oder} \quad \partial x''=-a''\partial z'',\quad \partial y''=-b''\partial z'';$$

woraus

$$a''^2 + b''^2 = -1$$

folgt, was unmöglich ist, wenn a'' und b'' reell sind; also:

$$\lambda'' = 0, \text{ und ebenso } \lambda' = 0,$$

so dass, wie in §. 33.,

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0;$$

$$SX\partial m = 0, \quad SY\partial m = 0, \quad SZ\partial m = 0.$$

§. 38. Um die Lage des Fadens auf der krummen Fläche, deren Gleichung

$$\partial z = p\partial x + q\partial y$$

ist, für den Zustand des Gleichgewichts zu bestimmen, muss man die Werthe von $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ und von $\partial x''$, $\partial y''$, $\partial z''$ aus den bestimmten und den unbestimmten Gleichungen ableiten. Nimmt man hierzu noch die Gleichungen der Curve des Fadens, so ist seine Lage so weit als möglich bestimmt.

§. 40. Der Druck, welchen jedes Element des Fadens auf die krumme Fläche ausübt, auf welcher er liegt, ist $\mu\sqrt{1+p^2+q^2}$. Also ist der Gesammtausdruck des Fadens auf die Unterlage $\frac{m\mu\sqrt{1+p^2+q^2}}{\partial m}$, vorausgesetzt, dass $\mu\sqrt{1+p^2+q^2}$ eine Constante ist.

§. 41. Gegen die Gleichung $\partial\lambda = 0$ ist zu erinnern, dass sie aus §. 30. abgeleitet ist, wo nur die Unausdehnsamkeit des Fadens als Bedingung vorausgesetzt wird, während sie sich aus §. 38., wo auch die zweite Bedingung, dass der Faden auf der krummen Fläche liegt, eingeführt ist, nicht ergiebt. In der That weiss man auch nur von einem freien oder auf einer Ebene ruhenden Faden, auf dessen Enden Kräfte spannend wirken, dass seine Spannung in allen Theilen gleich ist.

Aus $\delta s = 0$, was sich aus der Gleichung

$$\lambda S\delta\partial s + S\mu(\delta z - p\delta x - q\delta y) = 0$$

ergiebt, geht noch nicht mit Nothwendigkeit hervor, dass die Länge der Curve s des Fadens ein Maximum oder ein Minimum ist.

Wie sich aus dem Vorstehenden leicht ergiebt, sind die Resultate dieses Paragraphen nicht begründet.

§. 42. Auch hier, wie bei §. 18., ist zu bemerken, dass, ob-

gleich die algebraischen Ausdrücke von F und λ ganz dieselben sind, ihre absoluten Werthe doch nur dann übereinstimmen, wenn die Elemente ∂s der Curve des extensiblen Fadens keine wirkliche Ausdehnung erlitten haben. Dagegen entsprechen den algebraisch identischen Gleichungen der Curven des ausdehnsamen und des unausdehnsamen Fadens stets gleiche absolute Zahlwerthe, auch wenn die Elemente des ersteren ausgedehnt worden sind, weil die Verhältnisse von $\partial x : \partial y : \partial z$ unverändert geblieben sind, wie die Formeln des §. 30. zeigen. Beide Curven haben daher völlig gleiche Form.

§. 44. Wenn man

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{1}{U}\left(z'\frac{\partial \delta z}{\partial x} - z'^2\frac{\partial \delta x}{\partial x} + z_1\frac{\partial \delta z}{\partial y} - z_1{}^2\frac{\partial \delta y}{\partial y}\right)$$

(§. 32. des vierten Abschnitts) setzt, so erhält man ganz andere, minder einfache Gleichungen des Gleichgewichts und einen complicirteren Werth von F, aber dieselbe Gleichung der krummen Fläche, wie Lagrange, abgesehen von dem Werthe von F.

§. 45. Setzt man in der Gleichung der krummen Fläche $U=1$, so wird sie:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{\partial.(\Pi+a)\frac{\partial z}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial.(\Pi+a)\frac{\partial z}{\partial y}}{\partial y};$$

setzt man ferner $\Pi=-gz$ und vernachlässigt alle zweiten Potenzen von z, so geht sie über in:

$$g = -a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

§. 46. Da keine unendlich kleinen Grössen dritter Ordnung in dem Werthe von $\sin^2 e$ vorkommen, so hat man:

$$\sin^2 e = \frac{\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 - \partial^2 s^2}{\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 + 2\partial s \partial^2 s + \partial s^2},$$

$$e = \sqrt{\frac{\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 - \partial^2 s^2}{\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 + 2\partial s \partial^2 s + \partial s^2}}.$$

§. 47. Es ist

$$\delta e = \frac{(\partial s + \partial^2 s)^2(\partial^2 x \delta \partial^2 x + \partial^2 y \delta \partial^2 y + \partial^2 z \delta \partial^2 z)}{(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 - \partial^2 s^2)^{\frac{1}{2}}(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 + 2\partial s \partial^2 s + \partial s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man muss also setzen:

$$J = \frac{E(\partial s + \partial^2 s)^2}{(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 - \partial^2 s^2)^{\frac{1}{2}}(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 + 2\partial s \partial^2 s + \partial s^2)^{\frac{1}{2}}},$$

§. 48. Für obigen Werth von J wird:

$$\frac{E^2 \partial s^2 (\partial s + \partial^2 s)^4}{(\partial s^2 + 2\partial s \partial^2 s + \partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2)^3}$$

$$= [F + \int (A + \int X \partial m)\partial y - \int (B + \int Y \partial m)\partial x]^2$$
$$+ [G + \int (A + \int X \partial m)\partial z - \int (C + \int Z \partial m)\partial x]^2$$
$$+ [H + \int (B + \int Y \partial m)\partial z - \int (C + \int Z \partial m)\partial y]^2.$$

Wenn der elastische Faden eine Curve einfacher Krümmung bildet, für welchen Fall Lagrange's Behandlung des Problems ausreichend ist, so hat man:

$$f^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2,$$

$$g^2 = \partial s^2 + 2\partial s \partial^2 s + \partial^2 x^2 + \partial^2 y^2,$$

$$h^2 = 4\partial s^2 + 4\partial s \partial^2 s + \partial^2 x^2 + \partial^2 y^2;$$

$$J = \frac{E(\partial s + \partial^2 s)^2}{(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 - \partial^2 s^2)^{\frac{1}{2}}(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + 2\partial s \partial^2 s + \partial s^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Gleichung der Curve des Fadens ist:

$$J(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x) = F + \int (A + \int X \partial m)\partial y - \int (B + \int Y \partial m)\partial x.$$

§. 49. Man hat:

$$J = \frac{K(\partial s + \partial^2 s)^2}{\partial s (\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 + 2\partial s \partial^2 s + \partial s^2)^2},$$

also nicht constant. Deshalb bestimmt man λ am besten aus einer der drei durch die erste Integration erhaltenen Gleichungen des §. 48.:

$$\lambda = [A + \int X \partial m + \partial . (J \partial^2 x)] \frac{\partial s}{\partial x} = [B + \int Y \partial m + \partial . (J \partial^2 y)] \frac{\partial s}{\partial y}$$
$$= [C + \int Z \partial m + \partial . (J \partial^2 z)] \frac{\partial s}{\partial z}.$$

Lagrange setzt in seiner Lösung $\partial m = \Gamma \partial s$ und bestimmt Γ als die Dicke des Fadens, indem er stillschweigend dessen Dichtigkeit $= 1$ setzt.

§. 50. Die Integration der drei ersten Gleichungen dieses Paragraphen ist nur für den von Lagrange berechneten Werth von J möglich.

Wenn der elastische Streifen eine Curve einfacher Krümmung bildet, so wird die erste dieser Gleichungen:

$$K\frac{\partial\varphi}{\partial s} = F + A\int\sin\varphi\partial s - B\int\cos\varphi\partial s.$$

Ferner hat man:

$$\partial s = \frac{\partial\varphi\sqrt{K}}{\sqrt{2D - 2A\cos\varphi - 2B\sin\varphi}},$$

$$y = \frac{Bx - F}{A} + \frac{K}{A}\sqrt{2D - 2A\cos\varphi - 2B\sin\varphi}.$$

Für den von mir berechneten Werth von J ist eine weitere Integration der Gleichung

$$J\partial s^2\partial\varphi = F + A\int\sin\varphi\partial s - B\int\cos\varphi\partial s$$

unmöglich.

§. 52. In dem letzten Absatze dieses Paragraphen muss es heissen: Mais la tension du fil qui est exprimée par λ, lorsque le fil n'est pas élastique, ou par F, lorsqu'il est élastique (art. 43), etc. statt: Mais la tension du fil qui est exprimée par λ ou par F, lorsque le fil n'est pas élastique (art. 43), etc.

Weil ∂s in dem Werthe von δe veränderlich ist für den Fall der Ausdehnbarkeit des elastischen Fadens, so muss nach dem von mir berechneten Werthe von e zu dem Werthe von δe noch hinzugefügt werden:

$$-\frac{\partial^2 s\delta\partial^2 s}{\sqrt{(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2-\partial^2s^2)(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2 s+\partial s^2)}}$$

$$-\frac{e(\partial^2 s\delta\partial s+\partial s\delta\partial^2 s+\partial s\delta\partial s)}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2 s+\partial s^2}.$$

Zu dem Werthe von $SE\delta e$ sind also noch hinzuzufügen die Glieder:

$$-S\frac{E(e\partial^2 s+\partial s)}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2 s+\partial s^2}\delta\partial s - SE\Bigg(\frac{e\partial s}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2 s+\partial s^2}$$

$$+\frac{\partial^2 s}{\sqrt{(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2-\partial^2s^2)(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2 s+\partial s^2)}}\Bigg)\delta\partial^2 s.$$

Das letztere verwandelt sich in:

$$-\frac{E''e''\partial s''}{\partial^2x''^2+\partial^2y''^2+\partial^2z''^2+2\partial s''\partial^2s''+\partial s''^2}\partial\delta s''$$

$$-\frac{E''\partial^2s''}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(\partial^2x''^2+\partial^2y''^2+\partial^2z''^2-\partial^2s''^2)\\ \times(\partial^2x''^2+\partial^2y''^2+\partial^2z''^2+2\partial s''\partial^2s''+\partial s''^2)\end{array}\right\}}}\partial\delta s''$$

$$+\frac{E'e'\partial s'}{\partial^2x'^2+\partial^2y'^2+\partial^2z'^2+2\partial s'\partial^2s'+\partial s'^2}\partial\delta s'$$

$$+\frac{E'\partial^2s'}{\sqrt{(\partial^2x'^2+\partial^2y'^2+\partial^2z'^2-\partial^2s'^2)(\partial^2x'^2+\partial^2y'^2+\partial^2z'^2+2\partial s'\partial^2s'+\partial s'^2)}}\partial\delta s'$$

$$+S\partial.\frac{Ee\partial s}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2}\delta\partial s$$

$$+S\partial.\frac{E\partial^2s}{\sqrt{(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2-\partial^2s^2)(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2)}}\delta\partial s.$$

Also müssen zu dem Werthe von $SE\delta e$ hinzugefügt werden die Glieder:

$$-\frac{E''e''\partial s''}{\partial^2x''^2+\partial^2y''^2+\partial^2z''^2+2\partial s''\partial^2s''+\partial s''^2}\partial\delta s''$$

$$-\frac{E''\partial^2s''}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(\partial^2x''^2+\partial^2y''^2+\partial^2z''^2-\partial^2s''^2)\\ \times(\partial^2x''^2+\partial^2y''^2+\partial^2z''^2+2\partial s''\partial^2s''+\partial s''^2)\end{array}\right\}}}\partial\delta s''$$

$$+\frac{E'e'\partial s'}{\partial^2x'^2+\partial^2y'^2+\partial^2z'^2+2\partial s'\partial^2s'+\partial s'^2}\partial\delta s'$$

$$+\frac{E'\partial^2s'}{\sqrt{(\partial^2x'^2+\partial^2y'^2+\partial^2z'^2-\partial^2s'^2)(\partial^2x'^2+\partial^2y'^2+\partial^2z'^2+2\partial s'\partial^2s'+\partial s'^2)}}\partial\delta s'$$

$$-S\Bigg(\frac{E(e\partial^2s+\partial s)}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2}$$

$$-\partial.\frac{Ee\partial s}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2}$$

$$-\partial.\frac{E\partial^2s}{\sqrt{(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2-\partial^2s^2)(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2)}}\Bigg)\delta\partial s.$$

§. 54. In der Entwicklung der Gleichung dieses Paragraphen finden sich im Texte Druckfehler; sie wird:

$$
\begin{aligned}
0 = \; & S[X\partial m - \partial.(\lambda\partial x) + \partial^2.(\mu\partial^2 x) - \partial^3.(\nu\partial^3 x)]\delta x \\
& + S[Y\partial m - \partial.(\lambda\partial y) + \partial^2.(\mu\partial^2 y) - \partial^3.(\nu\partial^3 y)]\delta y \\
& + S[Z\partial m - \partial.(\lambda\partial z) + \partial^2.(\mu\partial^2 z) - \partial^3.(\nu\partial^3 z)]\delta z \\
& + [\lambda''\partial x'' - \partial.(\mu''\partial^2 x'') + \partial^2.(\nu''\partial^3 x'')]\delta x'' \\
& + [\mu''\partial^2 x'' - \partial.(\nu''\partial^3 x'')]\partial\delta x'' \\
& + \nu''\partial^3 x''\partial^2\delta x'' \\
& + [\lambda''\partial y'' - \partial.(\mu''\partial^2 y'') + \partial^2.(\nu''\partial^3 y'')]\delta y'' \\
& + [\mu''\partial^2 y'' - \partial.(\nu''\partial^3 y'')]\partial\delta y'' \\
& + \nu''\partial^3 y''\partial^2\delta y'' \\
& + [\lambda''\partial z'' - \partial.(\mu''\partial^2 z'') + \partial^2.(\nu''\partial^3 z'')]\delta z'' \\
& + [\mu''\partial^2 z'' - \partial.(\nu''\partial^3 z'')]\partial\delta z'' \\
& + \nu''\partial^3 z''\partial^2\delta z'' \\
& - [\lambda'\partial x' - \partial.(\mu'\partial^2 x') + \partial^2.(\nu'\partial^3 x')]\delta x' \\
& - [\mu'\partial^2 x' - \partial.(\nu'\partial^3 x')]\partial\delta x' \\
& - \nu'\partial^3 x'\partial^2\delta x' \\
& - [\lambda'\partial y' - \partial.(\mu'\partial^2 y') + \partial^2.(\nu'\partial^3 y')]\delta y' \\
& - [\mu'\partial^2 y' - \partial.(\nu'\partial^3 y')]\partial\delta y' \\
& - \nu'\partial^3 y'\partial^2\delta y' \\
& - [\lambda'\partial z' - \partial.(\mu'\partial^2 z') + \partial^2.(\nu'\partial^3 z')]\delta z' \\
& - [\mu'\partial^2 z' - \partial.(\nu'\partial^3 z')]\partial\delta z' \\
& - \nu'\partial^3 z'\partial^2\delta z'.
\end{aligned}
$$

§. 58. Aus $\nu' = 0$ folgt nothwendig $\partial\nu' = 0$ (vergl. auch §. 54. und §. 56.), so dass man hat:

$$
\begin{aligned}
\mu'(\partial y'\partial^2 x' - \partial x'\partial^2 y') &= Ay' - Bx' + F, \\
\mu'(\partial z'\partial^2 x' - \partial x'\partial^2 z') &= Az' - Cx' + G, \\
\mu'(\partial z'\partial^2 y' - \partial y'\partial^2 z') &= Bz' - Cy' + H;
\end{aligned}
$$

also durch Elimination von μ':

$$
\begin{aligned}
A(y'\partial z' - z'\partial y') + B(z'\partial x' - x'\partial z') + C(x'\partial y' - y'\partial x') \\
+ F\partial z' - G\partial y' + H\partial x' = 0,
\end{aligned}
$$

welche Gleichung sich umformen lässt in:

$$
\begin{aligned}
\partial z' S[X(y-y') - Y(x-x')]\partial m - \partial y' S[X(z-z') - Z(x-x')]\partial m \\
+ \partial x' S[Y(z-z') - Z(y-y')]\partial m = 0.
\end{aligned}
$$

In dieser Gestalt ist die Gleichung besonders geeignet, um nachzuweisen, dass für den Fall, wo der steife Faden die Form einer geraden Linie hat, das erste Glied von selbst Null wird, worin die völlige Unbeweglichkeit des Fadens ausgesprochen ist.

Durch Elimination von μ' erhält man ferner die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial y'\partial^2 x' - \partial x'\partial^2 y'}{\partial z'\partial^2 x' - \partial x'\partial^2 z'} = \frac{Ay' - Bx' + F}{Az' - Cx' + G},$$

$$\frac{\partial y'\partial^2 x' - \partial x'\partial^2 y'}{\partial z'\partial^2 y' - \partial y'\partial^2 z'} = \frac{Ay' - Bx' + F}{Bz' - Cy' + H},$$

welche die Bedingungen des Gleichgewichts der auf den steifen Faden wirkenden Kräfte angeben.

§. 59. Mit Unrecht behauptet Lagrange, dass λ, μ, ν die Kräfte ausdrücken, welche der Variation der Functionen α, β, γ unter der Einwirkung der auf den Faden wirkenden Kräfte Widerstand leisten; diese Kräfte haben vielmehr die Werthe:

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2},$$

$$\mu\sqrt{\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2},$$

$$\nu\sqrt{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)^2}.$$

§. 60. Nähme man $\partial^3 z - \frac{\partial^3 y \partial^2 z}{\partial^2 y} = 0$ an, so würde daraus $y = az$ folgen, wo a constant ist, was bei einem Körper, welcher drei Dimensionen hat, nicht möglich ist, und eben so wenig bei einer Curve.

§. 63. Die Gleichungen des ersten und zweiten Falls des vorigen Paragraphen entsprechen den Gleichungen der zweiten Abtheilung des zweiten Capitels und die Gleichung des dritten Falls der des §. 58. Die Gleichungen des dritten Abschnitts entsprechen nur im Allgemeinen den hier behandelten Fällen.

Sechster Abschnitt.

Die Gestaltveränderung, welche die Theilchen einer Flüssigkeit bei einer unendlich kleinen Verschiebung erleiden, wird durch

die Formel des Gleichgewichts ausgedrückt; dagegen wird die leichte Beweglichkeit der Theilchen nicht in die Sprache des Calcüls übersetzt. Jedoch kommt sie in anderen, abgeleiteten Formeln zum Ausdruck: z. B. in §. 33. des siebenten Abschnitts.

Siebenter Abschnitt.

§. 2. Eigentlich resultirt die Variation δs aus den Variationen δp, δq, δr u. s. w. der Linien p, q, r u. s. w.

§. 6. Die beiden Kräfte Π' und Π'' sind den Flächen ω' und ω'', auf welche sie wirken, direct proportional.

§. 7. Da die Gleichung

$$S(P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots) = 0$$

für einen beliebig gestalteten Canal gilt, so gilt sie für die ganze Masse der Flüssigkeit, da man sich diese aus vielen Canälen zusammengesetzt denken kann.

§. 8. In der Gleichung

$$\delta\Psi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots. + S(\delta P\partial p - \partial P\delta p + \delta Q\partial q - \partial Q\delta q + \delta R\partial r - \partial R\delta r + \ldots.)$$

ist $P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots.$ nothwendig $= 0$, weil in der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts die Glieder ausserhalb des Zeichens Null sein müssen. Aber selbst dann, wenn die Flüssigkeit sich in einem an beiden Enden verschlossenen Canal befindet, können Verschiebungen der äussersten Theile des Fluidums nach der Seite der Flüssigkeit hin eintreten, und δp, δq, δr u. s. w. sind also nicht $= 0$.

Ferner ist P gewöhnlich nur Function von p, Q von q, R von r, u. s. w., und deshalb $P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots.$ ein vollständiges Differential.

§. 9. Wenn $P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots.$ in $X\partial x + Y\partial y + Z\partial z$ verwandelt wird, wo X Function von x, y, z ist, und ebenso Y und Z, so findet die Methode des vorigen Paragraphen ihre Anwendung, und man hat:

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0.$$

§. 11. Von den drei Grössen $\frac{\partial\delta x}{\partial x}$, $\frac{\partial\delta y}{\partial y}$ und $\frac{\partial\delta z}{\partial z}$ muss min-

destens eine einen negativen Werth haben, da nicht alle drei Seiten des Parallelepipedums bei der Verschiebung, welche das Volum nicht abändert, grösser werden können.

§. 13. Der Werth von $\cos\alpha$ ist nicht nothwendig unendlich klein, sondern kann, als Summe zweier Differentialquotienten, eine endliche Grösse sein. Ebenso die Werthe von $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ in §. 14.

Bei der Berechnung des Werthes von $\cos\alpha$ vernachlässigt man die Potenzen von der zweiten Ordnung an; aber diese sind nicht nothwendig unendlich klein, weshalb die ganze Berechnung fehlerhaft wird.

§. 17. Es wird bei dieser ganzen Entwickelung vorausgesetzt, dass die Kräfte, welche auf die Theile der ringsum freien Flüssigkeit einwirken, sich selbst das Gleichgewicht halten, ein Fall, der in der Wirklichkeit nur selten vorkommt. Nimmt man an, die Flüssigkeit befinde sich in einem Gefässe und der Widerstand der Gefässwände rufe das Gleichgewicht hervor, so geht die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts in §. 10. über in:

$$S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\partial m + S\lambda\delta L - S(X'\delta x + Y'\delta y + Z'\delta z) = 0,$$

wo X', Y', Z' den Widerstand jedes Punktes der Wände und des Bodens des Gefässes nach den Richtungen der Axen der x, y und z bezeichnen. Diese Gleichung verwandelt sich durch die Substitutionen in

$$S[(\Gamma X - \frac{\partial\lambda}{\partial x} - \frac{X'}{\partial x\partial y\partial z})\delta x + (\Gamma Y - \frac{\partial\lambda}{\partial y} - \frac{Y'}{\partial x\partial y\partial z})\delta y$$

$$+ (\Gamma Z - \frac{\partial\lambda}{\partial z} - \frac{Z'}{\partial x\partial y\partial z})\delta z]\partial x\partial y\partial z + S(\lambda''\delta x'' - \lambda'\delta x')\partial y\partial z$$

$$+ S(\lambda''\delta y'' - \lambda'\delta y')\partial x\partial z + S(\lambda''\delta z'' - \lambda'\delta z')\partial x\partial y = 0.$$

Man hat also folgende unbestimmte particuläre Gleichungen des Gleichgewichts:

$$X' = (\Gamma X - \frac{\partial\lambda}{\partial x})\partial x\partial y\partial z,$$

$$Y' = (\Gamma Y - \frac{\partial\lambda}{\partial y})\partial x\partial y\partial z,$$

$$Z' = (\Gamma Z - \frac{\partial\lambda}{\partial z})\partial x\partial y\partial z.$$

Nimmt man an, dass das ganz mit Flüssigkeit angefüllte Ge-

fäss die Form eines Würfels habe, dessen innerer Rauminhalt n^3 sei, und dass g die Schwere bezeichne, so ist:

$$SZ\partial m = n^2(1+2+3+\ldots+n)g\partial m = n^3 \cdot \frac{n+1}{2} g\partial m,$$

$$SY\partial m = 2(1+2+3+\ldots+n)ng\partial m = n^2(n+1)g\partial m,$$

$$SX\partial m = n^2(n+1)g\partial m;$$

ferner:

$$Z\partial m = ng\partial m, \quad (n-1)g\partial m, \quad (n-2)g\partial m, \ldots. \; g\partial m;$$

$$Y\partial m = X\partial m = g\partial m, \quad 2g\partial m, \quad 3g\partial m, \ldots. \; ng\partial m;$$

folglich:

$$X' = (g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial x})\partial x\partial y\partial z, \quad (2g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial x})\partial x\partial y\partial z, \quad (3g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial x})\partial x\partial y\partial z, \ldots.,$$
$$(ng\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial x})\partial x\partial y\partial z;$$

$$Y' = (g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial y})\partial x\partial y\partial z, \quad (2g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial y})\partial x\partial y\partial z, \quad (3g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial y})\partial x\partial y\partial z, \ldots.,$$
$$(ng\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial y})\partial x\partial y\partial z;$$

$$Z' = (ng\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial z})\partial x\partial y\partial z, \quad [(n-1)g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial z}]\partial x\partial y\partial z, \quad [(n-2)g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial z}]\partial x\partial y\partial z,$$
$$\ldots., \; (g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial z})\partial x\partial y\partial z.$$

Für jeden Punkt der horizontalen Oberfläche der Flüssigkeit hat man, wie in §. 18., die Gleichung $\lambda = 0$. Aber $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial y}$ und $\frac{\partial\lambda}{\partial z}$ bleiben in obigen Gleichungen unbestimmt. Man müsste λ, d. h. den Druck, welcher auf jedes Flüssigkeitstheilchen von allen Seiten gleichmässig einwirkt, kennen, um $\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\partial\lambda}{\partial z}$ berechnen zu können.

Es folgt aus der Gleichheit von $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial y}$ und $\frac{\partial\lambda}{\partial z}$, dass X', Y' und Z' für jedes Flüssigkeitstheilchen in derselben Horizontalschicht gleich sind.

§. 20. Die Dichtigkeit muss in jeder wagerechten Schicht, welche von zwei unendlich nahen wagerechten Flächen begrenzt wird, gleichförmig sein; sie kann aber wegen der Unzusammen-

drückbarkeit der Flüssigkeit, welche bei Lagrange noch als Gesetz gilt, in wagerechten Schichten von jeder noch so grossen Dicke gleichförmig sein, und es müssen sich die Schichten nur von oben nach unten nach ihrer zunehmenden Dichtigkeit anordnen.

§. 21. Die Formel für den Druck in jedem Punkte der Flüssigkeit ist:

$$\int \Gamma(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) \text{ oder } \int \Gamma(P\partial x + Q\partial y + R\partial z).$$

§. 26. Die Bedingungen für die Identität der beiden Gleichungen

$$\Sigma - \frac{f(y^2+z^2)}{2A} = \text{const.} \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

sind:

$$\frac{mMA-f}{mLA} = \frac{A^2}{B^2}, \quad \frac{mNA-f}{mLA} = \frac{A^2}{C^2}.$$

Note IV., von Bertrand.

Statt f ist in den Gleichungen (1) und (2) zu setzen: $\frac{f}{A}$.

Durch Elimination von $\frac{f}{A}$ zwischen (1) und (2) erhält man:

$$(3) \qquad (M-N)(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2) = L(\lambda'^2-\lambda^2),$$

$$(4) \quad (\lambda'^2-\lambda^2)\left[(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)\int_0^1 \frac{x^4\partial x}{H^3} - \int_0^1 \frac{x^2\partial x}{H}\right] = 0.$$

---

§. 28. Die Gleichung der Gestalt der äusseren, freien Oberfläche der Flüssigkeit ist:

$$\int \Gamma(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) = K$$

und nicht

$$S\Gamma(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) = K.$$

§. 33. Im dritten Absatze dieses Paragraphen muss es heissen: On voit d'abord que l'introduction des variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ n'apporte aucun changement aux équations qui doivent avoir lieu pour tous les points du fluide, et qui résultent des termes affectés d'une triple intégration, parcequ'en égalant à zéro les coéfficients de

δx, δy, δz dans ces termes, les termes qui contiennent les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ disparaissent en même temps. statt: On voit d'abord que .... parcequ'en égalant à zéro les coéfficients de δx, δy, δz dans ces termes, les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ disparaissent en même temps.

§. 36. Gegen den in diesem Paragraphen geführten Beweis lässt sich einwenden, dass die Integration von

$$S\lambda\left(\frac{\partial\delta\xi}{\partial x}+\frac{\partial\delta\eta}{\partial y}+\frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\right)\partial x\partial y\partial z$$

ein blosser Formalismus ist, da jedes dieser Integrale ohne Weiteres $=0$ ist wegen der Unabhängigkeit der Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ beziehungsweise von x, y, z.

§. 39. Nach Lagrange's Methode erhält man keinen besonderen Ausdruck für den Widerstand des Bodens und der Wände des Gefässes, in welchem sich die Flüssigkeit befindet, obgleich dieser Widerstand eine wesentliche Bedingung des Gleichgewichts aller, auch der inneren Flüssigkeitstheile ist. Die Summe der Momente der auf die inneren und die begrenzenden Theile der Flüssigkeit wirkenden Kräfte ist $=0$: das ist die Formel des Gleichgewichts, in welcher der Widerstand der Gefässwände stillschweigend als bekannte Grössen vorausgesetzt wird. Man hat also die Formel so zu deuten, dass die Summe der Momente der der Flüssigkeit eigenthümlichen Kräfte und die Summe der Momente des Widerstandes der Wände sich Gleichgewicht halten, für den Fall des unbeweglichen Gefässes.

Diese Formel ist, was die darin wirklich ausgedrückten Kräfte betrifft, unabhängig von dem Gesetze der Gleichheit des Druckes nach jeder Richtung, Lagrange's Plane (§. 6.) gemäss, während die von mir zu §. 17. gegebene Formel sich auf dieses Gesetz stützt.

Achter Abschnitt.

§. 4. Es ist

$$\varepsilon = \text{const.} - \int\Gamma(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z).$$

§. 5. Man muss hier die Wärme Θ nach der durch sie hervorgerufenen Ausdehnung der Gasarten bestimmen, so dass z. B.

$$0^{\circ}\text{C.}=1,$$
$$266^{\circ},\ 6\text{C.}=2,$$
$$533^{\circ},\ 2\text{C.}=3,$$
$$\ldots\ldots,$$

gesetzt wird.

§. 7. Auch für ein in ein Gefäss eingeschlossenes Gas könnte man die Gleichung anwenden, die ich zu §. 17. des vorigen Abschnitts aufgestellt habe, indem man blos λ mit $-\varepsilon$ vertauscht, und es gelten alle daraus abgeleiteten Folgerungen, ausser dass man, wegen des ringsum geschlossenen Gefässes, nirgends $\varepsilon=0$ hat.

§. 11. Der richtige Werth von $\int\frac{\partial x}{\theta}$ ist:

$$\frac{x}{k}\left(1-\frac{T+t}{2k}+\frac{T^2+Tt+t^2}{3k^2}-\ldots\ldots\right).$$

Zweiter Theil.

Die Dynamik.

Erster Abschnitt.

§. 2. Lagrange sagt, man könne den Werth der beschleunigenden Kraft, welche in jedem Augenblicke auf das Bewegliche wirkt, bestimmen, indem man die in diesem Augenblick hervorgerufene Geschwindigkeit mit der Dauer dieses Augenblicks, oder den vermöge derselben in diesem Augenblick durchlaufenen Raum mit dem Quadrate der Dauer dieses Augenblicks vergleiche. Letztere Behauptung ist ungenau: denn man hat, wenn g die Schwere, ∂v die in einem Augenblick ∂t durch dieselbe hervorgerufene Geschwindigkeit und ∂s den durchlaufenen Raum bezeichnet:

$$g=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial s}{t\partial t}=\frac{2\partial s}{\partial . t^2},$$

aber nicht:

$$g=\frac{\partial s}{\partial t^2},$$

Formeln, welche für jede gleichförmig beschleunigte Bewegung gelten.

§. 15. Im zweiten Absatze muss offenbar gelesen werden: D'Alembert a donné depuis, à ce principe, une plus grande étendue, en faisant voir que si chaque corps est sollicité par une force accélératrice constante et qui agisse suivant des lignes parallèles, ou qui soit dirigée vers un point fixe et agisse en raison de la distance, le centre de gravité doit décrire la même droite ou courbe que si les corps étaient libres; statt: D'Alembert ....,

le centre de gravité doit décrire la même courbe que si les corps étaient libres.

Zweiter Abschnitt.

§. 6. Es ist falsch, wenn hier gesagt wird, dass die Kräfte $\frac{m\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{m\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\frac{m\partial^2 z}{\partial t^2}$, im entgegengesetzten Sinne genommen, so dass sie die Linien x, y, z zu verkleinern streben, den wirklichen Kräften P, Q, R u. s. w., welche als die Linien p, q, r u. s. w. zu verkleinern strebend angesehen werden, das Gleichgewicht halten müssen: denn im vorhergehenden Paragraphen haben wir die Gleichung:

$$S\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\delta z\right)m = -S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots.)m.$$

§. 8. Nach den Feststellungen des §. 7. hat man, streng genommen,

$$x - l = Dx, \quad y - m = Dy, \quad z - n = Dz,$$

und Ds als das Element der Curve; also auch:

$$\frac{x-l}{r} = \frac{Dx}{Ds}, \quad \frac{y-m}{r} = \frac{Dy}{Ds}, \quad \frac{z-n}{r} = \frac{Dz}{Ds}, \text{ u. s. w.}$$

$D\alpha$, $D\beta$, $D\gamma$ werden offenbar als constant angenommen; sind sie ebenfalls veränderlich, so wird der Werth für δr:

$$\delta r = \frac{Dx - D\alpha}{D\sigma}(\delta x - D\delta\alpha) + \frac{Dy - D\beta}{D\sigma}(\delta y - D\delta\beta) + \frac{Dz - D\gamma}{D\sigma}(\delta z - D\delta\gamma).$$

Da der Widerstand proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit des sich Bewegenden wächst, also ebenfalls eine regelmässig beschleunigende Kraft ist, welche aber der Bewegung des Systems der Körper entgegenwirkt, so nimmt die allgemeine Formel der Dynamik folgende Form an:

$$S\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\delta z\right)m - S\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\delta z\right)$$
$$+ S(P\delta p + Q\delta q + \ldots.)m + R\delta r = 0.$$

§. 11. Wirken die Stosskräfte P, Q, R u. s. w. auf alle Körper des Systems unmittelbar ein, so hat man:

$$S(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)m + S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots.) = 0.$$

Wirken sie aber nur auf irgend einen Körper m des Systems unmittelbar ein, die Bewegung wird aber von diesem dem ganzen System mitgetheilt, so wird die Bewegungsgleichung:

$$S(x\delta x + y\delta y + z\delta z)m + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots = 0$$

Dritter Abschnitt.

§. 9. Das Princip der Flächenräume wird hier nur für den Fall bewiesen, wo das ganze System der Körper eine gemeinsame Drehung um einen festen Punkt hat; es gilt aber auch für ein ganz freies System von Körpern, die verschiedene Drehungsgeschwindigkeiten besitzen können (§. 16. des ersten Abschnitts).

§. 10. Es ist

$$y\partial z - z\partial y = (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')(x'\partial y' - y'\partial x') + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')(z'\partial x' - x'\partial z') + (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')(y'\partial z' - z'\partial y'),$$

folglich:

$$A = (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')C' + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')B' + (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')A'.$$

§. 11. Indem man die drei Gleichungen

$$S\left(\frac{x'\partial y' - y'\partial x'}{\partial t}\right)m = C',$$

$$S\left(\frac{z'\partial x' - x'\partial z'}{\partial t}\right)m = 0,$$

$$S\left(\frac{y'\partial z' - z'\partial y'}{\partial t}\right)m = 0$$

auflöst, und die daraus sich ergebenden Werthe in die Gleichungen

$$S\left(\frac{x\partial y - y\partial x}{\partial t}\right)m = \gamma''C',$$

$$S\left(\frac{z\partial x - x\partial z}{\partial t}\right)m = \gamma'C',$$

$$S\left(\frac{y\partial z - z\partial y}{\partial t}\right)m = \gamma C'$$

substituirt, nachdem man vorher die Werthe von x, y, z in x', y', z' eingeführt hat, erhält man schliesslich die drei Gleichungen des §. 10.:

$$\gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'', \quad \gamma' = \beta\alpha'' - \alpha\beta'', \quad \gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha'.$$

§. 15. Wenn in ganz freien Systemen Rotationen um irgend einen Punkt im Raume durch Stosskräfte hervorgerufen werden, so kann man, wie in diesem Paragraphen gezeigt wird, eine solche Bewegung stets in eine Rotation des Systems um seinen Schwerpunkt und in eine Translationsbewegung des Schwerpunktes zerlegen. Dasselbe findet natürlich Statt bei Rotationen eines ganz freien Systems um irgend einen Punkt im Raume, die durch äussere beschleunigende Kräfte hervorgerufen werden (§. 12.).

§. 17. Z. 7. und Z. 13. dieses Paragraphen muss $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ statt x, y, z gelesen werden.

Wirken bei einem festen Körper von beliebiger Gestalt die Stosskräfte nur auf einen Punkt desselben ein, so sind deren Momente:

$$C = Xy - Yx, \quad B = Zx - Xz, \quad A = Yz - Zy,$$

während die Werthe von A, B, C in $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ unverändert bleiben. Wirken die Stosskräfte auf mehrere Punkte x, y, z, x', y', z' u. s. w. des festen Körpers ein, so sind deren Momente:

$$C = Xy + X'y' + \ldots - Yx - Y'x' - \ldots,$$

$$B = Zx + Z'x' + \ldots - Xz - X'z' - \ldots,$$

$$A = Yz + Y'z' + \ldots - Zy - Z'y' - \ldots.$$

§. 18. Wenn irgend ein rotirendes System von Körpern durch die gegenseitige und allmähliche Einwirkung seiner Körper unveränderlich oder zu einem einzigen festen Körper wird, so erleidet die Rotationsbewegung keine Aenderung, es mögen die sich anziehenden Körper ihre relative Lage ändern oder nicht (vergl. §. 7.).

Note V., von Bertrand.

Die Integrale a, b, c sind stets positiv, dagegen können von den Integralen d, e, f zwei negativ sein; folglich ist def stets positiv, und es muss also immer $abc > def$ sein, wenn $a^2b^2c^2 > d^2e^2f^2$ ist.

Wie Bertrand selbst anführt, wird aber für eine gerade Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, der Ausdruck (3) gleich Null, und also ist die Gleichung (1) doch nicht schlechthin unmöglich.

---

§. 20. Offenbar ist Lagrange durch seinen vor der Vollendung der zweiten Ausgabe der analytischen Mechanik erfolgten Tod verhindert worden, seine am Ende dieses Paragraphen ausgesprochene Absicht, später (im neunten Abschnitte) directe Mittel anzugeben, um zu den Gleichungen dieses Paragraphen zu gelangen, auszuführen.

§. 24. Betrachtet man in den drei Gleichungen des §. 22. $\dot{\vartheta}$ als constant, so erhält man in den drei Gleichungen des §. 24. auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens 0, und erspart also Lagrange's Entwickelung, die sich auf die unmögliche Annahme gründet, dass $\dot{\vartheta}$ veränderlich sei, wenn A, B, C constant sind.

§. 25. Die Gleichung zur Bestimmung von s ist:

$$[gh(m-n)+f(g^2-h^2)]s^3$$
$$+[g(l-m)(m-n)+fh(n-2l+m)+g(g^2+h^2-2f^2)]s^2$$
$$+[f(l-m)(n-l)+gh(n-2m+l)+f(f^2+h^2-2g^2)]s$$
$$+fh(l-n)+g(f^2-h^2)=0.$$

§. 27. Setzen wir $g=0$, $h=0$ und für diesen Fall f', l', m', n' statt f, l, m, n, so erhalten wir:

$$s[f'(l'-m')(n'-l')+f'^3]=0, \quad u=\frac{(l'-m')s}{f'}.$$

Diesen Formeln entspricht:

1) $s=0$, $u=0$. 2) $f'=0$. Also nach den Gleichungen des §. 25. $l'=m'=n'$. Mithin s und u willkührlich.

3) $f'=\sqrt{(l'-m')(l'-n')}$. Daher nach den Gleichungen des §. 25.:

$$u=s\sqrt{\frac{l'-m'}{l'-n'}},$$

und, wenn wir die Gleichung $\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$ zu Hülfe nehmen,

$$s=\operatorname{tang}\lambda\sqrt{\frac{l'-n'}{2l'-m'-n'}},$$

$$u=\operatorname{tang}\lambda\sqrt{\frac{l'-m'}{2l'-m'-n'}}.$$

Nehmen wir an, es sei $\cos\lambda=0$, so dass $\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$, so ist $\lambda=90^0$, und, wenn sowohl $\cos\mu$, als $\cos\nu$ grösser als 0 ist, $s=\infty$, $u=\infty$.

Aber es ist dies nur einer von den vielen möglichen Fällen, und die Annahme, dass diese Werthe von λ, s und u den beiden anderen Wurzeln der Gleichung des dritten Grades von s entsprechen, daher eine rein willkührliche.

Streng genommen ist

$$\cos\nu = \pm\sqrt{1-\cos^2\mu} = \pm\sin\mu,$$

$$\tang 2\mu = \pm\frac{2f'}{m'-n'},$$

woraus sich für den Winkel μ zwei Paare von Werthen ergeben, in deren jedem die Winkel um 90^0 differiren. Man kann sich aber beide Paare der in der Ebene der y, z liegenden und sich rechtwinklig treffenden Linien mit den Axen der y und z zusammenfallend denken, so dass sie sich zugleich decken, wenn man $f'=0$ setzt.

Setzt man $\cos\lambda=0$ und $\cos\mu$ und $\cos\nu$ abwechselnd $=1$ und $=0$, so erhält man die zweite und dritte Rotationsaxe unmittelbar mit den Axen der y und z zusammenfallend. Man hat nämlich für $\cos\lambda=0$, $\cos\mu=1$, $\cos\nu=0$:

$$s=\infty, \quad u=\frac{0}{0},$$

$$\lambda=90^0, \quad \mu=0^0, \quad \nu=90^0,$$

wodurch die Lage der zweiten Rotationsaxe, mit der Axe der y zusammenfallend, bestimmt wird.

Dagegen hat man für $\cos\lambda=0$, $\cos\mu=0$, $\cos\nu=1$:

$$s=\frac{0}{0}, \quad u=\infty,$$

$$\lambda=90^0, \quad \mu=90^0, \quad \nu=0^0,$$

wodurch die Lage der dritten Rotationsaxe, mit der Axe der z zusammenfallend, bestimmt wird.

Die Gleichung

$$f'(\cos^2\nu-\cos^2\mu)+(m'-n')\cos\mu\cos\nu=0$$

liefert für beide Fälle $f'=0$.

§. 29. Die hier gemachte Annahme $l>m$, $m>n$ widerspricht der gegebenen Gleichung $f'=0$. Denn für $f'=0$ muss nach den Gleichungen des §. 25. entweder $l'=m'=n'$ sein, oder wenigstens $l'=m'$ oder auch $l'=n'$.

Die Annahme $l' = m' = n'$ liefert keine Maxima und Minima dieser Functionen von t. Setzt man aber abwechselnd $l' = m'$ und $l' = n'$, so erhält man Maxima und Minima, und zugleich die Lage der zweiten und dritten Rotationsaxe mit der der Axen der y und z übereinstimmend.

Man hat nämlich für $l = m$, $m > n$:

l und m Maximum, n Minimum. $l+m$ Maximum, $l+n$ und $m+n$ Minimum,

$s = \infty$, $u = 0$, (vergl. meine Note zu §. 27., unter 3))

$\lambda = 90^0$, $\mu = 0^0$, $\nu = 90^0$,

so dass die zweite Rotationsaxe mit der Axe der y zusammenfällt.

Man hat ferner für $l = n$, $n > m$:

l und n Maximum, m Minimum. $l+n$ Maximum, $l+m$ und $m+n$ Minimum,

$s = 0$, $u = \infty$,

$\lambda = 90^0$, $\mu = 90^0$, $\nu = 0^0$,

so dass die dritte Rotationsaxe mit der Axe der z zusammenfällt.

Wenn Lagrange in diesem Paragraphen das Massenelement Dm „Molecül" nennt, so darf man darunter nicht das „Molecül" oder „Atom" der Physiker verstehen, indem das Massenelement Dm schon ein Haufen von Atomen ist. (Vergl. den achten Abschnitt des ersten Theils, §. 3.)

§. 31. Da die Lage der Axen der x, y, z, welche zugleich die Hauptaxen des Körpers sind, ganz beliebig ist, so ist es unnöthig, in die für diese Coordinaten geltenden Formeln die Coordinaten x', y', z' einzuführen. Die drei Gleichungen des §. 17. geben:

$$(m+n)\dot{\psi} = A,$$

$$(l+n)\dot{\omega} = B,$$

$$(l+m)\dot{\varphi} = C.$$

Wird $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, so wird auch $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\omega} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, weil l, m, n für einen Körper von drei Dimensionen nie Null werden kann. Aber selbst, wenn der rotirende Körper eine gerade Linie ist, kann man den Hauptaxen eine solche Lage geben, dass keine der Grössen l, m, n Null ist, dass also $\dot{\psi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\varphi}$ Null werden.

Die Hauptaxen können nicht im Körper fest, also zugleich mit ihm drehbar sein; mithin sind l, m, n ursprünglich veränder-

lich. Aber da die obigen Gleichungen für jeden Werth von l, m, n, der einer beliebigen gegebenen Lage des Körpers entspricht, gelten, so sind diese Grössen als willkührliche Constanten zu betrachten.

§. 37. Wenn man annimmt, dass die mit δ bezeichneten Variationen endlich seien, so erhält man:

$$\delta . Sm(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -2Sm[(\delta\dot{x})^2 + (\delta\dot{y})^2 + (\delta\dot{z})^2],$$

woraus man ersieht, dass die Variation der lebendigen Kräfte negativ und gleich der doppelten Summe der lebendigen Kräfte ist, welche von dem Geschwindigkeitsverlust der verschiedenen Punkte herrühren.

Bertrand bemerkt mit Recht, dass die Ausdehnung des in diesem Paragraphen vorgetragenen Satzes auf ein System von Körpern, welche auf veränderliche Weise mit einander verbunden sind, nicht zu rechtfertigen ist.

§. 39. Ich vermisse in der Fassung, welche Lagrange dem Princip der kleinsten Wirkung giebt, die Angabe der Bedingung, dass die Verbindungen der verschiedenen Körper des Systems unter einander unveränderlich sein müssen, welche aus dem Princip der lebendigen Kräfte hervorgeht.

§. 40. Wenn Lagrange sagt, die Gleichung

$$\int \partial t S \left(\begin{matrix} P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots. \\ \ldots. + \delta x \partial . \frac{\partial x}{\partial t^2} + \delta y \partial . \frac{\partial y}{\partial t^2} + \delta z \partial . \frac{\partial z}{\partial t^2} \end{matrix} \right) m = 0$$

gelte für alle möglichen Variationen, so ist dieser Ausdruck allerdings zu unbestimmt; aber er ist richtig, sobald man ihn nur auf die vermöge der Bedingungsgleichungen möglichen Variationen bezieht.

Die Unterdrückung des Integralzeichens $\int$ bedarf keiner weiteren Rechtfertigung, indem die Differentiation der Gleichung des Maximums oder Minimums stets ausführbar ist, wohl aber die Division der differenziirten Gleichung durch ∂t dadurch, dass ∂t eine ganz willkührliche, aber von Null verschiedene, unendlich kleine Grösse ist.

Uebrigens kommt es Lagrange nur darauf an, zu beweisen, dass die Gleichung

$$S \left(\begin{matrix} P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots. \\ \ldots. + \delta x \partial . \frac{\partial x}{\partial t^2} + \delta y \partial . \frac{\partial y}{\partial t^2} + \delta z \partial . \frac{\partial z}{\partial t^2} \end{matrix} \right) m = 0$$

für jeden Augenblick gilt. Mir scheint es, dass er sie wegen dieser Eigenschaft eine unbestimmte Gleichung nennt.

§. 42. Eine genauere Betrachtung des Integrals $\int \partial t Smu^2$ zeigt, dass das Princip der kleinsten Wirkung sich auf folgenden Ausdruck bringen lässt: das Integral des Productes aus dem Element der Zeit in die Summe der augenblicklichen lebendigen Kräfte aller Körper, von dem Augenblicke an genommen, wo die Körper von den gegebenen Anfangspunkten ausgehen, bis zu dem, wo sie an anderen gegebenen Punkten anlangen, ist ein Maximum oder Minimum.

Es erhellet hieraus, dass die Benennung: Princip der grössten oder kleinsten lebendigen Kraft auch nicht recht passend ist.

Vierter Abschnitt.

§. 1. Der Vortheil der hier angewandten Methode der Transformation der Variablen besteht namentlich darin, dass die Variationen der neu eingeführten Variablen vom Integralzeichen S unabhängig werden, indem man letztere so auswählt, dass deren Variationen für alle Körper des Systems identisch sind.

§. 2. Eine Vergleichung mit §. 3. des zweiten Abschnitts zeigt, dass Lagrange mit Unrecht von den Kräften $m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ behauptet, sie rühren nur von der Trägheit der Körper des Systems her.

§. 6. Betrachtet man das erste Glied der Gleichung

$$A\delta x + B\delta y + C\delta z + ... - A'\delta\xi - B'\delta\psi - C'\delta\varphi - .... = \partial Z' - \partial Z$$

genauer, so sieht man, dass es zwar ebenfalls Differentiale mit der Charakteristik ∂ in sich enthält, aber kein genaues Differential ist.

§. 7. Es erhellet leicht, dass die umgewandelte Grösse nur unter der Voraussetzung richtig ist, dass die Variationen $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$ u. s. w. vom Integralzeichen S unabhängig sind.

§. 10. Wenn man keine Variablen anwenden kann oder will, deren Variationen vom Integralzeichen S unabhängig sind, so bleibt nichts übrig, als unbestimmte partikuläre Gleichungen der Bewegung zu bilden, welche für jeden einzelnen Körper des

Systems gelten, und diese mit den Bedingungsgleichungen zu combiniren, entweder mittelst der Eliminationsmethode oder mittelst der Methode der Multiplicatoren.

§. 14. Am Ende des ersten Absatzes dieses Paragraphen müsste es heissen:

Quoique nous ayons déjà montré comment ce principe résulte de notre formule générale de la Dynamique (sect. III., art. 34.), il ne sera pas inutile de faire voir que les équations particulières déduites de cette formule fournissent toujours une équation intégrable dont l'intégrale contient le principe de la conservation des forces vives. statt: Quoique nous ayons déjà montré ..... fournissent toujours une équation intégrable, qui est celle de la conservation des forces vives.

Wenn die Grössen T, L, M u. s. w. auch die Variable t enthielten, so würde dadurch weder die Bildung der Differentiale ∂T, ∂L, ∂M u. s. w., noch die Integration der Gleichung verhindert werden; wohl aber wird dadurch, dass V nicht existirt, die Bildung der Gleichung unmöglich, welche das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte liefert.

§. 15. Die vollständige Variation von F ist:

$$\frac{\delta F}{\delta x}\delta x + \frac{\delta F}{\delta y}\delta y + \ldots.$$

Weil aber $\delta x = \alpha x$, $\delta y = \alpha y$ u. s. w., so wird obiger Ausdruck:

$$\frac{\delta F}{\delta x}\alpha x + \frac{\delta F}{\delta y}\alpha y + \ldots.$$

Wenn α unendlich klein gesetzt wird, so muss δF unendlich klein sein, so dass es $= n\alpha F$ wird, mit Vernachlässigung der Glieder, welche höhere Potenzen von α enthalten.

Note VI., von Bertrand.

II.

Der Werth von Q_m als Function von U ist:

$$Q_m = \frac{\partial . \Sigma U}{\partial q_m},$$

und man hat folglich:

$$H = \Sigma U - T.$$

$-U$ entspricht dem, was Lagrange Πm nennt, und $-\Sigma U$ der Function V.

Da bei Lagrange

$$H = T + V$$

ist, so hat H in dieser Note von Bertrand denselben Werth, wie $-H$ in der Mécanique analytique.

III.

In dem am Ende von §. III. befindlichen Satze ist zu lesen: On peut remarquer que les équations qui composent la deuxième ligne du groupe (8) forment un système à part, dans lequel ne figurent pas $p_1, p_2, \ldots p_k$, et permettent, par conséquent, de calculer les inconnues $q_1, q_2, \ldots q_k$ en fonction du temps et de toutes les valeurs initiales $(q_1)_0, (q_2)_0, \ldots (q_k)_0, (p_1)_0, (p_2)_0, \ldots (p_k)_0$. statt: On peut remarquer que les équations qui composent la première ligne du groupe (8) forment un système à part, dans lequel ne figurent pas $p_1, p_2, \ldots p_k$, et qui permettent, par conséquent, de calculer les inconnues $q_1, q_2, \ldots q_k$ en fonction du temps et de toutes les valeurs initiales $(q_1)_0, (q_2)_0, \ldots (q_k)_0, (p_1)_0, (p_2)_0, \ldots \ldots (p_k)_0$.

IV.

Die Gleichung (2) wird durch die Substitution von $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots \ldots \frac{\partial S}{\partial q_k}$ in die Functionen $\frac{\partial q_1}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \frac{\partial q_2}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial q_k}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial p_k}$ eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, nicht aber zweiten Grades rücksichtlich der partiellen Differentialquotienten von S.

Die Gleichungen (16) sind:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_2}, \ldots, \quad \frac{\partial p_k}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_k};$$

folglich auch:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial (U - T)}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial q_1}.$$

V.

Das Zeichen δ in dem Werthe von δV bezieht sich auf die Variation aller Constanten, welche in $q_1', q_2', \ldots q_n', p_1, p_2, \ldots p_n$ enthalten sind.

H ist constant zufolge des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte, also δH von t unabhängig.

Auffallend ist, dass Bertrand nur ein Theorem von Hamilton mittheilt.

Fünfter Abschnitt.

§. 3. V ist nur Function von ξ, ψ, φ u. s. w., wenn die Kräfte nach fixen Centren oder nach Körpern desselben Systems hin wirken, und Functionen der Entfernungen von den Centren sind. Ohne die Erfüllung dieser Bedingungen giebt es überhaupt keine Function V nach den Feststellungen des §. 9. des vorigen Abschnitts.

§. 4. δ bezieht sich hier einzig auf die Variationen der willkührlichen Constanten, welche in den Werthen der Variablen ξ, ψ, φ u. s. w., ξ', ψ', φ' u. s. w., von welchen Z Function ist, enthalten sind.

§. 7. Wenn man in den Ausdruck

$$\Delta\xi\delta.\frac{\partial T}{\partial \xi'}+\Delta\psi\delta.\frac{\partial T}{\partial \psi'}+\Delta\varphi\delta.\frac{\partial T}{\partial \varphi'}+\ldots.$$
$$-\delta\xi\Delta.\frac{\partial T}{\partial \xi'}-\delta\psi\Delta.\frac{\partial T}{\partial \psi'}-\delta\varphi\Delta.\frac{\partial T}{\partial \varphi'}-\ldots.$$

die aus irgend einer Aufgabe der Dynamik abgeleiteten Werthe der Variablen ξ, ψ, φ u. s. w., ξ', ψ', φ' u. s. w., welche als Functionen von t und den willkührlichen Constanten ausgedrückt sind, substituirt, so verschwindet die Variable t von selbst, wie immer die Variationen der willkührlichen Constanten in den mit den Charakteristiken δ und Δ versehenen Grössen beschaffen sein mögen.

T ist der halbe Werth der lebendigen Kraft des ganzen Systems.

§. 10. Mir scheint die Bemerkung Bertrand's zu diesem Paragraphen nicht nur überflüssig, sondern selbst ungenau. Er sagt, $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$ u. s. w. bezeichnen die Variationen der Functionen, welche die willkührlichen Constanten ersetzen und welche in jedem Probleme vollkommen bestimmt sind, so dass ihr Werth eine Function der Zeit ist, deren Variation nichts Willkührliches hat. $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$ u. s. w. bezeichnen die Variationen der Functionen ξ, ψ, φ u. s. w. doch nur, insofern man blos die Veränderlichkeit der willkührlichen Constanten berücksichtigt; und nur, indem man die Variation der Zeit vernachlässigt, kann man sagen,

dass diese Variationen nichts Willkührliches in sich enthalten, weil sie nämlich gleich Null werden.

§. 13. Wenn ξ, ψ, φ u. s. w. als Functionen von α, β, γ u. s. w., α', β', γ' u. s. w. und t gegeben sind, so kann man sie auch als Functionen von α, β, γ u. s. w., λ, μ, ν u. s. w. und t darstellen.

Sei z. B.

$$\xi=\alpha+\alpha't,\quad \psi=\beta+\beta't,\quad \varphi=\gamma+\gamma't;$$

$$T=\xi\psi\varphi\xi'\psi'\varphi';$$

$$\frac{\partial T}{\partial\xi'}=\xi\psi\varphi\psi'\varphi',\quad \text{also}\quad \lambda=\alpha\beta\gamma\beta'\gamma';$$

$$\frac{\partial T}{\partial\psi'}=\xi\psi\varphi\xi'\varphi',\quad ,,\quad \mu=\alpha\beta\gamma\alpha'\gamma';$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi'}=\xi\psi\varphi\xi'\psi',\quad ,,\quad \nu=\alpha\beta\gamma\alpha'\beta';$$

so hat man:

$$\xi=\alpha+t\sqrt{\frac{\mu\nu}{\alpha\beta\gamma\lambda}},\quad \psi=\beta+t\sqrt{\frac{\lambda\nu}{\alpha\beta\gamma\mu}},\quad \varphi=\gamma+t\sqrt{\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta\gamma\nu}}.$$

§. 22. Die Gleichungen des §. 8. sind unvollständig, da zu dem ersten Gliede ein Ausdruck addirt werden muss. Daher ist auch die Gleichung

$$T+V=H+\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\partial\xi+\frac{\partial\Omega}{\partial\psi}\partial\psi+\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\partial\varphi+\ldots\right)$$

unvollständig. Sie wird aber richtig, wenn man H und die in den Werthen von T und V enthaltenen willkührlichen Constanten als veränderlich betrachtet; und da für den Fall der Abwesenheit störender Kräfte

$$\partial(T+V)=\partial H=0$$

ist, so muss, wenn störende Kräfte da sind, ebenfalls

$$\partial(T+V)=0,\quad \text{(vergl. §. 10.)},$$

also

$$-\partial H=\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\partial\xi+\frac{\partial\Omega}{\partial\psi}\partial\psi+\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\partial\varphi+\ldots.$$

sein; und da $-H$ als willkührliche Constante in $+H$ umgeändert werden kann,

$$\partial H = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\partial\xi + \frac{\partial \Omega}{\partial \psi}\partial\psi + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}\partial\varphi + \ldots.$$

§. 24. T bezeichnet auch hier die Hälfte der lebendigen Kraft des Systems.

Uebrigens kommen die Eigenschaften, welche in diesem Abschnitte an der Function T aufgefunden worden sind (§. 7., §. 24.), ebenso der Function $2T$ zu.

Note VII., von Bertrand.

I.

Das zweite Glied der Gleichung (5) ist $=0$, weil die Indices i und i' unter einander vertauscht werden können.

Ganz unverständlich ist mir übrigens folgender Satz: Si l'on déduit des équations (8), (9), (10), (11) les valeurs de $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \alpha}{\partial p_{i'}}$, $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \alpha}{\partial q_{i'}}$, $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \beta}{\partial p_{i'}}$, $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \beta}{\partial q_{i'}}$ pour toutes les valeurs de l'indice i', et qu'on les reporte dans l'équation (5) que nous voulons démontrer, on obtiendra une identité (?).

II.

Wenn

$$A = F_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2k}) = F_1(\alpha, \beta, \ldots, \varkappa; \beta, \gamma, \ldots, \lambda),$$
$$B = F_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2k}) = F_2(\alpha, \beta, \ldots, \varkappa; \beta, \gamma, \ldots, \lambda)$$

ist, so ist

$$(A, B) = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\frac{\partial F_2}{\partial \beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \beta}\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial \beta}\frac{\partial F_2}{\partial \gamma} - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma}\frac{\partial F_2}{\partial \beta} + \ldots.$$
$$\ldots + \frac{\partial F_1}{\partial \varkappa}\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial F_1}{\partial \lambda}\frac{\partial F_2}{\partial \varkappa},$$

aber man sieht nicht ein, wie

$$(A, B) = (\alpha, \beta)\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\frac{\partial F_2}{\partial \beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \beta}\frac{\partial F_2}{\partial \alpha}\right) + (\alpha, \gamma)\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\frac{\partial F_2}{\partial \gamma} - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma}\frac{\partial F_2}{\partial \alpha}\right)$$
$$+ \ldots + (\beta, \gamma)\left(\frac{\partial F_1}{\partial \beta}\frac{\partial F_2}{\partial \gamma} - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma}\frac{\partial F_2}{\partial \beta}\right) + \ldots + (\eta, \lambda)\left(\frac{\partial F_1}{\partial \eta}\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial F_1}{\partial \lambda}\frac{\partial F_2}{\partial \eta}\right)$$

sein kann.

III.

Der Beweis dieses Lehrsatzes ist zu vag.

IV.

Es bliebe zu beweisen übrig, dass die beiden Fälle, in welchen der Poisson'sche Lehrsatz illusorische Resultate giebt, mittelst des in §. III. bewiesenen Lehrsatzes innig verknüpft worden sind.

Die Gleichung, welche ausdrückt, dass β ein Integral ist, hat folgende Form:

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}+\Sigma\frac{\partial\beta}{\partial pi}\frac{\partial H}{\partial qi}-\frac{\partial\beta}{\partial qi}\frac{\partial H}{\partial pi}=0;$$

Bertrand vernachlässigt das Glied $\frac{\partial\beta}{\partial t}$ ohne Weiteres.

In dem Beweise des Lehrsatzes, welcher den eigentlichen Gegenstand dieses Paragraphen ausmacht, ist auf S. 427. zu lesen: Si μ est moindre que $2k-2$, il existera des intégrales indépendantes de celles là, ainsi que de α et de β_1. statt: Si $\mu+1$ est moindre que $2k-2$, il existera des intégrales etc.

Der Beweis dieses Lehrsatzes ist übrigens vielfach ungenau: namentlich wird vorausgesetzt, aber nicht bewiesen, dass es μ Integrale giebt, welche von α und β_1 verschieden sind, und mit α combinirt der Poisson'schen Gleichung die Form $0=0$ geben; ferner werden die beiden verschiedenen Fälle eines identisch constanten Integrals und eines solchen, welches Function der vorhergehenden ist, als identisch betrachtet.

Sechster Abschnitt.

§. 1. Der letzte Satz des ersten Absatzes dieses Paragraphen: La même chose aura lieu etc. fiele am besten weg; als Erläuterung aber müsste er anders gestaltet werden.

Die Ausdrücke

$$x=a+a1\xi+a2\psi+a3\varphi+\ldots+a'1\xi^2+\ldots,$$
$$y=b+b1\xi+b2\psi+b3\varphi+\ldots+b'1\xi^2+\ldots,$$
$$z=c+c1\xi+c2\psi+c3\varphi+\ldots+c'1\xi^2+\ldots$$

gelten für jeden Körper m des Systems; es haben also z. B. x', x'', x''' u. s. w. denselben Werth, wie x. Vergl. den folgenden Paragraphen.

§. 3. Aus den Gleichungen $V=H$ und $T=0$, welche für den Zustand des Gleichgewichts gelten, erhellet, dass die Verbindung der einzelnen Körper des Systems unabhängig von t gedacht wird, was im Zustande des Gleichgewichts offenbar stattfinden muss. Es findet aber nach §. 1. auch im Zustande der Bewegung statt.

Die Differentialgleichungen der Bewegung müssen auch für den Zustand des Gleichgewichts gelten: denn man hat für letzteren $\partial V=0$, und nach Abschnitt II. des ersten Theils, §. 13.:

$$\frac{\delta V}{\delta \xi}=0,\ \frac{\delta V}{\delta \psi}=0,\ \frac{\delta V}{\delta \varphi}=0,\ldots;$$

folglich ist es nur nöthig, dass $\partial.\frac{\delta T}{\delta \partial \xi}$, $\partial.\frac{\delta T}{\delta \partial \psi}$, $\partial.\frac{\delta T}{\delta \partial \varphi},\ldots$, Null werden, was wegen $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=0$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}=0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}=0,\ldots$ wirklich stattfindet. Lagrange's Grund: puisque le système y étant une fois, y resterait toujours de lui-même, ist nichts anderes, als der Ausdruck in Worten für die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=0,\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}=0,\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}=0,\ldots$$

§. 4. Im zweiten Absatze dieses Paragraphen muss offenbar gelesen werden: et il n'est pas difficile de voir, par les formules générales d'élimination, que la résultante en k sera d'un degré égal au nombre des équations, et, par conséquent, égal à celui des équations différentielles proposées; statt: et il n'est pas difficile de voir, par les formules générales d'élimination, que la résultante en k sera d'un degré égal à celui des équations etc.

Um die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}+k\xi=0$$

integriren zu können, muss man $\xi=f(t)$ setzen. Man kann hierzu, wie Lagrange, $f(t)=E\sin(t\sqrt{k}+\varepsilon)$ wählen; aber man könnte noch einfacher auch $f(t)=\sin(t\sqrt{k})$ oder $f(t)=\cos(t\sqrt{k})$ setzen, mit Hinweglassung der willkührlichen Constanten.

Dass man die Grössen

$$\frac{[1]+[1,2]f+[1,3]g+....}{(1)+(1,2)f+(1,3)g+....}, \quad \frac{[2]f+[1,2]+[2,3]g+....}{(2)f+(1,2)+(2,3)g+....},$$

$$\frac{[3]g+[1,3]+[2,3]f+....}{(3)g+(1,3)+(2,3)f+....}, \ ....,$$

einander gleichsetzen, mit k bezeichnen, und aus diesen Gleichungen die n verschiedenen Werthe von k, von f, von g u. s. w. bestimmen muss, ergiebt sich aus der Beschaffenheit der Differentialgleichungen der Bewegung (§. 3.): denn nur die hiernach bestimmten Werthe von ξ, ψ, φ u. s. w. (§. 4.) genügen denselben.

§. 6. Der Differentialquotient von $\frac{2K\partial^2K-\partial K^2}{\partial f^2}$ nach f ist $\frac{2K\partial^3K}{\partial f^3}=0$.

§. 7. Lagrange behauptet, dass, wenn eine von den Wurzeln k', k'' u. s. w. imaginär wird, reelle Exponentialgrössen an die Stelle der entsprechenden Sinusse oder Cosinusse treten. Setzt man z. B. $k'=\sqrt{-1}$, so wird:

$$\cos(t\sqrt{k'}+\varepsilon)=\frac{e^{t\sqrt[4]{-1}+\varepsilon\sqrt{-1}}}{2}+\frac{1}{2e^{t\sqrt[4]{-1}+\varepsilon\sqrt{-1}}}$$

$$=\frac{e^{t\sqrt[4]{-1}}}{2}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^4}{24}-....+\varepsilon\sqrt{-1}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{6}+....\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2e^{t\sqrt[4]{-1}}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^4}{24}-....+\varepsilon\sqrt{-1}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{6}+....\right)\right]},$$

$$\sin(t\sqrt{k'}+\varepsilon)=\frac{e^{t\sqrt[4]{-1}+\varepsilon\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}-\frac{1}{2\sqrt{-1}\,e^{t\sqrt[4]{-1}+\varepsilon\sqrt{-1}}}$$

$$=\frac{e^{t\sqrt[4]{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^4}{24}-....+\varepsilon\sqrt{-1}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{6}+....\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{-1}\,e^{t\sqrt[4]{-1}}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^4}{24}-...+\varepsilon\sqrt{-1}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{6}+..\right)\right]},$$

wo die Exponentialgrössen imaginär sind.

§. 8. Aus der Formel

$$T = S\left(\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{2\partial t^2}\right)m$$

geht, da $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ stets reell sind, nothwendig hervor, dass T stets positiv ist. Da nun A aus T entsteht, indem man in dem in §. 2. gegebenen Werthe von T die Differentialquotienten $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ u. s. w. in 1, f, g u. s. w. verwandelt, d. h. indem man T durch $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2$ dividirt, so folgt, dass auch A nothwendig positiv ist, weil $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ nothwendig stets reell ist. Hingegen ist es falsch, zu sagen, dass T in dem Werthe des §. 2. aus der Summe mehrerer Quadrate, welche mit positiven Coefficienten versehen sind, bestehe: dies gilt nur von dem ersten Theile dieser Grösse; der zweite dagegen enthält f, g u. s. w. und Producte aus je zweien derselben, multiplicirt mit positiven oder negativen Coefficienten. Es ist also auch falsch, zu sagen, dass A nothwendig stets positiv ist, wenn f, g u. s. w. reelle Grössen sind.

Die Grösse B ist nothwendig positiv, wenn die darin befindlichen Coefficienten dasselbe Vorzeichen haben, wie die entsprechenden Coefficienten von A; ist dies nicht der Fall, so kann sie negativ werden. Da die Coefficienten constante Grössen sind, so folgt, dass, wenn B positiv ist, und die darin befindlichen Coefficienten dasselbe Vorzeichen haben, wie die entsprechenden Coefficienten von A, die n verschiedenen Werthe von B alle positiv sind, was mithin ebenso von den n verschiedenen Werthen von k gilt. Stimmen die in B befindlichen Coefficienten mit den entsprechenden Coefficienten in A hinsichtlich des Vorzeichens nicht durchaus überein, so können die n verschiedenen Werthe von B, folglich auch von k, entweder alle negativ, oder positiv, oder ein Theil positiv, ein Theil negativ sein. Nur wenn alle Werthe von k positiv sind, ist die Auflösung anwendbar.

Da die Variablen ξ, ψ, φ u. s. w. nothwendig stets reell sind, so sind auch f, g u. s. w. nothwendig stets reell; und da die constanten Coefficienten in B nothwendig reell sind, so ist B selbst, mithin auch k stets reell. Imaginäre Wurzelwerthe von k können also nur scheinbar sein.

§. 9. Im ersten Absatze dieses Paragraphen kann hinter den

Worten: „Or, comme l'on a $V=H+V'$, et que V' ne contient les variables ξ, ψ, φ etc., qu'à la seconde dimension, il s'ensuit que V sera un minimum ou un maximum" zugesetzt werden: „dans l'état d'équilibre,".

Wenn V im Zustande des Gleichgewichts ein Maximum ist, so ist V', also auch B stets negativ, und alle Werthe von k sind folglich auch negativ; daher enthalten die Werthe der Variablen ξ, ψ, φ u. s. w. nur solche Glieder, wo t ausserhalb des Sinus- und Cosinuszeichens steht, und das Gleichgewicht kann nicht stabil sein.

§. 10. Wenn V im Zustande des Gleichgewichts weder Maximum, noch Minimum ist, so sind einige von den Werthen von $\sqrt{k}$ nothwendig imaginär; von den übrigen reellen können einige gleich sein. Dann enthalten die entsprechenden Glieder der Werthe von ξ, ψ, φ u. s. w. reelle Exponentialgrössen von t und algebraische Potenzen des Kreisbogens; und das Gleichgewicht kann nur bedingungsweise stabil werden, wenn die Coefficienten dieser Glieder Null werden, was vom Initialzustande des Systems abhängt.

§. 11. Die sehr kleinen Excursionen der verschiedenen Körper des Systems sind in §. 1. mit α, β, γ bezeichnet worden, wo man α, β, γ als die respectiven Excursionen eines jeden derselben nach den Richtungen der Axen der x, y, z betrachten muss. Man hat für α den Werth:

$$\alpha = a1\xi + a2\psi + a3\varphi + \ldots + a'1\xi^2 + \ldots = (a1 + a2f' + a3g')E'\sin(\pi+\varepsilon')$$
$$+ (a1+a2f''+a3g'')E''\sin(\pi+\varepsilon'') + (a1+a2f'''+a3g''')E'''\sin(\pi+\varepsilon''')$$
$$+ \ldots + (a'1 + a'2f'^2 + a'3g'^2)E'^2\sin^2(\pi+\varepsilon') + \ldots$$

und für β und γ ganz analoge Werthe. Der Ausdruck für eine ganze geradlinige Schwingung jedes Körpers m des Systems ist also:

$$2\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$
$$= 2\sqrt{[(A'^2+B'^2+C'^2)E'^2\sin^2(\pi+\varepsilon') + (A''^2+B''^2+C''^2)E''^2\sin^2(\pi+\varepsilon'')}$$
$$+ 2(A'A''+B'B''+C'C'')E'E''\sin(\pi+\varepsilon')\sin(\pi+\varepsilon'')$$
$$+ (A'''^2+B'''^2+C'''^2)E'''^2\sin^2(\pi+\varepsilon''')$$
$$+ 2(A'A'''+B'B'''+C'C''')E'E'''\sin(\pi+\varepsilon')\sin(\pi+\varepsilon''')$$
$$+ 2(A''A'''+B''B'''+C''C''')E''E'''\sin(\pi+\varepsilon'')\sin(\pi+\varepsilon''') + \ldots],$$

wo

$$A' = a1 + a2f' + a3g', \quad B' = b1 + b2f' + b3g', \ldots$$
$$A'' = a1 + a2f'' + a3g'', \quad B'' = b1 + b2f'' + b3g'', \ldots$$
. . . . . .

ξ, ψ, φ u. s. w. bezeichnen halbe Schwingungen eines oder mehrerer Körper des Systems, mittelst deren die halben Schwingungen sämmtlicher Körper bestimmt werden. Von 2ξ, 2ψ, 2φ kann gesagt werden, dass sie als aus einfachen Schwingungen, welche denen der Pendel von den Längen $\frac{g}{k'}$, $\frac{g}{k''}$, $\frac{g}{k'''}$ u. s. w. analog sind, zusammengesetzt angesehen werden können; aber nicht von den Schwingungen jedes Körpers m des Systems, wie obiger Ausdruck für $2\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ zeigt, in welchem nur auf die ersten Potenzen von ξ, ψ, φ u. s. w. in den Werthen von α, β, γ Rücksicht genommen worden ist; auch nicht von 2α, 2β, 2γ.

Alle Folgerungen, welche Lagrange in diesem Paragraphen aus seiner Behauptung zieht, sind mithin falsch, wie schon Bertrand, in einer anderen Beziehung, bemerkt hat.

§. 12. Wenn die Werthe der Grössen $\sqrt{k'}$, $\sqrt{k''}$, $\sqrt{k'''}$ u. s. w. incommensurabel sind, so sind es auch die Schwingungszeiten, und der Körper, welcher die Excursionen ξ macht, kann nur in dem Falle wieder in seine frühere Lage zurückkehren, wenn die Coefficienten E', E'', E''' u. s. w. alle, mit Ausnahme eines einzigen, Null sind.

§. 13. Wenn in der Bedingungsgleichung $L=0$ die Glieder der ersten Dimension fehlen, so ist nicht nur $A=0$, sondern auch jeder seiner ersten partiellen Differentialquotienten.

Wenn man die in diesem Paragraphen angegebene Methode der Lösung von Aufgaben, welche Bedingungsgleichungen enthalten, in denen die Glieder der ersten Dimension fehlen, anwendet, so erhält man Differentialgleichungen von derselben Form, wie in §. 4., mit dem Unterschiede jedoch, dass sie die unbestimmten Coefficienten λ, μ u. s. w. enthalten. Lagrange schlägt vor, diese zu eliminiren oder zu bestimmen, wenn sie als constant angesehen werden können; da man aber nur so viel Gleichungen hat, als unbekannte Grössen k, f, g u. s. w., so ist es schwer, einzusehen, wie hier eine Elimination oder Bestimmung von λ, μ u. s. w. möglich sein soll.

§. 14. Es ist sonderbar, dass Lagrange, indem er die Kraft Φ als von einem Körper zum anderen variabel betrachtet, nicht

auf die Ursache dieser Veränderlichkeit zurückgeht, sondern äusserlich Φ als eine Function der Zahl jedes Körpers in der Reihe ansieht. Offenbar ist Φ auch Function der Masse der sich anziehenden oder abstossenden Körper; und indem man nur die Wirkung der zunächst an einander gelegenen Körper in Betracht zieht, und die der von einander entfernteren wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt, hat man:

$$V = S\Pi Dm + S_1 DmDm \int \Phi \partial Ds,$$

wo ${}_1DmDm$ das Product der Massen zweier zunächst gelegenen Körper vorstellt.

§. 16. Der Werth des vollständigen Integrals SyD^2x ist:

$$SyD^2x = y_i Dx_i - x_i Dy_i - y_0 Dx_0 + x_{i0} Dy_0 + Sx_n D^2y.$$

§. 19. Dx, Dy, Dz sind Elemente von Linien. a, b, c sind in der Zeit constant, aber im Raume veränderlich, weil sie die Coordinaten der verschiedenen Körper des Systems für die Lage des Gleichgewichts sind. Daher kann man sie nicht nach ∂, wohl aber nach D differenziiren. ξ, η, ζ dagegen sind sowohl in der Zeit, wie im Raume veränderlich; sie können also ebensowohl nach ∂, als nach D, differenziirt werden. Die Werthe von Dx, Dy, Dz sind mithin $Da + D\xi$, $Db + D\eta$, $Dc + D\zeta$.

Φ kann, als Function von Ds, $= Ds^n$ gesetzt werden; also

$$\Phi = Ds^n = (Df + \alpha)^n = Df^n + n\alpha Df^{n-1} = F + \frac{F'}{Df}\alpha,$$

indem man die sehr kleine Grösse $\frac{Da}{Df}D\xi + \frac{Db}{Df}D\eta + \frac{Dc}{Df}D\zeta$ mit α bezeichnet und deren zweite und höhere Potenzen vernachlässigt. Folglich ist

$$\frac{\Phi}{Ds} = Ds^{n-1} = (Df + \alpha)^{n-1} = Df^{n-1} + (n-1)\alpha Df^{n-2} = \frac{F}{Df} + \frac{F' - F}{Df^2}\alpha.$$

§. 21. Man kann den Gleichungen dieses Paragraphen nach der Anmerkung zu §. 14. folgende Form geben:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} Dm + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2}\xi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial b}\eta + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial c}\zeta\right) Dm$$

$$- {}_1DmDmD_1\left[\frac{FD\xi}{Df} - Ga'\left(\frac{a'D\xi}{Df} + \frac{b'D\eta}{Df} + \frac{c'D\zeta}{Df}\right)\right] = 0,$$

wo ${}_1DmDm$ das Product aus der Masse des beliebigen Körpers

Dm in die Masse des zunächst vorhergehenden ${}_1Dm$ vorstellt. Daher kann man obige Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial a^2}\xi+\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\partial b}\eta+\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\partial c}\zeta$$

$$-{}_1DmD_1\left[\frac{FD\xi}{Df}-Ga'\left(\frac{a'D\xi}{Df}+\frac{b'D\eta}{Df}+\frac{c'D\zeta}{Df}\right)\right]=0,$$

wo sich der Coefficient ${}_1Dm$ auf die Masse des vorgehenden Körpers bezieht, verglichen mit dem Körper, auf welchen sich die in den anderen Gliedern enthaltenen Grössen beziehen.

Die beiden anderen Gleichungen werden ebenso behandelt.

§. 22. Wegen des in der Anmerkung zu §. 14. gegebenen Werthes von V erhält man folgenden Werth von F:

$$F=$$

$$\sqrt{[S\left(\frac{\partial\Pi}{\partial a}\cdot\frac{1}{{}_1Dm}\right)+A]^2+[S\left(\frac{\partial\Pi}{\partial b}\cdot\frac{1}{{}_1Dm}\right)+B]^2+[S\left(\frac{\partial\Pi}{\partial c}\cdot\frac{1}{{}_1Dm}\right)+C]^2}.$$

Wenn dagegen die Entfernungen Ds gegeben und unveränderlich sind, so hat λ den Werth:

$$\sqrt{(S\frac{\partial\Pi}{\partial a}Dm+A)^2+(S\frac{\partial\Pi}{\partial b}Dm+B)^2+(S\frac{\partial\Pi}{\partial c}Dm+C)^2}.$$

§. 23. Die unabhängigen Variablen ξ, ψ, φ u. s. w. in §. 4. sind blos in der Zeit veränderlich, und werden daher alle blos mittelst ξ und Constanten bestimmt. Dagegen bezeichnen ξ, η, ζ in diesem Paragraphen, wie α, β, γ in §. 1., die Excursionen der verschiedenen Körper des Systems nach den Richtungen der Axen der x, y, z, und sind also in der Zeit, wie im Raume, veränderlich; sie können also als Producte einer blossen Function von t und einer nur im Raume veränderlichen Grösse dargestellt werden.

§. 24. Die erste Gleichung des vorigen Paragraphen mit X, Y, Z liefert beim Entwickeln der Differenzen, wenn die Coefficienten constant sind:

$$(k-\frac{\partial^2\Pi}{\partial a^2})\frac{X}{{}_1Dm}-\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\partial b}\frac{Y}{{}_1Dm}-\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\partial c}\frac{Z}{{}_1Dm}=\frac{F-Ga'^2}{Df}(X_1-2X+{}_1X)$$

$$-\frac{Ga'b'}{Df}(Y_1-2Y+{}_1Y)-\frac{Ga'c'}{Df}(Z_1-2Z+{}_1Z);$$

wenn die Coefficienten aber veränderlich sind:

$$(k-\frac{\partial^2\Pi}{\partial a^2})\frac{X}{{}_1Dm}-\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\partial b}\frac{Y}{{}_1Dm}-\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\partial c}\frac{Z}{{}_1Dm}=\frac{F-Ga'^2}{Df}(X_1-X)$$

$$+{}_1\left(\frac{F-Ga'^2}{Df}\right)({}_1X-X)-\frac{Ga'b'}{Df}(Y_1-Y)-{}_1\left(\frac{Ga'a'}{Df}\right)({}_1Y-Y)$$

$$-\frac{Ga'c'}{Df}(Z_1-Z)-{}_1\left(\frac{Ga'c'}{Df}\right)({}_1Z-Z).$$

Die Werthe von X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1} sind von der Form:

$$AX_0+BY_0+CZ_0+A'X_1+B'Y_1+C'Z_1,$$

wo A, B, C rationale, ganze Functionen des $(n-1)$sten Grades von k sind, und A', B', C' eben solche Functionen vom $n$ten Grade.

Da man beim Eliminiren der Grössen X_1, Y_1, Z_1 aus den drei linearen Gleichungen von der Form $A'X_1+B'Y_1+C'Z_1=0$ eine Gleichung auf k vom $3n$ten Grade erhält, so kann man den Werth dieser Grössen aus diesen Gleichungen nur bestimmen, wenn eine derselben als gegeben betrachtet wird.

§. 25. Auch hier haben die vollständigen Integrale ξ_1, ξ_2 u. s. w., η_1, η_2 u. s. w., ζ_1, ζ_2 u. s. w. doppelt so viel willkührliche Constanten E', E'' u. s. w., ε', ε'' u. s. w., als die Anzahl der Variablen beträgt: nämlich bei $3n$ Variablen $6n$ willkührliche Constanten.

Lagrange sagt, es sei unmöglich, dass das System jemals wieder seine erste Lage annehme, wenn alle Werthe von k incommensurabel sind. Offenbar meint er die Werthe der Wurzeln von k (vergl. §. 12.).

Für $t=0$ sind die Werthe von $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$:

$$XE\cos\varepsilon\sqrt{k},\quad YE\cos\varepsilon\sqrt{k},\quad ZE\cos\varepsilon\sqrt{k}.$$

Wendet man das in §. 11. Absatz 3, 4, 5 Gesagte auf den hier behandelten Fall an, so reducirt es sich auf folgende Hauptsätze: Wenn in den vollständigen Werthen von ξ, η, ζ alle Coefficienten E', E'' u. s. w., mit Ausnahme eines einzigen, Null sind, so machen alle Körper des Systems in der Richtung der Axen der x, y, z einfache Schwingungen, welche denen eines und desselben Pendels analog sind; und jeder Körper ist so vieler verschiedener einfacher Schwingungen fähig, als die Anzahl der Werthe von k beträgt, also $3n$. Da aber die demselben Werthe von k entsprechenden einfachen Schwingungen der verschiedenen Körper, obwohl den einfachen Schwingungen eines und desselben Pendels analog, doch verschieden sind, wegen der verschiedenen

Werthe von X_1, X_2, X_3 u. s. w., so ist die Anzahl der verschiedenen einfachen Schwingungen aller Körper des Systems in der Richtung derselben Axe $3n^2$. Gleichzeitig aber mit den anderen kann jeder Körper des Systems nur eine einfache Schwingung machen, so dass ein und dasselbe System so vieler verschiedenen einfachen Schwingungen fähig ist, als es bewegliche Körper giebt. Im Allgemeinen aber werden alle irgend möglichen Schwingungen eines Systems nur zusammengesetzt sein können aus allen einfachen Schwingungen, welche die Natur des Systems gestattet.

§. 26. Durch einen sehr störenden Schreib- oder Druckfehler liest man am Ende dieses Paragraphen: et prenant pour E et ε différentes constantes arbitraires E_1, E_2, etc., ε_1, ε_2, etc., qui dépendent de l'état initial du système. statt: et prenant pour E et ε différentes constantes arbitraires E', E'', etc., ε', ε'', etc., qui dépendent de l'état initial du système. Am besten bliebe aber dieses Satzglied ganz weg, und es müsste dann am Anfange des folgenden Paragraphen gelesen werden: Pour déterminer de la manière la plus simple les constantes arbitraires E', E'', etc., ε', ε'' etc. qui dépendent de l'état initial du système, je reprends etc.

Man erhält nach der Anmerkung zu §. 14. folgende Gleichung:

$$\frac{\partial^2 . S(X\xi + Y\eta + Z\zeta)\frac{1}{{}_1Dm}}{\partial t^2} + kS(X\xi + Y\eta + Z\zeta)\frac{1}{{}_1Dm} = 0.$$

§. 28. Die Darstellung in dem ersten Absatze dieses Paragraphen lässt Lagrange's ausgezeichnete Klarheit ganz vermissen. Statt: Il est facile de voir, par la nature du calcul, que si l'on substitue dans cette équation pour k une des racines de l'équation en k que nous avons dénotées par k', k'', k''', etc. (art. 25.), on devra avoir un résultat identique avec les expressions de ξ, η, ζ de l'art. 26., de sorte qu'en substituant ces mêmes expressions dans l'équation précédente, elle devra devenir absolument identique pour toutes les valeurs de k. könnte es kurz heissen: Il est facile de voir que si l'on substitue dans cette équation les expressions de ξ, η, ζ de l'art. 26., elle devra devenir absolument identique pour toutes les valeurs de k.

§. 32. Im vierten Absatze dieses Paragraphen muss gelesen werden: Mais la valeur de F pourra varier d'un corps à lautre etc. statt: Mais la valeur de F' pourra varier d'un corps à l'autre etc.

Lagrange sagt, wenn $\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0$ und Da für alle auf einander folgende Körper gleich sei, so könne man F und F' aus der

Erfahrung bestimmen, ohne das Gesetz der Function Φ zu kennen; gleich darauf aber verbessert er sich, indem er sagt, dass man F' aus F nur ableiten könne, wenn man das Elasticitätsgesetz der Sehne kennt. Wenn nämlich $F=A$ ist, so ist $F'=mA$; man muss also m kennen, um F' bestimmen zu können.

§. 33. Wenn alle Körper Dm des linearen Systems unter einander gleich und schwerelos sind, so ist Φ blos als Function von Ds zu betrachten, und man hat in §. 14.:

$$V = S\Pi Dm + S\int \Phi \partial Ds,$$

und alle Formeln Lagrange's bleiben ungeändert.

§. 34. Da man hier die Bedingungsgleichung $X_0=0$ berücksichtigt, so muss man im vorigen Paragraphen $Dm=\frac{M}{n+2}$ setzen, wodurch die drei Gleichungen für X, Y, Z die allgemeine Form

$$\frac{lMk}{(n+1)(n+2)F'}X + D^2{}_1X = 0$$

annehmen, also

$$\sqrt{k} = 2\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)F'}{lm}}\sin\frac{\varphi}{2}$$

wird.

Ferner wird der Werth von $\sqrt{k}$ durch Substitution von $\varphi=\frac{\varrho\pi}{n+1}$:

$$\sqrt{k} = 2\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)F'}{lM}}\sin\frac{\varrho\pi}{2(n+1)},$$

wo man für ϱ alle ganzen Zahlen von 1 bis n einschliesslich setzen kann: denn $\varrho=0$ würde $\sqrt{k}=0$ geben, was nicht möglich ist; auch würde $\varrho=0$, sowie $\varrho=n+1$ für X, Y, Z den Werth Null geben, und folglich der Werth von $\sqrt{k}$ aus der Gleichung

$$\frac{lMk}{(n+1)(n+2)F'}X_r - 4\sin^2\frac{\varphi}{2}.X_r = 0$$

gar nicht mehr abgeleitet werden können. Ueber $n+1$ hinaus würden dieselben Sinusse von $\frac{\varrho\pi}{2(n+1)}$ wiederkehren, wenn gleich in umgekehrter Ordnung, und später mit entgegengesetztem Vorzeichen. Hieraus schliesst man, dass bei $\varrho=n$ die Grenze der brauchbaren Werthe von ϱ ist.

§. 35. Am Anfange dieses Paragraphen muss gelesen werden: Comme les valeurs de $\sqrt{k}$ sont incommensurables entre elles etc. statt: Comme les valeurs de k sont incommensurables entre elles etc.

Die Werthe von ξ, η, ζ sind:

$$\xi = E \sin r\varphi \sin(2\sqrt{(n+1)(n+2)}\, h't \sin\frac{\varphi}{2} + \varepsilon),$$

$$\eta = E \sin r\varphi \sin(2\sqrt{(n+1)(n+2)}\, ht \sin\frac{\varphi}{2} + \varepsilon),$$

$$\zeta = E \sin r\varphi \sin(2\sqrt{(n+1)(n+2)}\, ht \sin\frac{\varphi}{2} + \varepsilon).$$

§. 36. Das Integralzeichen S zeigt an, dass man die Summe aller Glieder nehmen muss, welche den Werthen von s, von 1 bis n, entsprechen.

Für ξ_r hat man den Werth:

$$\xi_r = \Sigma \frac{2\sin r\varphi}{n+1} \left\{ \begin{array}{l} S\alpha_s \sin s\varphi \cdot \cos(2\sqrt{(n+1)(n+2)}\, h't \sin\frac{\varphi}{2}) \\ + S\alpha_s \sin s\varphi \cdot \dfrac{\sin(2\sqrt{(n+1)(n+2)}\, h't \sin\frac{\varphi}{2})}{2\sqrt{(n+1)(n+2)}\, h' \sin\frac{\varphi}{2}} \end{array} \right\},$$

und ebenso für $\frac{g}{k}$:

$$\frac{g}{k} = \frac{g}{4(n+1)(n+2)h'^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

und für $\frac{g}{k1}$ und $\frac{g}{k2}$:

$$\frac{g}{k1} = \frac{g}{k2} = \frac{g}{4(n+1)(n+2)h^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Vergl. mit dem in diesem Paragraphen Gesagten Daniel Bernoulli's Gesetz in §. 11. Man ersieht zugleich, wie Lagrange dort zu der Behauptung verführt worden ist, ein und dasselbe System sei so vieler verschiedener einfacher Schwingungen fähig, als es bewegliche Körper giebt.

§. 37. Die Betrachtungen dieses Paragraphen beziehen sich auf eine gespannte Sehne, welche mit Schwingungsknoten schwingt.

Im zweiten Absatze dieses Paragraphen muss statt: Or il est facile de voir que la formule $2\lambda(n+1)\pm r$ peut représenter tous les nombres entiers, positifs ou négatifs, en supposant r compris entre 0 et $n+1$; car ayant un nombre entier quelconque, si on le divise par $2(n+1)$ jusqu'à ce que le reste, positif ou négatif, soit moindre que $n+1$, etc. gelesen werden: Or il est facile etc. jusqu'à ce que le reste, positif ou négatif, soit moindre que $n+2$, etc.

Die Ausdrücke für die beiden Variablen η und ζ unterscheiden sich von dem für ξ nicht nur durch die Anfangswerthe β, $\dot{\beta}$ und γ, $\dot{\gamma}$, welche an der Stelle von α, $\dot{\alpha}$ sich befinden, sondern auch durch die Grösse h, welche h' vertritt. Vergl. §. 36.

§. 39. Die Methode des §. 34. ist hier nicht anwendbar, indem man X_r nicht $= H\sin(r\varphi+e)$ setzen darf: denn die für ξ_r, η_r, ζ_r erhaltenen Werthe würden nicht von der Mitte des Fadens, wo sie am grössten sein müssen, nach beiden festen Enden hin gleichmässig abnehmen, so dass sie in gleichen Entfernungen von der Mitte gleich wären, wie es bei entsprechenden Initialzuständen, unter der Voraussetzung der Gleichheit aller Massen Dm und aller Entfernungen Df, ganz streng stattfinden muss.

§. 40. Auch hier sind die Entfernungen Ds unveränderlich, und es tritt also der unbestimmte Coefficient λ an die Stelle der Kraft Φ. λ stellt die Spannung des Fadens vor, und ist eine in der Zeit und im Raume veränderliche Grösse. Bezeichnen wir den Werth von λ für die Lage des Gleichgewichts mit F, so ist $F=gSDm$, wo SDm von unten nach oben bis zu dem Körper, dessen Schwingungen man betrachtet, gerechnet wird, also eine Function der ziehenden Massen, und nimmt nach oben immer mehr zu. Da F am unteren Ende des Fadens $=0$ sein muss, so kann dieses gar keinen Körper tragen.

§. 41. Da weder das untere, noch das obere Ende des Fadens einen Körper trägt, so ist

$$Df = Da = \frac{l}{n+1},$$

ferner

$$SDm = rDm = \frac{rM}{n}, \quad F = \frac{grM}{n}.$$

Die Gleichung auf X des §. 39. liefert folglich:

$$\frac{lk}{g(n+1)}X_r + D[(r-1)DX_{r-1}] = 0.$$

Zur Bestimmung der n Werthe von k hat man die Gleichung:

$$1-\frac{n}{n+1}\frac{lk}{g}+\frac{n(n-1)}{4(n+1)^2}\frac{l^2k^2}{g^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{4.9(n+1)^3}\frac{l^3k^3}{g^3}+\ldots.=0.$$

§. 42. Aus der Gleichung

$$Da^2=(Da+D\xi)^2+D\eta^2+D\zeta^2$$

folgt nicht:

$$D\xi=-\frac{D\eta^2+D\zeta^2}{2Da},$$

sondern:

$$D\xi^2+2Da\,D\xi=-D\eta^2-D\zeta^2,$$

mithin:

$$D\xi=-Da+\sqrt{Da^2-D\eta^2-D\zeta^2},$$

und, da $D\xi=0$ ist,

$$Da=\sqrt{Da^2-D\eta^2-D\zeta^2},$$
$$Da^2=Da^2-D\eta^2-D\zeta^2,$$

folglich, da $D\eta$ und $D\zeta$ reell sind,

$$D\eta^2=0,\quad D\zeta^2=0\ *).$$

Der Werth von Φr ist:

$$\Phi_r=[1-(r-1)\frac{lk^{(\varrho)}}{g(n+1)}+\frac{(r-1)(r-2)}{4}\left(\frac{lk^{(\varrho)}}{g(n+1)}\right)^2$$
$$-\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{4.9}\left(\frac{lk^{(\varrho)}}{g(n+1)}\right)^3+\ldots.]X_1^{(\varrho)},$$

wo X_1 als eine ganze rationale Function von k gegeben gedacht wird.

Der Werth von η_r ist:

$$\eta_r=\Sigma\left[\frac{\Phi_r S(\beta_s\Phi_s)}{S(\Phi_s)^2}\cos t\sqrt{k^{(\varrho)}}\right]+\Sigma\left[\frac{\Phi_r S(\dot\beta_s\Phi_s)}{S(\Phi_s)^2\sqrt{k^{(\varrho)}}}\sin t\sqrt{k^{(\varrho)}}\right].$$

Die Gleichung auf $k^{(\varrho)}$ kann dargestellt werden durch:

$$\frac{\Phi(n+1)}{X_1^{(\varrho)}}=0.$$

§. 43. Wenn man die Formel des vorigen Paragraphen:

$$D\xi=-\frac{D\eta^2+D\zeta^2}{2Da}$$

---

*) Ich würde hier und anderwärts Einiges zu bemerken haben, wenn ich mich nicht bei dieser Abhandlung absichtlich aller Bemerkungen enthalten wollte, alles Weitere dem Leser anheim stellend. G.

als richtig ansieht, so folgt daraus:

$$\xi = A - S\frac{D\eta^2 + D\zeta^2}{2Da},$$

wo A die willkührliche Constante der Integration ist;

$$A = (S\frac{D\eta^2 + D\zeta^2}{2Da}).$$

Man sieht nicht ein, warum Lagrange die willkührliche Constante mit ξ_1 bezeichnet.

Setzt man dagegen

$$D\xi = -Da + \sqrt{Da^2 - D\eta^2 - D\zeta^2},$$

so lässt sich der in diesem Paragraphen gegebene Beweis, dass der Theil von V, welcher die Quadrate von $D\eta$ und $D\zeta$ enthält, nothwendig stets positiv ist, nicht durchführen.

Man sieht übrigens leicht ein, dass jedenfalls aus diesem Beweise nur folgt, dass die Variablen $D\eta$, $D\zeta$, nicht aber, dass ξ, η, ζ innerhalb gegebener Grenzen liegen, welche vom Initialzustande des Systems abhängen, worauf es ankam.

§. 45. Wenn $n = \infty$ wird, während ϱ endlich bleibt, so wird $\frac{\varphi}{2} = \frac{\varrho\pi}{2(n+1)} = 0$, also $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2}$, und $2(n+1)\sin\frac{\varphi}{2} = \varrho\pi$, und ebenso $2\sqrt{(n+1)(n+2)}\sin\frac{\varphi}{2} = \varrho\pi$. Wenn n und ϱ beide unendlich werden, so wird $2(n+1)\sin\frac{\varrho\pi}{2(n+1)} = 2(n+1)\sin\frac{\pi}{2} = 2(n+1) = \infty = \varrho\pi$, gegen Lagrange's Behauptung; und ebenso wird:

$$2\sqrt{(n+1)(n+2)}\sin\frac{\varphi}{2} = 2\sqrt{(n+1)(n+2)}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\sqrt{(n+1)(n+2)} = \infty = \varrho\pi.$$

Im ersten Satze dieses Paragraphen muss statt: de sorte que les racines de l'équation en k, qui étaient toutes incommensurables entre elles, tant que le nombre n des corps mobiles était fini, deviennent toutes commensurables lorsque n est infini, etc. gelesen werden: de sorte que les valeurs de $\sqrt{k}$ qui étaient toutes incommensurables entre elles, etc.

Im zweiten Absatze dieses Paragraphen muss statt: Il est vrai que, le nombre ϱ pouvant aussi devenir infini, il y aurait

des cas où etc. gelesen werden: Il est vrai que, le nombre ϱ devant aussi devenir infini, etc.

Da $n=\infty$ ist, so kann man in der Gleichung auf X des §. 33.:

$$\frac{lMk}{(n+1)(n+2)F'}X+D^2{}_1X=0$$

$(n+1)(n+2)=(n+1)^2$ setzen.

Wenn n unendlich wird, so sind die Schwingungen der Saite synchron mit denen eines einfachen Pendels von der Länge $\frac{g}{k}$, wo man für k den einfachsten Werth zu nehmen hat, in welchem $\varrho=1$ gesetzt wird. Statt $\frac{g}{k}$ könnte man auch $\frac{g}{\mu^2}$ setzen, wo $\mu=\pi\sqrt{\frac{F'}{lM}}$ für Longitudinalschwingungen und $=\pi\sqrt{\frac{F}{lM}}$ für Transversalschwingungen ist.

§. 47. Wenn $\varrho=1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ ist, so werden die entsprechenden Werthe von k sich wie $1:4:9:16:25$ verhalten, also die entsprechenden Pendellängen wie $1:\frac{1}{4}:\frac{1}{9}:\frac{1}{16}:\frac{1}{25}$, mithin die Schwingungszeiten wie $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$, so dass der Grundton, die Octave, Duodezime, zweite Octave, Vicesime u. s. w. gehört werden.

§. 48. Da hier $n=\infty$ ist, so kann man in der Formel für ξ_r statt $\sqrt{(n+1)(n+2)}$ kürzer $n+1$ setzen, wodurch man genau Lagrange's Formel erhält.

Obgleich r und s eigentlich nur die Werthe $1, 2, 3$ u. s. w., n haben, so kann man ihnen doch auch die Werthe 0 und $n+1$ beilegen, da die Hauptformel

$$\alpha_r=S\alpha_s\Sigma\frac{2\sin r\varphi}{n+1}\sin s\varphi$$

unter dieser Voraussetzung richtig bleibt. Sie liefert für $r=0$: $\alpha_0=0$ und für $r=n+1$: $\alpha_{n+1}=0$, wie es sein muss. Dagegen hat man, für $r=0$ und für $r=n+1$,

$$\Sigma\sin{}^2r\varphi=0.$$

Wenn man daher in den Formeln

$$\Sigma \frac{2\sin[2\lambda(n+1)\pm r]\varphi}{n+1}\sin r\varphi = \pm 1$$

und

$$\Sigma \frac{\sin N\varphi \times \sin r\varphi}{n+1} = \pm \frac{1}{2}$$

$r = 0$ oder $r = n+1$ setzt, so gehen sie über in:

$$\Sigma \frac{2\sin[2\lambda(n+1)\pm r]\varphi}{n+1}\sin r\varphi = 0$$

und

$$\Sigma \frac{\sin N\varphi \times \sin r\varphi}{n+1} = 0.$$

§. 49. In den Formeln

$$S\alpha_s \Sigma \frac{\sin[r+(n+1)h't]\varphi}{n+1}\sin s\varphi = \pm \tfrac{1}{2}\alpha_s,$$

wo

$$s = \pm[r+(n+1)h't - 2\lambda(n+1)];$$

und

$$S\alpha_{s'} \Sigma \frac{\sin[r-(n+1)h't]\varphi}{n+1}\sin s'\varphi = \pm \tfrac{1}{2}\alpha_{s'},$$

wo

$$s' = \pm[r-(n+1)h't - 2\lambda'(n+1)]$$

ist, können r, s und s' nur die Werthe 1, 2, 3 u. s. w., n haben, aber nicht 0 und $n+1$; λ ist irgend eine ganze, positive Zahl oder Null, und λ' irgend eine ganze, negative Zahl oder Null.

r, s und s', welche ursprünglich nur den Rang der Körper bezeichnen und daher veränderliche Zahlen sind, werden hier zugleich Functionen von t. Sie beziehen sich in diesen Formeln auf ein und denselben Körper und haben insofern gleichen Werth; aber als Functionen von t haben sie verschiedene Werthe.

§. 51. Am Ende dieses Paragraphen liest man statt: On voit que ces différents cas se réduisent à déterminer les abscisses a ou a', en ajoutant ou en retranchant de l'abscisse x la ligne $lh't$, de manière que, lorsqu' elle passera l'une ou l'autre extrémité de l'axe l, elle soit repliée en arrière et comme réfléchie par des obstacles placés à ces deux extrémités, etc. richtiger: On voit que etc....., elle soit repliée en arrière et comme réfléchie par des obstacles placés aux deux dernières extrémités, etc.

§. 53. Der Werth von $D\xi''_x$ ist:

$$D\xi''_x = \frac{Da}{2lh'}\left(\dot{\alpha}_{x+\frac{l}{2(n+1)}+lh't} - \dot{\alpha}_{x+\frac{l}{2(n+1)}-lh't}\right)$$

$$= \frac{Dx}{2lh'}\left(\dot{\alpha}_{x+lh't} - \dot{\alpha}_{x-lh't}\right),$$

indem man Dx statt Da setzt, was erlaubt ist, weil

$$S\left(\dot{\alpha}_{x+lh't} - \dot{\alpha}_{x-lh't}\right) Dx = DaS\left(\dot{\alpha}_{x+lh't} - \dot{\alpha}_{x-lh't}\right),$$

und $\frac{l}{2(n+1)}$ wegen seiner Kleinheit vernachlässigt, wodurch zugleich das störende Glied $+\frac{1}{2}$ aus den beiden Werthen von N wegfällt.

§. 56. Lagrange versteht hier unter einer Schwingung der Saite einen Hin- und Hergang derselben, so dass alle ihre Theile wieder in dieselbe Lage zurückkehren. Ich habe aber in der Anmerkung zu §. 11. u. s. w. die gewöhnliche Terminologie beibehalten, nach welcher unter einer Schwingung eines Pendels, einer Saite u. s. w. nur ein Hingang verstanden wird, namentlich mit Rücksicht auf solche Schwingungen, wo das Bewegliche nicht wieder seine frühere Lage oder Gestalt annimmt.

§. 58. Im ersten Absatze dieses Paragraphen muss statt: Ainsi, si la corde se partage en deux, trois, quatre etc. parties égales, ces tons seront exprimés par les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc., et seront, par conséquent, à l'octave, à la douzième, à la double octave, à la dix-septième, etc., du ton fondamental. offenbar gelesen werden: Ainsi, etc., et seront, par conséquent, l'octave, la douzième, la double octave, la vingtième, etc., du ton fondamental.

§. 61. Es ist höchst merkwürdig, dass die Bedingung der Unbeweglichkeit des vorderen Endes der tönenden Saite: $\xi = 0$, wenn $x = 0$, die Gleichung

$$f(-lh't) = f(lh't)$$

oder

$$(\int \dot{\alpha} \partial x)_{-lh't} = (\int \dot{\alpha} \partial x)_{lh't}$$

liefert, während offenbar

$$(\int \dot{\alpha} \partial x)_{-lh't} = -(\int \dot{\alpha} \partial x)_{lh't}$$

ist.

Ferner ist auch die Gleichung

$$f(l+lh't) = f(l-lh't)$$

der Construction des §. 54. nur entsprechend für solche Werthe von $h't$, welche $\leqq 1$ sind.

Während also die Functionen Fx und $f'x$ der tönenden Saite für jede beliebige Abscisse mittelst des Initialzustandes der Saite und der Bedingung der Unbeweglichkeit ihrer beiden Enden bestimmt werden können, lässt sich die Function fx mittelst dieser Bedingungen nur für die Abscissen von 0 bis $+2l$ finden.

§. 62. Im Anfange dieses Paragraphen kann man hinter: Comme les formules qui donnent le mouvement d'une corde tendue et chargée d'un nombre indéfini de corps égaux ne sont sujettes à aucune difficulté, parce que le mouvement de chaque corps est déterminé par une équation particulière, il est évident que si l'on peut appliquer ces mêmes formules au mouvement d'une corde uniformément épaisse, en supposant le nombre des corps infini, et leurs distances mutuelles infiniment petites, la loi qui en résultera pour les vibrations de la corde sera entièrement indépendante de son état initial, der Deutlichkeit wegen hinzusetzen: c'est à dire qu'elle aura lieu pour un état initial quelconque;.

Siebenter Abschnitt.

§. 5. Die Gleichung

$$\frac{r^4\partial\psi^2}{\partial t^2} + C^2 \operatorname{tang}^2\psi = 0$$

kann auch stattfinden, wenn

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \quad \psi = \text{const.}, \quad C = 0$$

ist, wo dann der Körper, für $\psi \gtrless 0$, eine geradlinige Bahn oder eine Curve doppelter Krümmung beschreiben würde. Weil aber angenommen worden ist, dass ψ in einem gewissen Augenblicke $=0$ sei, so wird es, weil constant, immer $=0$ sein.

Lagrange sagt, die beiden Bedingungen

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \text{ gleichzeitig in einem Augenblicke}$$

sprächen aus, dass der Körper sich in einem Augenblicke in der

Ebene der x, y bewege; $\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$ sagt aber, dass ψ von t unabhängig, mithin constant sei, dass also der gewählte Augenblick jeder beliebige sein könne, woraus das zu Beweisende, dass der Körper eine Curve einfacher Krümmung beschreibt, sich von selbst ergiebt. Auch zeigt der folgende Beweis, dass aus der Annahme, dass der Körper sich in einem Augenblicke in der Ebene der x, y bewegt, nicht hervorgeht, dass er sich immer in dieser Ebene bewegen müsse.

In dem folgenden, streng richtigen Beweise wird von einer Formel ausgegangen, welche zeigt, dass ψ eine Function von φ ist. Es kann aber auch, während φ veränderlich ist, ψ constant sein, indem $\psi=0^0$ ist: der obige Fall, wo also der Körper ebenfalls eine Curve einfacher Krümmung beschreiben wird. Sind φ und ψ beide constant, so ist die Bahn des Körpers eine gerade Linie. Wäre φ constant und ψ veränderlich, so müsste die Gleichung umgeformt werden, so dass sie den Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}$ enthielte; der Körper würde sich dann in einer auf der Ebene der x, y senkrechten Ebene bewegen.

§. 7. Man kann φ auch unmittelbar mittelst r bestimmen, erhält aber ein Integral von complicirter Form. Setzt man nämlich für $\cos^2\psi$ den aus $\operatorname{tang}\psi=\operatorname{tang} i\sin(\varphi-h)$ abgeleiteten Werth, so wird:

$$\partial\varphi=\frac{D\cos i\partial t}{r^2}[1+\operatorname{tang}^2 i\sin^2(\varphi-h)]=\frac{D\cos i\partial r[1+\operatorname{tang}^2 i\sin^2(\varphi-h)]}{r^2\sqrt{2H-2\int R\partial r-\frac{D^2}{r^2}}},$$

$$\frac{\partial\varphi}{1+\operatorname{tang}^2 i\sin^2(\varphi-h)}=\frac{D\cos i\partial r}{r^2\sqrt{2H-2\int R\partial r-\frac{D^2}{r^2}}}.$$

Setzt man behufs der Integration dieser Gleichung

$$\frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 i\sin^2(\varphi-h)}=x,$$

so wird:

$$\frac{\partial\varphi}{1+\operatorname{tang}^2 i\sin^2(\varphi-h)}=-\frac{\partial x}{2\sqrt{-(1+\operatorname{tang}^2 i)x^2+(2+\operatorname{tang}^2 i)x-1}},$$

$$\int \frac{\partial\varphi}{1+\tang^2 i \sin^2(\varphi-h)}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1+\tang^2 i}} \operatorname{Arc\,tang} \frac{\cot(\varphi-h)-(1+\tang^2 i)\tang(\varphi-h)}{2\sqrt{1+\tang^2 i}} + C,$$

$$\operatorname{Arc\,tang} \frac{\cot(\varphi-h)-(1+\tang^2 i)\tang(\varphi-h)}{2\sqrt{1+\tang^2 i}} + C$$

$$= -2D \int \frac{\partial r}{r^2 \sqrt{2H - 2\int R\partial r - \frac{D^2}{r^2}}};$$

oder, wenn man, für $\varphi = h$, $r = g$ setzt:

$$\operatorname{Arc\,tang} \frac{\cot(\varphi-h)-(1+\tang^2 i)\tang(\varphi-h)}{2\sqrt{1+\tang^2 i}} - 90^0$$

$$= -2D \int_g^r \frac{\partial r}{r^2 \sqrt{2H - 2\int R\partial r - \frac{D^2}{r^2}}},$$

$$\cos i \cot(\varphi-h) - \frac{1}{\cos i}\tang(\varphi-h)$$

$$= 2\tang(90^0 - 2D \int_g^r \frac{\partial r}{r^2 \sqrt{2H - 2\int R\partial r - \frac{D^2}{r^2}}}).$$

§. 10. Der Gleichung

$$Cz + By + Ax = 0$$

entspricht als Bahn des Körpers auch eine durch das Centrum der Kräfte gehende gerade Linie, deren Endpunkte gleichweit vom Centro abstehen, und auf welcher der Körper abwechselnd mit gleichförmig beschleunigter und gleichförmig verzögerter Bewegung hin und her geht. Um diese Bewegung hervorzurufen, braucht man bloss anzunehmen, dass das Beharrungsvermögen in der Richtung der Centralkraft wirke, und dass letztere nicht durch eine im Centro befindliche Masse repräsentirt sei.

§. 11. Um den Fall, wo ψ dauernd $=0$ ist, hier zu subsumiren, hat man nur i und $h=0$ zu setzen, und man erhält $x=\xi$, $y=\eta$, $z=0$.

Die Gleichung $r^2\partial\Phi = D\partial t$ giebt integrirt: $\frac{1}{2}\int r^2\partial\Phi = \frac{D}{2}t$, d. h. den bekannten Lehrsatz, dass die Flächenräume der Sectoren den Zeiten proportional sind.

§. 13. Vergl. §. 67. über die Behauptung, dass in den Ausdrücken $x = \alpha X + \beta Y$ u. s. w. die nur von der Bewegung des Körpers in seiner Bahn abhängigen Grössen von denen, die nur von der Lage der Ebene der Bahn gegen die der Axen der x, y abhängen, getrennt sind.

Zwischen X und Y existirt nur eine Differentialgleichung mit der willkührlichen Constanten C', indem die beiden anderen $= 0$ werden. Führt man in diese Gleichung:

$$\frac{X\partial Y - Y\partial X}{\partial t} = C'$$

die Werthe für X und Y des §. 13. ein, so erhält man:

$$r^2\partial\Phi = C'\partial t,$$

woraus $C' = D$ folgt, wie es sein muss, da

$$C'^2 = A^2 + B^2 + C^2 = D^2$$

ist.

§. 14. Aus den Werthen von α, β, α_1 u. s. w. erhellet, dass die neue Ebene der X, Y die der früheren Bahn des angezogenen Körpers ist, und dass diese Bahn jetzt in eine mit der früheren parallele oder dieselbe unter irgend einem Winkel schneidende Ebene verlegt gedacht wird, so jedoch, dass die Projection der neuen Bahn auf die Ebene der X, Y genau die frühere Bahn ist.

Die Aufgabe, eine gegebene Bahn auf eine beliebige Ebene zu beziehen, ist gleichwohl vollständig gelöst, insofern durch die willkührliche Bestimmung der Constanten h und i die Lage der Ebene der X, Y zu einer beliebigen gemacht wird, durch die willkührliche Bestimmung der Constanten k die Lage von X, Y eine beliebige wird, und durch die beliebigen Werthe der Variablen X, Y, Z die Bahn selbst eine ganz beliebige wird.

§. 15. Die aus den Formeln dieses Paragraphen sich ergebende Bewegung der Himmelskörper in einem Kegelschnitt, insbesondere in einer Ellipse, ist abwechselnd eine gleichförmig beschleunigte und verzögerte, und entspricht insofern der allgemeinen Formel der Dynamik (Abschnitt II., §. 5.). Sie unterscheidet sich im Allgemeinen von der Fallbewegung nur durch die Richtung, und wenn wir auf die Ursachen zurückgehen, durch die Verschie-

denheit der Richtungen, nach welchen die Centripetalkraft und das Beharrungsvermögen wirken. Aber auch die geradlinige Bewegung muss den Formeln dieses Paragraphen entsprechen. Die Formel

$$\frac{D}{r} - \frac{g}{D} = \sqrt{2H + \frac{g^2}{D^2}} \cos(\Phi + K)$$

lässt sich auf die Form

$$D^2 - gr = r\sqrt{2HD^2 + g^2} \cos(\Phi + K)$$

bringen. Bewegt sich der Körper in einer geraden Linie, so ist r veränderlich und Φ entweder $= 0^0$ oder $= 180^0$. Der kleinste Werth von r ist dann $= 0$, und es liefert also obige Formel für diesen Fall $D^2 = 0$, was, da D constant ist, allgemein gelten muss. Also liefert die Formel

$$r = \frac{b}{1 + e\cos\Phi} = \frac{b}{1 \pm e}$$

die Werthe 0 und $\frac{0}{0}$, also 0 und unbestimmt, wie es sein muss.

Uebrigens bezeichnet b in der polaren Kegelschnittsgleichung

$$r = \frac{b}{1 + e\cos\Phi}$$

den halben Parameter des Kegelschnitts.

§. 16. Weil $1 - \frac{r}{a}$ eine veränderliche Grösse ist, deren Gränzen $+e$ und $-e$ sind, so kann es $= e\cos\vartheta$ gesetzt werden.

Bei der Integration der Gleichung

$$\partial\Phi = \frac{\partial\vartheta\sqrt{1 - e^2}}{1 - e\cos\vartheta}$$

sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $e < 1$ (Ellipse), oder $e = 1$ (Parabel), oder $e > 1$ (Hyperbel) ist. Für die Ellipse hat man:

$$\Phi + k = 2\,\text{Arctang}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\text{tang}\,\frac{\vartheta}{2}\right),$$

mithin

$$\sin(\Phi + k) + \cot(\Phi + k)[1 + \cos(\Phi + k)] = \frac{1 + \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.$$

Setzt man nun $\cos(\Phi+k)=x$, also $\sin(\Phi+k)=\sqrt{1-x^2}$ und $\cot(\Phi+k)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, so wird

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-e}{1+e}\left(\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^2,$$

mithin

$$x=\cos(\Phi+k)=\frac{(1-e)(1+\cos\vartheta)^2-(1+e)\sin^2\vartheta}{(1-e)(1+\cos\vartheta)^2+(1+e)\sin^2\vartheta},$$

$$\sin(\Phi+k)=\frac{\sin\vartheta\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos\vartheta},$$

$$\Phi+k=\operatorname{Arc}\sin\frac{\sin\vartheta\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos\vartheta}$$

oder

$$\Phi=\operatorname{Arc}\sin\frac{\sin\vartheta\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos\vartheta}+\text{const.}$$

Für die Parabel hat man:

$$\Phi+k=-\frac{(1+\cos\vartheta)\sqrt{1-e^2}}{\sin\vartheta}=0,$$

mithin:

$$\Phi=\text{const.},$$

und für die Hyperbel:

$$\Phi+k=\frac{1}{2\sqrt{-1}}l.\left(\frac{\cos\vartheta-e+\sin\vartheta\sqrt{e^2-1}}{1-e\cos\vartheta}\right)^2,$$

mithin:

$$\Phi=-\frac{\sqrt{-1}}{2}l.\left(\frac{\cos\vartheta-e+\sin\vartheta\sqrt{e^2-1}}{1-e\cos\vartheta}\right)^2+\text{const.}$$

Leitet man den Werth von Φ in ϑ aus der Gleichung

$$\frac{b}{1+e\cos\Phi}=a(1-e\cos\vartheta)$$

ab, so erhält man für die Ellipse ausser der Gleichung

$$\operatorname{tang}\frac{\Phi}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}$$

auch die Gleichung:

$$\operatorname{tang}\frac{\Phi}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cot\frac{\vartheta}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}}.$$

Für die Parabel erhält man:

$$\cos\Phi=-1,\quad \sin\Phi=0,$$

also

$$\Phi=180^0.$$

Da

$$H=\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{2\partial t^2}-\frac{g}{r}$$

ist, so ist H um so kleiner, je kleiner r ist, und um so grösser, je grösser r ist. Ist $r=0$, so ist $H=-\infty$; ist $r=\infty$, so ist $H=\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{2\partial t^2}$, also positiv. Für $H=0$ wird $r=\frac{2g\partial t^2}{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}$.

Für die geradlinige Bahn ist

$$t-c=\int\sqrt{\frac{r}{2Hr+2g}}\partial r,$$

und wenn man $\sqrt{r}=z$, $r=z^2$, $\partial r=2z\partial z$ setzt,

$$t-c=\int\frac{z^2\sqrt{2}}{\sqrt{g+Hz^2}}\partial z.$$

Ist H positiv, so wird mithin:

$$t-c=\frac{1}{H\sqrt{2}}\left[\sqrt{r}\sqrt{g+Hr}-\frac{g}{2\sqrt{H}}\,l.(2H\sqrt{r}+2\sqrt{H}\sqrt{g+Hr})^2\right].$$

Ist dagegen H negativ, so wird:

$$t-c=\frac{1}{H\sqrt{2}}\left(\sqrt{r}\sqrt{g+Hr}-\frac{g}{\sqrt{-H}}\operatorname{Arctang}\sqrt{\frac{-Hr}{g+Hr}}\right).$$

Ist $H=0$, so wird:

$$t-c=\frac{\sqrt{r^3}}{3g}=\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{8g\partial t^6}{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)^3}}.$$

§. 19. Mit Recht behauptet Lagrange, es sei einerlei, ob man, um die Formeln für Φ auf das Aphelium zu beziehen, 180^0 zu Φ und ϑ addire, oder das Zeichen von e ändere; man erhält so:

$$\sin(\Phi+180^0)=-\sin\Phi=-\frac{\sin\vartheta\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\vartheta},$$

also

$$\sin\Phi = \frac{\sin\vartheta\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\vartheta},$$

$$\cos(\Phi+180^0) = -\cos\Phi = -\frac{\cos\vartheta+e}{1+e\cos\vartheta},$$

also

$$\cos\Phi = \frac{\cos\vartheta+e}{1+e\cos\vartheta},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\Phi+180^0}{2} = -\cot\frac{\Phi}{2} = -\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cot\frac{\vartheta}{2},$$

und folglich

$$\operatorname{tang}\frac{\Phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cot\frac{\vartheta}{2}} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2},$$

wo sich nun die neuen Werthe von Φ und ϑ auf das Aphelium als Ausgangspunkt beziehen.

§. 21. Meine Berechnung liefert:

$$F\frac{\vartheta}{2} = F\frac{u}{2} + \frac{f.u}{2}F'\frac{u}{2} + \frac{\partial.[(f.u)^2F'\frac{u}{2}]}{4\partial u} + \frac{\partial^2.[(f.u)^3F'\frac{u}{2}]}{3.4\partial u^2} + \ldots,$$

$$\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tang}\frac{u}{2} + e\frac{\sin u}{1+\cos u} + e^2\frac{\partial.\frac{\sin^2 u}{1+\cos u}}{2\partial u} + e^3\frac{\partial^2.\frac{\sin^3 u}{1+\cos u}}{2.3\partial u^2} + \ldots.$$

§. 22. Mein Werth von Φ in u weicht von dem Lagrange's etwas ab. Ich erhalte:

$$\Phi = u + e\sin u + e^2\frac{\partial.\sin^2 u}{2\partial u} + e^3\frac{\partial^2.\sin^3 u}{2.3\partial u^2} + \ldots.$$

$$\ldots + 2E(\sin u + e\sin u\cos u + e^2\frac{\partial.(\sin^2 u\cos u)}{2\partial u} + e^3\frac{\partial^2.(\sin^3 u\cos u)}{2.3\partial u^2} + \ldots)$$

$$+\frac{2E^2}{2}(\sin 2u + 2e\sin u\cos 2u + 2e^2\frac{\partial.(\sin^2 u\cos 2u)}{\partial u}$$

$$+4e^3\frac{\partial^2.(\sin^3 u\cos 2u)}{3\partial u^2} + \ldots.) + \frac{2E^3}{3}(\sin 3u + 3e\sin u\cos 3u$$

$$+9e^2\frac{\partial.(\sin^2 u\cos 3u)}{2\partial u} + 9e^3\frac{\partial^2.(\sin^3 u\cos 3u)}{2\partial u^2} + \ldots.) + \ldots$$

Der endliche Werth von U ist:

$$U = \frac{\cos u - E}{1 - 2E\cos u + E^2} = \frac{(2-Ee)\cos u - e}{2(1-e\cos u)}.$$

Note I. des zweiten Bandes, von Puiseux.

Durch Verwandlung der Sinusse und Cosinusse von $\varrho\sqrt{-1}$ in imaginäre Exponentialgrössen in der Gleichung

$$\cos\zeta[\varrho\sqrt{-1}\cos(\varrho\sqrt{-1}) - \sin(\varrho\sqrt{-1})]$$
$$= \sin\zeta[\cos(\varrho\sqrt{-1}) + \varrho\sqrt{-1}\sin(\varrho\sqrt{-1})]$$

erhält man:

$$\sqrt{-1}\cos\zeta\left(\varrho\frac{\varepsilon^{\varrho\sqrt{-1}} + \varepsilon^{-\varrho\sqrt{-1}}}{2} + \frac{\varepsilon^{\varrho\sqrt{-1}} - \varepsilon^{-\varrho\sqrt{-1}}}{2}\right)$$
$$= \sin\zeta\left(\frac{\varepsilon^{\varrho\sqrt{-1}} + \varepsilon^{-\varrho\sqrt{-1}}}{2} + \varrho\frac{\varepsilon^{\varrho\sqrt{-1}} - \varepsilon^{-\varrho\sqrt{-1}}}{2}\right).$$

Puiseux erhält seine Gleichung aus dieser, indem er den Exponenten jeder imaginären Exponentialgrösse mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Dass aber hierdurch die Gleichung unrichtig wird, lehrt folgende Vergleichung beider Werthe. Es müsste nämlich hiernach sein:

$$\frac{\varrho\sqrt{-1}\sin\varrho + \cos\varrho}{\sqrt{-1}\sin\varrho + \varrho\cos\varrho} = \frac{\varrho(\varepsilon^{-\varrho} - \varepsilon^{\varrho}) + \varepsilon^{-\varrho} + \varepsilon^{\varrho}}{\varepsilon^{-\varrho} - \varepsilon^{\varrho} + \varrho(\varepsilon^{-\varrho} + \varepsilon^{\varrho})},$$

also, wenn man die Sinusse, Cosinusse und imaginären Exponentialgrössen in Reihen entwickelt:

$$-\varrho\sqrt{-1}\left(\varrho - \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.\right)\left(\varrho + \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} + \ldots.\right)$$
$$+\varrho^2\sqrt{-1}\left(\varrho - \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.\right)\left(1 + \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} + \ldots.\right)$$
$$-\left(1 - \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} - \ldots.\right)\left(\varrho + \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} + \ldots.\right)$$
$$+\varrho\left(1 - \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} - \ldots.\right)\left(1 + \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} + \ldots.\right)$$
$$= -\varrho\sqrt{-1}\left(\varrho - \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.\right)\left(\varrho + \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} + \ldots.\right)$$
$$+\sqrt{-1}\left(\varrho - \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.\right)\left(1 + \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} + \ldots.\right)$$
$$-\varrho^2\left(1 - \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} - \ldots.\right)\left(\varrho + \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} + \ldots.\right)$$
$$+\varrho\left(1 - \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} - \ldots.\right)\left(1 + \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} + \ldots.\right);$$

folglich

$$\varrho^2\sqrt{-1}\left(\varrho-\frac{\varrho^3}{1.2.3}+\frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5}-\ldots.\right)\left(1+\frac{\varrho^2}{1.2}+\frac{\varrho^4}{1.2.3.4}+\ldots.\right)$$

$$+\varrho^2\left(1-\frac{\varrho^2}{1.2}+\frac{\varrho^4}{1.2.3.4}-\ldots.\right)\left(\varrho+\frac{\varrho^3}{1.2.3}+\frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5}+\ldots.\right)$$

$$=\sqrt{-1}\left(\varrho-\frac{\varrho^3}{1.2.3}+\frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5}-\ldots.\right)\left(1+\frac{\varrho^2}{1.2}+\frac{\varrho^4}{1.2.3.4}+\ldots.\right)$$

$$+\left(1-\frac{\varrho^2}{1.2}+\frac{\varrho^4}{1.2.3.4}-\ldots.\right)\left(\varrho+\frac{\varrho^3}{1.2.3}+\frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5}+\ldots.\right),$$

folglich $\varrho^2=1$ oder $\varrho=0$, während ϱ reell, übrigens aber ganz unbestimmt sein muss.

Hat man $\sin\zeta=0$, $\zeta=0$ oder π, so ist:

$$\frac{2\varrho^3}{1.2.3}+\frac{4\varrho^5}{1.2.3.4.5}+\ldots.=0.$$

Am einfachsten ergiebt sich, dass $a=1$, für $\zeta=0$ oder π, ein Maximum ist, indem man den Werth von ϱ in $\frac{\partial^2\log a}{\partial\zeta^2}$ einführt, wodurch dieser Differentialquotient $=-\infty$ wird.

---

§. 24. Die Gleichung

$$\Theta=T+\frac{T^r}{a}+\ldots.=T\left(1-\frac{b}{4a}+\frac{T^2}{3a}+\frac{T^3}{12a}+\frac{T^4}{60ab}-\ldots.\right)$$

kann ich auf keine Weise erhalten. Die Gleichung

$$T^3+3bT=3b\Theta\left(1+\frac{b}{4a}\right)+\Theta^3\left(1-\frac{b}{2a}\right)-\ldots.$$

liefert, wenn man $T=\Theta\left(1+\frac{b}{4a}\right)$ setzt:

$$\Theta=\frac{4aT}{4a+b}=T\left(1-\frac{b}{4a}+\frac{b^2}{16a^2}-\frac{b^3}{64a^3}+\ldots.\right),$$

und wenn man $T^3=\Theta^3\left(1-\frac{b}{2a}\right)$ setzt:

$$\Theta=T\sqrt[3]{\frac{2a}{2a-b}}=T\sqrt[3]{\left(1+\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b^3}{8a^3}+\ldots.\right)}.$$

Versucht man aber $(1+\frac{b}{4a})^3 = 1-\frac{b}{2a}$ zu setzen, so erhält man die Gleichung:

$$b^3+12ab^2+80a^2b=0,$$

woraus entweder $b=0$ oder $b^2+80a^2=-12ab$ folgt; ersteres ist nur annähernd richtig, letzteres aber falsch, da b^2+80a^2 positiv, $-12ab$ aber negativ ist.

Θ ist nicht nothwendig von dem Range von $\frac{1}{\sqrt{a}}$, aber man kann es, als sehr klein, $=\frac{\Theta}{\sqrt{a}}$ setzen.

Man hat übrigens im Texte folgende Werthe statt der daselbst angegebenen, unrichtigen einzuführen:

$$\tang\frac{\Phi}{2}=\frac{1}{\sqrt{b}}\Theta-\frac{\sqrt{b}}{4a}(\Theta+\frac{1}{3b}\Theta^3),$$

$$X=\tfrac{1}{3}(b-\Theta^2)+\frac{1}{8a}(b^2+\tfrac{1}{3}\Theta^4);$$

und später:

$$r=\tfrac{1}{3}(b+T^2)+\frac{1}{a}\left(\frac{b^2}{8}-\frac{bT^2}{4}-\frac{T^4}{24}+TT'\right),$$

$$X=\tfrac{1}{3}(b-T^2)+\frac{1}{a}\left(\frac{b^2}{8}+\frac{T^4}{24}-TT'\right),$$

$$Y=T\sqrt{b}-\frac{1}{a}\left(\frac{T^3\sqrt{b}}{6}-T'\sqrt{b}\right).$$

§. 28. Der Werth für $\frac{\partial s}{\partial t}$ ist:

$$-\frac{\partial s}{\partial t}=g\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right),$$

folglich ist:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{r}-\frac{\partial s}{g\partial t}.$$

§. 29. Die Reihe für r^2:

$$r^2=r^2+2st+\frac{\partial s}{\partial t}t^2-\frac{gs}{r^3}\frac{t^3}{3}+\ldots.$$

ist vollkommen richtig, weil man sich $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial r}{\partial t}$ und $\frac{\partial s}{\partial t}$

in $\frac{\partial x}{\partial t'}$, $\frac{\partial y}{\partial t'}$, $\frac{\partial z}{\partial t'}$, $\frac{\partial r}{\partial t'}$ und $\frac{\partial s}{\partial t'}$ verwandelt denken kann, indem es gleichgültig ist, ob man x, y, z, r, s als Functionen von t oder von t' ansieht.

§. 31. Die Werthe von A und B sind:

$$A = y\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$B = x\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial x}{\partial t}.$$

§. 33. Man könnte die beiden Gleichungen zur Bestimmung von k eben so gut auch so schreiben:

$$\tang(\Phi + k) = \frac{\tang(\varphi - h)}{\cos i},$$

$$\cos\Phi = \frac{1}{e}\left(\frac{b}{r} - 1\right).$$

Daraus, dass in §. 15. $K = 0$ wird, folgt keineswegs, dass auch in §. 7. $k = 0$ wird, da die Formeln zur Bestimmung von $\Phi + K$ und von $\Phi + k$ ganz verschiedene sind.

§. 35. Wenn die Bahn eine Parabel wäre, so hätte man:

$$a = \infty,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{g}{r},$$

$$r'^2 = r^2 + \frac{gt^2}{r} + (2t - \frac{gt^3}{3r^3})s.$$

§. 39. Man hat zur Bestimmung der Werthe von $\tang i$ und $\tang h$ die beiden Gleichungen:

$$z + (x\sin h - y\cos h)\tang i = 0,$$

$$z' + (x'\sin h - y'\cos h)\tang i = 0.$$

Man hat ferner die Gleichung:

$$Rn - \varrho v = L(\varrho\lambda - Rl) + M(Rm - \varrho\mu),$$

mithin:

$$R = \varrho\frac{\nu + \lambda L - \mu M}{n + lL - mM}.$$

§. 40. Für $t' - t$ erhalte ich, wenn u sehr klein gedacht wird:

$$t'-t=\frac{r+r'}{6\sqrt{g}}\left(\sqrt{r+r'+3u}-\sqrt{r+r'-3u}\right).$$

oder

$$18g(t'-t)^2=(r+r')^2(r+r'-\sqrt{(r+r')^2-9u^2}),$$

Formeln, die sich noch weniger, als die von Lagrange berechneten, zur Bestimmung der Unbekannten R, R', R'' eignen.

§. 43. R' und R'' erhalten folgende Werthe:

$$R'=\frac{-6P_1r^3+Q_1t^2}{(6mr^3-m^3t^2)G},$$

$$R''=\frac{6P_2r^3-Q_2t^2}{(6r^3-t^2)G}.$$

§. 44. Hier werden die Werthe von R' und R'':

$$R'=-\frac{Q_1t^2}{6mG}\left(\frac{1}{\varrho^3}-\frac{1}{r^3}\right),$$

$$R''=\frac{Q_2t^2}{6G}\left(\frac{1}{\varrho^3}-\frac{1}{r^3}\right).$$

§. 45. Die Werthe von R' und R'' in R sind:

$$R'=-\frac{(m-1)\,Q_1}{mQ}R,$$

$$R''=\frac{(m-1)\,Q_2}{Q}R.$$

In §. 46. erhält man dann die Gleichung in R:

$$MR^2+2NR+m\varrho'^2-\varrho''^2-(m-1)r^2+m(m-1)\frac{t^2}{r}=0,$$

wo

$$M=\frac{(m-1)^2}{Q^2}\left(\frac{Q_1^2}{m}-Q_2^2\right)$$

und

$$N=\frac{m-1}{Q}[Q_1\varrho'\cos(C'S')+Q_2\varrho''\cos(C''S'')].$$

§. 47. Ausser den hier angeführten Grössen sind als bekannt auch noch $\cos(CS)$, $\cos(C'S')$ und $\cos(C''S'')$ aufzuführen.

§. 50. Die Werthe von G, Γ, Γ_1 und Γ_2 sind hier alle negativ zu nehmen.

§. 53. Die Werthe von tang h und tang i sind:

$$\text{tang}\, h = \frac{\sin\varphi\partial\psi - \sin\psi\cos\psi\cos\varphi\partial\varphi}{\cos\varphi\partial\psi + \sin\psi\cos\psi\sin\varphi\partial\varphi},$$

$$\text{tang}\, i = \frac{A}{C\sin h} = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{C}$$

$$= \frac{\sqrt{[r(\partial\psi^2 + \sin^2\psi\cos^2\psi\partial\varphi^2) + 2\partial r\partial\psi\sin\psi\cos\psi(2\sin^2\psi - 1)]}}{\cos^2\psi\partial\varphi\sqrt{r}}.$$

§. 55. Für die entgegengesetzte Lage des Winkels ε gehen die Formeln für $u\cos\alpha'$ und $u\cos\beta'$ über in:

$$u\cos\alpha' = \dot{r}\cos\varepsilon + r\dot{\varphi}\sin\varepsilon,$$

$$u\cos\beta' = r\dot{\varphi}\cos\varepsilon - \dot{r}\sin\varepsilon;$$

woraus dann auch neue Werthe für $\cos\alpha'$ und $\cos\beta'$ hervorgehen.

Man hat $f = \frac{\partial r}{\sqrt{g}\partial t}$, $\frac{\sqrt{b}}{r} = \frac{r\partial\varphi}{\sqrt{g}\partial t}$.

§. 56. Um den grössten Werth von u zu bestimmen, müssen von dem grössten Werthe von $\frac{4}{r} - \frac{1}{A} - \frac{1}{a}$ die kleinsten Werthe von $2\frac{\sqrt{Bb}}{r^2}\cos J$ und $2Ff$ abgezogen, und nicht, wie Lagrange thut, deren grösste Werthe addirt werden. Der kleinste Werth von $\frac{b}{r}$ ist $= 1-e$, von $\frac{B}{r} = 1-E$, also der kleinste Werth von $\frac{\sqrt{Bb}}{r^2} = \frac{\sqrt{(1-E)(1-e)}}{r}$; also, wenn man $\cos J = 0$ setzt, $2\frac{\sqrt{Bb}}{r^2}\cos J = 0$. Der grösste Werth von $\frac{1}{a}$ und $\frac{b}{r^2}$ ist $= \frac{1+e}{r}$, mithin der kleinste Werth von $f = \sqrt{-2\frac{e}{r}}$ und von $F = \sqrt{-2\frac{E}{r}}$, also der kleinste Werth von $2Ff = -\frac{4}{r}\sqrt{Ee}$. Mithin wird der grösste Werth von $u = \sqrt{\frac{2+E+e+4\sqrt{Ee}}{r}}$, welcher für die Annahme einer kreisförmigen oder beinahe kreisförmigen primitiven Bahn und einer neuen fast parabolischen Bahn $\sqrt{\frac{3}{r}}$ liefert

r wird hier als eine Constante betrachtet, während es eigentlich eine Function von φ ist; da aber die Unterschiede seiner Werthe gegen die Werthe der übrigen Grössen unbedeutend sind, so kann man sie vernachlässigen und für r seinen mittleren Werth setzen. Natürlich ist aber die ganze Rechnung nur approximativ und eigentlich logisch unrichtig.

Da die beiden Bahnen ganz bestimmt sind und der veränderliche Werth von u nur von dem Orte abhängt, an welchem der Körper (Planet) den Stoss erleidet, so müssen a, b, A, B und $J(=90^0)$ constant und gegeben, und nur r, φ und Φ veränderlich sein. Man muss also zunächst in dem Werthe von u das Glied $\frac{4}{r}$ dadurch auf den grössten Werth bringen, dass man für r den kleinsten Werth setzt, wodurch $\varphi=0$ und $\Phi=0$ wird. Unter diesen Voraussetzungen wird:

$$\frac{1}{a}=\frac{1-e}{r},\quad \frac{1}{A}=\frac{1-E}{r},\quad \text{folglich}\quad \frac{4}{r}-\frac{1}{A}-\frac{1}{a}=\frac{2+E+e}{r}.$$

Da ferner

$$\frac{b}{r}=1+e,\quad \frac{B}{r}=1+E,\quad \text{so ist}\quad \frac{\sqrt{Bb}}{r^2}=\frac{\sqrt{(1+E)(1+e)}}{r},$$

und da

$$\cos J=0,\quad \text{so ist}\quad 2\frac{\sqrt{Bb}}{r^2}\cos J=0.$$

Da endlich

$$\frac{1}{a}=\frac{1-e}{r}\quad\text{und}\quad \frac{b}{r^2}=\frac{1+e}{r},\quad\text{so ist}\quad f=0,\quad F=0,\quad 2Ff=0.$$

Also wird u, für $\varphi=0$ und $\Phi=0$:

$$u=\sqrt{\frac{2+E+e}{r}},$$

wo r seinen kleinsten, u seinen grössten Werth hat, wie aber nur specielle Berechnungen streng nachweisen können. Für die Annahme einer beinahe kreisförmigen primitiven Bahn und einer neuen, fast parabolischen wird $u=\sqrt{\frac{3}{r}}$.

Setzt man $\varphi=90^0=\Phi$, wo also r grösser ist, so wird $u=\sqrt{\frac{2+(E-e)^2}{r}}$. Setzt man $\varphi=180^0=\Phi$, wo r seinen grössten

Werth erhält, so wird u seinen kleinsten Werth $=\sqrt{\frac{2-E-e}{r}}$ annehmen. Setzt man $\varphi = 45^0 = \Phi$, so wird u annähernd $=\sqrt{\frac{2+(E+e)\sqrt{2}-2Ee}{r}}$. Es erhellet auch leicht, dass ein Stoss, um eine bestimmte Wirkung auf den Körper hervorzubringen, um so kräftiger sein muss, je näher sich dieser am Attractionscentrum befindet.

§. 57. Die Annahme einer primitiven Kreisbahn und einer secundären elliptischen (worin E sehr klein und J sehr klein gedacht werden kann) liefert die Werthe:

$$u=\sqrt{\frac{2(1-\cos J\sqrt{1+E\cos\Phi})}{r}+\frac{E(E+\cos\Phi)}{r(1+E\cos\Phi)}}$$

$$=\sqrt{\frac{2(1-\cos J\sqrt{1+E\cos\Phi})+E\cos\Phi}{r}+\frac{E^2\sin^2\Phi}{r(1+E\cos\Phi)}},$$

$$\cos\alpha=\frac{E\sin\Phi}{u\sqrt{r(1+E\cos\Phi)}},$$

$$\cos\beta=\frac{\cos J\sqrt{1+E\cos\Phi}-1}{u\sqrt{r}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\sin J\sqrt{1+E\cos\Phi}}{u\sqrt{r}}.$$

§. 58. Die Formel

$$\partial a=\left(\frac{\partial a}{\partial x'}X+\frac{\partial a}{\partial y'}Y+\frac{\partial a}{\partial z'}Z\right)\partial t$$

gilt nur für solche Werthe von a, welche x', y', z' nur in der ersten Potenz enthalten. Für $a=xx'^2+yy'^3+zz'^4$ z. B. würde man erhalten:

$$a+\partial a=x(x'+X\partial t)^2+y(y'+Y\partial t)^3+z(z'+Z\partial t)^4,$$

mithin:

$$\partial a=\frac{\partial a}{\partial . x'^2}[(x'+X\partial t)^2-x'^2]+\frac{\partial a}{\partial . y'^3}[(y'+Y\partial t)^3-y'^3]$$
$$+\frac{\partial a}{\partial . z'^4}[(z'+Z\partial t)^4-z'^4].$$

Man kann aber obige Formel für ∂a auch auf solche Werthe von a, welche x', y', z' in der zweiten und höheren Potenzen ent-

halten, anwenden, weil die zweiten und höheren Potenzen von $X\partial t$, $Y\partial t$, $Z\partial t$ wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt werden können. Gerade hierauf beruht die Anwendung dieser Formel zu Approximationsrechnungen, wenn die störenden Kräfte sehr klein sind; während dieselbe bei starken Kräften dieser Art nicht mehr anwendbar sein würde. Wäre z. B. $a=x'^2$, so hätte man:

$$x' = \sqrt{a},$$
$$\partial x' = \frac{\partial a}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{\partial a}{\partial x'} X\partial t = \frac{x'}{\sqrt{a}} X\partial t.$$

Streng genommen aber hat man:

$$a + \partial a = x'^2 + 2x' X\partial t + X^2\partial t^2,$$
$$\partial a = 2x' X\partial t + X^2\partial t^2,$$
$$\frac{\partial a}{2\sqrt{a}} = \frac{x'}{\sqrt{a}} X\partial t + \frac{X^2\partial t^2}{2\sqrt{a}}$$

und näherungsweise $= \frac{x'}{\sqrt{a}} X\partial t.$

§. 61. Man sieht nicht ein, weshalb das Differential von a nach t identisch Null wird durch die Werthe für $\frac{\partial x'}{\partial t}$, $\frac{\partial y'}{\partial t}$, $\frac{\partial z'}{\partial t}$.

Lässt man x variiren, so müssen, da

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial t} = 0$$

gesetzt wird, um so mehr

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0$$

werden, indem

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 x'}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^3 x}{\partial x \partial t^2} = 0, \quad -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 y'}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} = 0,$$
$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2} = 0.$$

Daher werden:

$$\partial.\frac{\partial a}{\partial x}, \quad \partial.\frac{\partial a}{\partial y}, \quad \partial.\frac{\partial a}{\partial z} = 0,$$

und wenn man den Coefficienten von $\frac{\partial \Omega}{\partial b}\partial t$ differentiirt und die Werthe für die Differentiale von $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial a}{\partial z}$, $\frac{\partial a}{\partial x'}$, $\frac{\partial a}{\partial y'}$, $\frac{\partial a}{\partial z'}$ ein-

führt, so werden die Glieder, welche die Differentiale von $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial b}{\partial x}$, u. s. w. enthalten, sogleich Null werden.

§. 65. $\frac{\partial\Omega}{\partial a}\partial a+\frac{\partial\Omega}{\partial b}\partial b+\frac{\partial\Omega}{\partial c}\partial c+\ldots$ ist keineswegs $=0$, indem $\frac{\partial a}{\partial t}\partial b$ nicht $=\frac{\partial b}{\partial t}\partial a$, $\frac{\partial a}{\partial t}\partial c$ nicht $=\frac{\partial c}{\partial t}\partial a$ u. s. w. Man erhält vielmehr für $\frac{\partial\Omega}{\partial a}\partial a+\frac{\partial\Omega}{\partial b}\partial b+\frac{\partial\Omega}{\partial c}\partial c$ nach Weglassung der Glieder, welche sich gegenseitig aufheben:

$$\partial a\Big(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x'}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x'}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y'}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y'}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z'}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z'}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial x'}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial x'}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}\Big)$$
$$+\partial b\Big(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x'}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y'}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial z'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial z'}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial x'}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial x'}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}\Big)$$
$$+\partial c\Big(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x'}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial y'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial y'}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial z'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial z'}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial x'}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial x'}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}\Big).$$

§. 69. Irrthümlich nennt hier Lagrange e die halbe Excentricität.

§. 71. Die Formeln, welche Lagrange hier für $\partial\alpha$, $\partial\alpha_1$, $\partial\alpha_2$, $\partial\beta$, $\partial\beta_1$, $\partial\beta_2$, $\partial\gamma$, $\partial\gamma_1$ und $\partial\gamma_2$ entwickelt, ergeben sich aus den Bedingungsgleichungen des §. 14. nicht, und sind völlig unbegründet, da man nicht $x=X$, $y=Y$, $z=Z$ hat. (Vergl. Abschn. III. des ersten Theils, §. 10.)

§. 72. Man hat folglich:

$$\frac{\partial x}{\partial h}\frac{\partial x'}{\partial i}+\frac{\partial y}{\partial h}\frac{\partial y'}{\partial i}+\frac{\partial z}{\partial h}\frac{\partial z'}{\partial i}-\frac{\partial x'}{\partial h}\frac{\partial x}{\partial i}-\frac{\partial y'}{\partial h}\frac{\partial y}{\partial i}-\frac{\partial z'}{\partial h}\frac{\partial z}{\partial i}$$
$$=(X\frac{\partial\alpha}{\partial h}+Y\frac{\partial\beta}{\partial h})(X'\frac{\partial\alpha}{\partial i}+Y'\frac{\partial\beta}{\partial i})+(X\frac{\partial\alpha_1}{\partial h}+Y\frac{\partial\beta_1}{\partial h})(X'\frac{\partial\alpha_1}{\partial i}+Y'\frac{\partial\beta_1}{\partial i})$$
$$+(X\frac{\partial\alpha_2}{\partial h}+Y\frac{\partial\beta_2}{\partial h})(X'\frac{\partial\alpha_2}{\partial i}+Y'\frac{\partial\beta_2}{\partial i})-(X'\frac{\partial\alpha}{\partial h}+Y'\frac{\partial\beta}{\partial h})(X\frac{\partial\alpha}{\partial i}+Y\frac{\partial\beta}{\partial i})$$
$$-(X'\frac{\partial\alpha_1}{\partial h}+Y'\frac{\partial\beta_1}{\partial h})(X\frac{\partial\alpha_1}{\partial i}+Y\frac{\partial\beta_1}{\partial i})-(X'\frac{\partial\alpha_2}{\partial h}+Y'\frac{\partial\beta_2}{\partial h})(X\frac{\partial\alpha_2}{\partial i}+Y\frac{\partial\beta_2}{\partial i})$$
$$=(XY'-YX')\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial h}\frac{\partial\beta}{\partial i}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial h}\frac{\partial\beta_1}{\partial i}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial h}\frac{\partial\beta_2}{\partial i}-\frac{\partial\beta}{\partial h}\frac{\partial\alpha}{\partial i}-\frac{\partial\beta_1}{\partial h}\frac{\partial\alpha_1}{\partial i}-\frac{\partial\beta_2}{\partial h}\frac{\partial\alpha_2}{\partial i}\Big),$$

und entsprechende Formeln für $[h, k]$ und $[i, k]$.

Die Werthe für $\partial\chi$, $\partial\pi$ und $\partial\sigma$, welche Lagrange in diesem Paragraphen berechnet, sind vollkommen richtig; es dient aber nur die erste dieser Grössen zur Vereinfachung der Rechnung. Dagegen stellen sie sehr einfach die momentanen Variationen der Lage der elliptischen Bahn vor. Denkt man sich nämlich die Ebene der Bahn um die Knotenlinie drehbar, also i veränderlich, und in einem Augenblicke die Ebene der Bahn mit der der x, y zusammenfallend, also $i=0$, so erhält man:

$$\partial\chi' = \partial k + \partial h, \quad \partial\pi' = \sin k\partial i, \quad \partial\sigma' = \cos k\partial i,$$

wo $h+k$ der Winkel ist, welchen der von einem Brennpunkte nach dem Perihel gehende Theil der grossen Axe mit der Axe der x macht. k ist der Winkel, welchen der von einem Brennpunkte nach dem Perihel gehende Theil der grossen Axe mit der Knotenlinie macht. $\partial\chi'$ ist das Element des Drehungswinkels der grossen Axe in ihrer Ebene um den Brennpunkt, ∂i das Element des Drehungswinkels der Bahnebene um die Knotenlinie. Es ist

$$\partial i = \sqrt{\partial\pi'^2 + \partial\sigma'^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} k = \frac{\partial\pi'}{\partial\sigma'}.$$

Hier verfällt Lagrange in einen sonderbaren Irrthum, indem er die Accente, welche offenbar bestimmte Werthe von $\partial\chi$, $\partial\pi$ und $\partial\sigma$ bezeichnen sollen, den Grössen ∂i und h (statt k) zutheilt.

§. 73. Mit Recht erklärt sich Bertrand in einer Note gegen die Anwendung der Grösse χ statt des Elementes k in den Ausdrücken $\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}$, $\partial\chi$, $[a,\chi]$, $[b,\chi]$, $[c,\chi]$, $[h,\chi]$ und $[i,\chi]$. Ausserdem, dass χ nicht, wie gefordert wird, ein Element der elliptischen Bahn ist, dass es ferner eine unbestimmte Grösse ist, insofern es nur durch sein Differential bestimmt wird, stellt auch χ nicht, wie Lagrange behauptet, den Winkel vor, welchen die grosse Axe der Ellipse bei der Drehung auf ihrer beweglichen Ebene beschreibt: denn der Winkel h, der einen Theil dieses Drehungswinkels bildet, liegt in der Ebene der x, y, und fällt nur dann in die Ebene der Ellipse, wenn $i=0$, also $\chi=\chi'$ wird.

Ferner vergisst Lagrange, unter den partiellen Differentialquotienten von χ die Grösse $\frac{\partial\chi}{\partial h}=\cos i$ aufzuführen, wodurch er dann zu dem fehlerhaften Werthe von $[b,h]=0$ kommt. Der richtige Werth von $[b,h]$ ist $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{b}}\cos i$.

Für $[a,k]$, $[b,k]$, $[c,k]$ finde ich ferner nach Lagrange's

Formeln (§. 70.) und für $[h, i]$, $[h, k]$, $[i, k]$ nach meinen eigenen Formeln folgende Werthe:

$$[a, k]=0, \quad [b, k]=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}, \quad [c, k]=0,$$

$$[h, i]=-\sqrt{gb}\sin i, \quad [h, k]=0, \quad [i, k]=0.$$

§. 74. Der Fehler, welchen Lagrange bei der Berechnung des Werthes von $[b, k]$ macht, hat Einfluss auf die Werthe von $\frac{\partial\Omega}{\partial b}\partial t$ und $\frac{\partial\Omega}{\partial h}\partial t$ und auf die Werthe der Differentiale ∂i und $\partial\chi$. Ohne mich auf eine Correction der Lagrange'schen Formeln einzulassen, gebe ich sogleich meine eigenen, welche das Element k statt χ enthalten:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial b}\partial t=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}\cdot(\cos i\partial h+\partial k),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial h}\partial t=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}\cdot\cos i\partial b-\sqrt{gb}\sin i\partial i,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial k}\partial t=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}\cdot\partial b.$$

Mithin:

$$\partial b=2\sqrt{\frac{b}{g}}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial k}\partial t,$$

$$\partial i=\frac{1}{\sqrt{gb}\sin i}(\cos i\frac{\partial\Omega}{\partial k}-\frac{\partial\Omega}{\partial h})\partial t.$$

$$\partial k=-(2\sqrt{\frac{b}{g}}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial b}+\frac{\cot i}{\sqrt{gb}}\frac{\partial\Omega}{\partial i})\partial t.$$

§. 75. Auch die Formeln dieses Paragraphen, welche e statt b enthalten, sind bei Lagrange unvollständig. Ich erhalte, bei Anwendung von k statt χ:

$$[a, k]=-\frac{\cos i}{2}\sqrt{\frac{g}{a}(1-e^2)}, \quad [e, h]=e\cos i\sqrt{\frac{ga}{1-e^2}},$$

$$[h, i]=-\sqrt{ga(1-e^2)}\sin i,$$

$$[a, k]=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}(1-e^2)}, \quad [e, k]=e\sqrt{\frac{ga}{1-e^2}}.$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a}\partial t=\tfrac{1}{2}\Big(\frac{g}{a^2}\partial c-\cos i\sqrt{\frac{g}{a}(1-e^2)}\,\partial h-\sqrt{\frac{g}{a}(1-e^2)}\,\partial k\Big),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial e}\partial t=e\sqrt{\frac{ga}{1-e^2}}(\cos i\partial h+\partial k),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial h}\partial t=\frac{\cos i}{2}\sqrt{\frac{g}{a}(1-e^2)}\,\partial a-e\cos i\sqrt{\frac{ga}{1-e^2}}\partial e-\sin i\sqrt{ga(1-e^2)}\partial i,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial i}\partial t=\sqrt{ga(1-e^2)}\sin i\partial h,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial k}\partial t=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}(1-e^2)}\,\partial a-e\sqrt{\frac{ga}{1-e^2}}\partial e.$$

$$\partial c=\frac{a}{g}(2a\frac{\partial\Omega}{\partial a}+\frac{1-e^2}{e}\frac{\partial\Omega}{\partial e})\partial t,$$

$$\partial e=-\frac{1}{e}\Big(\sqrt{\frac{1-e^2}{ga}}\,\frac{\partial\Omega}{\partial k}+\frac{a}{g}(1-e^2)\frac{\partial\Omega}{\partial c}\Big)\partial t,$$

$$\partial h=\frac{1}{\sqrt{ga(1-e^2)}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial i}\partial t,$$

$$\partial i=\frac{1}{\sqrt{ga(1-e^2)}\sin i}(\cos i\frac{\partial\Omega}{\partial k}-\frac{\partial\Omega}{\partial h})\partial t,$$

$$\partial k=\frac{1}{\sqrt{ga}}\Big(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\,\frac{\partial\Omega}{\partial e}-\frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial\Omega}{\partial i}\Big)\partial t.$$

§. 76. Die Gleichungen dieses Paragraphen werden:

$$\partial a=0,$$

$$\partial c=\frac{a}{g}(2a\,\frac{(\partial\Omega)}{\partial a}+\frac{1-e^2}{e}\,\frac{(\partial\Omega)}{\partial e})\,\partial t,$$

$$\partial e=-\frac{1}{e}\sqrt{\frac{1-e^2}{ga}}\,\frac{(\partial\Omega)}{\partial k}\partial t,$$

$$\partial h=\frac{1}{\sqrt{ga(1-e^2)}\sin i}\,\frac{(\partial\Omega)}{\partial i}\,\partial t,$$

$$\partial i=\frac{1}{\sqrt{ga(1-e^2)}\sin i}(\cos i\frac{(\partial\Omega)}{\partial k}-\frac{(\partial\Omega)}{\partial h})\partial t,$$

$$\partial k=\frac{1}{\sqrt{ga}}\Big(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\,\frac{(\partial\Omega)}{\partial e}-\frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{(\partial\Omega)}{\partial i}\Big)\partial t.$$

§. 77. Für $\partial\chi$ ist hier $\partial\chi'$ zu setzen; da $\frac{\partial\chi'}{\partial h}=1$, so ist

$$\partial\chi'=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{1-e^2}{ga}}\frac{(\partial\Omega)}{\partial e}\partial t,$$

also

$$\partial\lambda=\partial\chi'-\sqrt{\frac{g}{a^3}}.\partial c=\frac{1}{\sqrt{ag}}\left(\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{(\partial\Omega)}{\partial e}-2a\frac{(\partial\Omega)}{\partial a}\right)\partial t.$$

Dieser Werth von $\partial\lambda$ stimmt übrigens mit dem von Lagrange berechneten überein.

§. 78. Die hier gegebenen Transformationen von ∂e und $\partial\chi$, ∂h und ∂i werden unmöglich bei den von mir berechneten entsprechenden Werthen des §. 76.

§. 79. Zu bemerken ist, dass der Widerstand R auch eine Function der Dichtigkeit des sich Bewegenden ist, indem er letzterer verkehrt proportional ist. Nennt man die Dichtigkeit des sich Bewegenden Δ, so ist anstatt Γ in den Werth von $-R\delta r$ die Grösse $\frac{\Gamma}{\Delta}$ einzuführen.

Die Werthe für δx, δy, δz sind:

$$\delta x=\alpha\delta X+\beta\delta Y+X\delta\alpha+Y\delta\beta,$$
$$\delta y=\alpha_1\delta X+\beta_1\delta Y+X\delta\alpha_1+Y\delta\beta_1,$$
$$\delta z=\alpha_2\delta X+\beta_2\delta Y+X\delta\alpha_2+Y\delta\beta_2;$$

und daher:

$$\partial x\delta x+\partial y\delta y+\partial z\delta z=\partial X\delta X+\partial Y\delta Y+(X\partial Y-Y\partial X)\delta\chi,$$

wie bei Lagrange, obgleich dessen Werthe für $\delta\alpha$, $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$, $\delta\beta$, $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2$ (§. 71.) zu verwerfen sind.

§. 80. Es wird hier vorausgesetzt, dass die beiden Attractionscentra eine solche Lage haben, dass die Coordinaten x, y, z in Bezug auf beide zugleich positiv sind; es könnte das zweite Centrum aber auch eine solche Lage haben, dass eine oder zwei oder alle drei Coordinaten in Bezug auf dasselbe negativ wären. Wäre z. B. in Bezug auf dasselbe x negativ, y und z aber positiv, so würde man die drei Differentialgleichungen haben:

$$\partial.\frac{\delta T}{\delta\partial x}-\frac{\delta T}{\delta x}+\frac{\delta V}{\delta x}-\frac{Q\partial q}{\partial x}=0,\quad \partial.\frac{\delta T}{\delta\partial y}-\frac{\delta T}{\delta y}+\frac{\delta V}{\delta y}+\frac{Q\partial q}{\partial y}=0,$$
$$\partial.\frac{\delta T}{\delta\partial z}-\frac{\delta T}{\delta z}+\frac{\delta V}{\delta z}+\frac{Q\partial q}{\partial z}=0.$$

Die drei mit (1), (2), (3) bezeichneten Gleichungen sind respective mit ∂r, $\partial\psi$, $\partial\varphi$ zu multipliciren, und nicht, wie im Texte steht, mit $\partial\psi$, $\partial\varphi$, ∂r.

Die vierte Gleichung enthält auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens H, und nicht, wie im Texte steht, $2H$; eine Verbesserung, die auf alle abgeleiteten Gleichungen in diesem und dem folgenden Paragraphen zu übertragen ist.

Ferner ist auf S. 96. zu lesen:

$$\frac{r^2\cos^2\psi\partial\varphi^2}{\partial t^2} = \frac{4B^2h^2}{4h^2r^2-(r^2+h^2-q^2)^2},$$

und ebenso ist auch in der Gleichung (a) und in den Gleichungen des folgenden Paragraphen B^2 mit h^2 zu multipliciren.

§. 81. Die Gleichung (b) nimmt nach meiner Rechnung folgende Form an:

$$\frac{\partial.r^2\partial.q^2}{2\partial t^2} - \frac{\alpha(3r^2+q^2-h^2)}{r} - \frac{\beta(3q^2+r^2-h^2)}{q}$$
$$= 2H(r^2+q^2)+C+Mr^2q^2+\frac{N}{rq},$$

wo M und N willkührliche Constanten sind, welche Lagrange $=0$ setzt, um die Gleichungen (f), (g) und (h) integriren zu können.

Nimmt man also den Lagrange'schen Ausdruck für (b) an, indem man jedoch auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens $2H(r^2+q^2)+C$ setzt, so erhält man doch andere Gleichungen, als Lagrange, welcher verschiedene Rechnungsfehler macht. Von diesen Gleichungen führe ich der Kürze halber nur folgende an:

(e)

$$\frac{(s^2-u^2)^2\partial s^2}{8\partial t^2} - 2(\alpha+\beta)s^3+2h^2(\alpha+\beta)s = H(s^4-h^4)+C(s^2-h^2)-2B^2h^2,$$

$$\frac{(s^2-u^2)^2\partial u^2}{8\partial t^2} - 2(\alpha-\beta)u^3+2h^2(\alpha-\beta)u = H(u^4-h^4)+C(u^2-h^2)-2B^2h^2.$$

(g)
$$\partial t = \frac{s^2\partial s\sqrt{2}}{4\sqrt{Hs^4+2(\alpha+\beta)s^3+Cs^2-2h^2(\alpha+\beta)s-Hh^4-(2B^2+C)h^2}}$$
$$- \frac{u^2\partial u\sqrt{2}}{4\sqrt{Hu^4+2(\alpha-\beta)u^3+Cu^2-2h^2(\alpha-\beta)u-Hh^4-(2B^2+C)h^2}}.$$

Besonders fehlerhaft aber ist (h), deren richtiger Werth folgender ist:

$$\text{(h)} \qquad \partial\varphi = \frac{Bh^2}{(s^2-h^2)(h^2-u^2)}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{s^2\partial s\sqrt{2}}{\sqrt{Hs^4+2(\alpha+\beta)s^3+Cs^2-2h^2(\alpha+\beta)s-Hh^4-(2B^2+C)h^2}} \\ -\dfrac{u^2\partial u\sqrt{2}}{\sqrt{Hu^4+2(\alpha-\beta)u^3+Cu^2-2h^2(\alpha-\beta)u-Hh^4-(2B^2+C)h^2}} \end{array} \right\},$$

so dass die Variablen nicht gesondert sind.

Der richtige Werth von (h) eignet sich nicht für die Integration. Die Lösung der Aufgabe, alle Variablen als Functionen von r darzustellen, ist also zunächst auf q, ψ und t zu beschränken. Da man aber q und t als Functionen von r kennt, so kann man auch r und q in t bestimmen und also nach §. 80. φ als Function von t finden, mithin auch als Function von r.

§. 82. Auch hier findet sich wieder ein Rechnungsfehler, welcher von dem grössten Einflusse auf das Resultat ist. Man muss nämlich zum ersten Gliede des Integrals (b) folgende Grösse addiren:

$$\gamma[5r^2q^2l.r^2q^2 + \tfrac{3}{2}(r^4+q^4) - h^2(r^2+q^2)];$$

ferner zum ersten Gliede der Gleichung (c):

$$\frac{\gamma}{2}[10r^2q^2(r^2+q^2-h^2)l.r^2q^2+r^6+q^6+5r^2q^2(r^2+q^2)-h^2(r^4+q^4-4r^2q^2)];$$

mithin zum ersten Gliede der Gleichung (d):

$$\frac{\gamma}{2}[10r^2q^2((r\pm q)^2-h^2)l.r^2q^2+r^6+q^6\pm 6rq(r^4+q^4)+5r^2q^2(r^2+q^2) - h^2((r^2-q^2)^2-2r^2q^2\pm 4rq(r^2+q^2))].$$

Man müsste also zu den Polynomen mit s und u unter dem Wurzelzeichen in den Gleichungen (f), (g), (h) beziehungsweise folgende beide Ausdrücke addiren:

$$-\frac{\gamma}{16}[5(s^2-h^2)(s^2-u^2)^2l.\left(\frac{s^2-u^2}{4}\right)^2+3s^6+10s^4u^2-5s^2u^4 - h^2(3s^4+10s^2u^2-5u^4)]$$

und

$$-\frac{\gamma}{16}[5(u^2-h^2)(s^2-u^2)^2l.\left(\frac{s^2-u^2}{4}\right)^2+3u^6+10u^4s^2-5u^2s^4 - h^2(3u^4+10u^2s^2-5s^4)],$$

in welchen die Variablen nicht gesondert sind, so dass die Gleichungen nicht mehr integrirt werden können. Die Erweiterung der Aufgabe auf eine dritte, der Entfernung direct proportionale Kraft, welche den Körper nach dem Centrum des Kegelschnitts zieht, ist also unstatthaft.

Note IV. des zweiten Bandes, von Ossian Bonnet.

Man sieht nicht ein, weshalb

$$2N(\partial x \cos\alpha + \partial y \cos\beta + \partial z \cos\gamma) = 0$$

ist.

---

§. 84. Wenn das nichtige Attractionscentrum auf dem Perimeter der Ellipse liegt, so wird nach meiner Berechnung:

$$B = 0 \text{ (nach (e))},$$
$$C = -2h(\alpha + Hh) \text{ (nach (b))}.$$

Substituirt man diese Werthe, so geht das Polynom

$$Hs^4 + 2\alpha s^3 + Cs^2 - 2h^2\alpha s - Hh^4 - (2B^2 + C)h^2$$

über in

$$H(s+h)^2(s-h)^2 + 2\alpha(s+h)(s-h)^2;$$

dieselbe Veränderung erleidet das Polynom mit u.

Setzt man nun nach §. 15.:

$$\alpha = g \text{ und } H = -\frac{g}{2a},$$

so erhält man für (f) und (g) die Werthe:

(f)

$$\frac{\partial s}{(s-h)\sqrt{2g(s+h) - \frac{g}{2a}(s+h)^2}} = \frac{\partial u}{(u-h)\sqrt{2g(u+h) - \frac{g}{2a}(u+h)^2}};$$

(g)

$$\partial t = \frac{s^2 \partial s \sqrt{2}}{4(s-h)\sqrt{2g(s+h) - \frac{g}{2a}(s+h)^2}} - \frac{u^2 \partial u \sqrt{2}}{4(u-h)\sqrt{2g(u+h) - \frac{g}{2a}(u+h)^2}};$$

aus welchen man ableitet:

$$\partial t = \frac{(s+h)\partial s\sqrt{2}}{4\sqrt{g}\sqrt{2(s+h)-\frac{(s+h)^2}{2a}}} - \frac{(u+h)\partial u\sqrt{2}}{4\sqrt{g}\sqrt{2(u+h)-\frac{(u+h)^2}{2a}}}$$

$$= \frac{(s+h)\partial s}{4\sqrt{g}\sqrt{(s+h)-\frac{(s+h)^2}{4a}}} - \frac{(u+h)\partial u}{4\sqrt{g}\sqrt{(u+h)-\frac{(u+h)^2}{4a}}}.$$

Man hat ferner nach meiner Berechnung für (h) den Werth:

$$\partial\varphi = 0, \text{ also } \varphi = \text{const.},$$

wie es sein muss, da h, die Verbindungslinie der beiden Attractionscentren, auf der Ebene der x, y senkrecht steht, was also gleichfalls von der Ebene der Bahn des beweglichen Körpers gelten muss.

§. 85. Nach meiner Berechnung ist:

$$\int \frac{z\partial z}{\sqrt{z-\frac{z^2}{4a}}} = f(z)$$

zu setzen. $f(z)$ in eine Reihe entwickelt, liefert dann:

$$f(z) = \tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} + \frac{z^{\frac{5}{2}}}{5.4a} + \frac{3z^{\frac{7}{2}}}{4.4.7.4a^2} + \ldots.$$

Note V. des zweiten Bandes, von Lagrange.

§. 1. Nach §. 84. ist die Formel für die Zeit, in welcher der Körper einen Bogen der Ellipse durchläuft:

$$t = \frac{1}{4\sqrt{g}} \int \frac{z\partial z}{\sqrt{z-\frac{z^2}{a}}},$$

wo $a =$ der grossen Axe oder, nach meiner Berechnung, $=$ der doppelten grossen Axe, z respective $= b+c$ und $b-c$ ist. Hier aber setzt Lagrange nach Lambert $z = \frac{b+c}{2}$ oder p und $\frac{b-c}{2}$ oder q, und findet für t:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2F}} \int \frac{z\partial z}{\sqrt{z-\frac{z^2}{a}}}.$$

Führt man nun in diese Formel für z den Werth $\frac{z}{2}$ ein, der offenbar an die Stelle des früheren z getreten ist, so wird:

$$t=\frac{1}{\sqrt{2F}}\int\frac{\frac{z}{4}\partial z}{\sqrt{\frac{z}{2}-\frac{z^2}{4a}}}=\frac{1}{4\sqrt{F}}\int\sqrt{\frac{z\partial z}{z-\frac{z^2}{2a}}}.$$

ein Werth, der von Lagrange's Formel in §. 84. abweicht, meine Berechnung dagegen bestätigt.

§. 2. Die Formeln

$$\varphi-\alpha=x-y,$$

$$e(\sin\varphi-\sin\alpha)=\sin x-\sin y$$

sind nicht nothwendig, aber möglich, und zugleich die einfachsten, und führen zu wichtigen Consequenzen.

Alle anderen Formeln, die man aus der Grundgleichung:

$$a^{\frac{1}{2}}[\varphi-\alpha+e(\sin\varphi-\sin\alpha)]=a^{\frac{1}{2}}(x+\sin x)-a^{\frac{1}{2}}(y+\sin y)$$

ableiten könnte, führen nicht zur analytischen Bestimmung von q und p; deshalb sind diese Formeln die einzig zulässigen.

§. 3. Die Zeit, welche nöthig ist, um den Bogen, zu welchem die Sehne δ gehört, in der Ellipse mit der Excentricität e zu durchlaufen, ist gleich der Zeit, welche nöthig ist, um den Theil $q-p=\delta$ der grossen Axe zu durchlaufen; q ist der längere Radius vector der Ellipse mit der Excentricität 1 und entspricht dem Anfange der Zeit, p dem Ende. q ist daher Minuendus, p Subtrahendus; nicht umgekehrt, wie man aus der Wahl und Stellung der Buchstaben im Texte zu schliessen versucht wird.

§. 5. Das Integral von

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}(u\partial u-\partial u)}{\sqrt{e^2-u^2}}$$

ist:

$$-a^{\frac{1}{2}}\left(\text{Arc tang}\frac{u}{\sqrt{e^2-u^2}}+\sqrt{e^2-u^2}\right)=-a^{\frac{1}{2}}\left(\text{Arc sin}\frac{u}{e}+\sqrt{e^2-u^2}\right),$$

wo $\sqrt{a^3}$ negativ genommen werden muss, um für die Zeit, in welcher der Bogen der Ellipse durchlaufen wird, einen positiven Werth zu erhalten.

Es ist mithin:

$$\text{Arc sin}\frac{u}{e}+\sqrt{e^2-u^2}-\text{Arc sin}\frac{s}{e}-\sqrt{e^2-s^2}$$
$$=\text{Arc sin}\,x+\sqrt{1-x^2}-\text{Arc sin}\,y-\sqrt{1-y^2},$$

woraus sich die beiden Gleichungen ableiten lassen:

$$\sqrt{e^2-u^2}-\sqrt{e^2-s^2}=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}$$

und

$$\text{Arc sin}\frac{u}{e}-\text{Arc sin}\frac{s}{e}=\text{Arc sin}\,x-\text{Arc sin}\,y.$$

Aus letzterer erhält man nun wieder die Lagrange'sche Gleichung:

$$\frac{us+\sqrt{e^2-u^2}\sqrt{e^2-s^2}}{e^2}=xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}.$$

§. 6. Der Lagrange'schen Gleichung

$$x-y=\sqrt{2-2n-m^2},$$

welche aus der Gleichung zwischen den Quadraten beider Ausdrücke abgeleitet wird, muss vielmehr folgende Form gegeben werden:

$$y-x=\sqrt{2-2n-m^2},$$

um Radius vector $a(1-x)>$ Radius vector $a(1-y)$ zu erhalten.

§. 7. Man erhält auf diese Weise:

$$q=y-x,$$

$$y=\frac{u+s+q}{2}\quad\text{und}\quad x=\frac{u+s-q}{2},$$

$$a(1-x)=\frac{a(1-u)+a(1-s)+aq}{2}\quad\text{und}\quad a(1-y)=\frac{a(1-u)+a(1-s)-aq}{2},$$

wie es sein muss, da $a(1-x)$ dem grösseren Radius vector $a(1-u)$ der Ellipse mit der Excentricität e entspricht.

§. 8. Der hier ausgesprochene Lehrsatz ist richtig unter der Voraussetzung, dass die willkührlichen Constanten, welche die Differentiale beim Integriren liefern, sich unter einander aufheben oder sämmtlich Null seien. Strenger würde folgender Ausdruck des Theorems sein:

$$\int_{\varrho}^{r} \frac{r\partial r}{\sqrt{-p+2r-\frac{r^2}{a}}} = \int_{\zeta}^{z} \frac{z\partial z}{\sqrt{2z-\frac{z^2}{a}}}.$$

§. 10. Die richtigen Werthe von a, b, c sind:

$$a = \frac{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - HN - ABM + A^2N + HB^2}{C^2},$$

$$b = -\frac{MA-2HB}{C},$$

$$c = \frac{MB-2NA}{C} + H.$$

§. 11. Folglich ist:

$$\frac{A}{C} = \frac{Mb+2H(H-c)}{4HN-M^2},$$

$$\frac{B}{C} = \frac{M(H-c)+2Nb}{4HN-M^2},$$

$$C = \frac{\sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - HN}}{\sqrt{a + M\frac{AB}{C^2} - N\frac{A^2}{C^2} - H\frac{B^2}{C^2}}}.$$

§. 12. Der Lehrsatz dieses Paragraphen:

$$\frac{r\partial r}{\sqrt{H+Mr+Nr^2}} = \frac{x\partial x}{\sqrt{Mx+Nx^2}} - \frac{y\partial y}{\sqrt{My+Ny^2}}$$

ist jedoch insofern nicht eine blosse Verallgemeinerung des Lambert'schen Lehrsatzes in der Form, in welcher ihn Lagrange in §. 8. darstellt, als hier auf der linken Seite des Gleichheitszeichens nur ein Differential vorkommt, während dort eine Differenz zweier analogen Differentiale sich vorfindet. Soll beim Integriren der Ausdruck für die Zeit, in welcher ein Bogen der Ellipse durchlaufen wird, erhalten werden, so muss man setzen:

$$\int \frac{r\partial r}{\sqrt{H+Mr+Nr^2}} - \text{Const.} = \int \frac{x\partial x}{\sqrt{Mx+Nx^2}} - \int \frac{y\partial y}{\sqrt{My+Ny^2}}$$

und die willkührlichen Constanten der Integration auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sich unter einander aufheben lassen oder gleich Null setzen.

Setzt man:

$$h = -k^2$$

und

$$a + bx + cx^2 + Mx^3 + Nx^4 = (x-k)^2[l + M(x+k) + N(x+k)^2],$$

so wird:

$$a + bx + cx^2 = l(x-k)^2 - Mk(x^2 + kx - k^2) + N(-2k^2x^2 + k^4),$$

mithin:

$$a = lk^2 + Mk^3 + Nk^4, \quad b = -2kl - Mk^2, \quad c = l - Mk - 2Nk^2.$$

§. 13. Bestimmt man p, e, α, β, γ aus den fünf Gleichungen:

$$\frac{2\alpha}{e} = \frac{4B}{C}, \quad -\frac{2\alpha p}{e} + \delta^2 = \frac{4A}{C}, \quad \frac{4H}{C^2} = -\frac{\beta^2 p^2}{p^2}, \quad \frac{2M}{C^2} = \frac{\beta^2 p}{e^2},$$

$$\frac{4N}{C^2} = -\frac{\beta^2(1-e^2)}{e^2},$$

so erhält man:

$$p = -\frac{2H}{M}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{4HN}{M^2}}, \quad \beta = \frac{1}{C}\sqrt{4N - \frac{M^2}{H}},$$

$$\alpha = \frac{2B}{C}\sqrt{1 - \frac{4HN}{M^2}},$$

$$\gamma = \frac{1}{C}\sqrt{4(AC - \frac{2BCH}{M}) + \frac{M^2}{H} - 4N - 4B^2 + \frac{16B^2HN}{M^2}},$$

so dass p und e nur durch Constanten, α, β und γ aber auch durch willkührliche Constanten bestimmt werden.

Lagrange's Ausdruck für die Zeit, in welcher ein Bogen der Ellipse durchlaufen wird, ist zwar nach §. 10. richtig, insofern

$$\frac{r\partial r}{\sqrt{-p + 2r - \frac{r^2}{\pi}}}$$

unter die allgemeine Form

$$\frac{r\partial r}{\sqrt{H + Mr + Nr^2}}$$

fällt; der hier gegebene Beweis für die Richtigkeit des Ausdrucks ist aber fehlerhaft. Hier muss vielmehr diese Zeit durch die Differenz zweier Integrale von der Form

$$\int \frac{(z^2+h)\,\partial z}{\sqrt{a+bz+cz^2+Mz^3+Nz^4}}$$

dargestellt werden, wo a, b, c, h willkührliche Constanten sind, $E=\frac{4e^2}{C^2\beta^2 p}$, also ebenfalls eine willkührliche Constante ist, und die Variable z in dem einen der beiden Integrale die halbe Summe, in dem anderen die halbe Differenz der beiden Vectoren r und u ist.

§. 14. Setzt man $x=\frac{\delta}{2}+\mu$ und $y=\frac{\delta}{2}+\nu$, so geht die Gleichung

$$2C(x-y)(A+Br+Cs)=\sqrt{Y}+\sqrt{X}$$

über in

$$(\mu-\nu)(A+B\delta+B\mu+B\nu)=\sqrt{\Delta+\Delta'\nu}+\sqrt{\Delta+\Delta'\mu}$$

unter Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen und Producte von $\frac{\delta}{2}$, μ, ν; mithin

$$(\sqrt{\mu}-\sqrt{\nu})(A+B\delta+B\mu+B\nu)=\sqrt{\Delta'};$$

also $\sqrt{\Delta'}$ unendlich klein und $\Delta'=0$.

Lagrange zeigt in diesem Paragraphen, welcher den Fall, wo das Centrum des Vectors u in den Perimeter der Ellipse fällt, in völliger Allgemeinheit behandeln soll, bloss, dass der Lambert'sche Lehrsatz in der Form des §. 12. für den Fall gilt, wo $u=0$, also $x=y$ ist. Er sucht zwar den Schlusssatz als allgemein bewiesen darzustellen; aber dieser Schluss ist nicht gerechtfertigt.

---

§. 92. Wenn man in die Function Ω' statt der Coordinaent ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'', ξ''' u. s. w. ihre Werthe in t setzt, so muss g für den Planeten m' gleich $m+m'$, für den Planeten m'' gleich $m+m''$ u. s. w. gesetzt werden; die Formeln des §. 74. folgd. liefern die Variationen der sechs Elemente der Bahn des Planeten m', wo $g=m+m'=g'$ ist.

§. 94. Die primitiven Coordinaten x, y, z, welche die Lage der Sonne bestimmen, werden hier offenbar nicht auf einen beliebigen Punkt im Weltraume, sondern auf den Schwerpunkt des Sonnensystems als Anfangspunkt bezogen, da angenommen wird, dass die Ebenen sämmtlicher Planetenbahnen durch diesen Punkt

hindurchgehen. Die Grössen A, B, A_1, B_1 werden vermöge dieser Annahme ganz streng bestimmt, während sie nach der Voraussetzung des vorigen Paragraphen, nach welcher sämmtliche Planetenbahnen auf den Mittelpunkt der Sonne als Brennpunkt bezogen wurden, nur näherungsweise bestimmt wurden.

Die Winkel Φ' und Φ'' des vorigen Paragraphen werden auf den Mittelpunkt der Sonne als Scheitelpunkt bezogen und sind daher nur näherungsweise richtig.

§. 95. Um die Glieder von Ω', welche mit m''' multiplicirt sind, zu erhalten, müssen nicht nur alle mit zwei Accenten versehenen Buchstaben drei bekommen, sondern auch K, hier K_1'', der Winkel, welchen der nach dem Perihel gehende Theil der grossen Axe der Bahn von m'' mit der Knotenlinie von m' und m'' macht, wird einen neuen Werth erhalten, den man, da dieser Winkel in der Ebene der Bahn des Planeten m''' liegt, mit K_1''' bezeichnen kann; ebenso geht H, hier H_1'', der Winkel, welchen die Knotenlinie von m' und m'' mit der auf die Ebene der Bahn von m' projicirten Axe der x macht, in H_1''' über, welcher in derselben Ebene liegt, aber bis zum Knotenpunkte von m' und m''' geht; u. s. w.

Die Richtigkeit der Formel

$$\frac{1}{\varrho_1''} = \frac{1}{\sqrt{\varrho'^2+\varrho''^2-2\varrho'\varrho''\cos(\Phi'-\Phi''-H-K)}}$$

$$+\frac{\varrho'\varrho''[\cos(\Phi'+\Phi''-H+K)-\cos(\Phi'-\Phi''-H-K)]}{[\varrho'^2+\varrho''^2-2\varrho'\varrho''\cos(\Phi'-\Phi''-H-K)]^{\frac{3}{2}}}(\sin\tfrac{1}{2}J_1'')^2,$$

auf welche sich die Entwickelung des Werthes von Ω' gründet, lässt sich nicht beweisen.

§. 96. Die Werthe von Φ' und Φ'' stimmen mit denen der §§. 21. und 22. nicht genau überein, selbst abgesehen davon, dass sie dort nicht genau berechnet worden sind.

Man vermisst überhaupt in der ganzen folgenden Entwickelung dieses Paragraphen die sonstige Klarheit und Genauigkeit Lagrange's.

Von den mit $\sin^2\frac{J_1''}{2}$ multiplicirten Gliedern bleibt bei Entwickelung der Producte der Cosinusse nur ein von u' und u'' unabhängiges Glied zurück, dessen Werth ist:

$$-a'a''[a', a'']_1 \sin^2\frac{J_1''}{2}$$

oder:

$$-\tfrac{1}{2}a'a''[a', a'']_1 \sin^2\frac{J_1''}{2}.$$

Der Werth von $\frac{\varrho'}{\varrho''^2}$ ist:

$$\frac{a'}{a''^2}[1 - e'\cos u' + 2e''\cos u'' + \frac{e'^2}{2}(1-\cos 2u') + \frac{e''^2}{2}(1+5\cos 2u'') - 2e'e''\cos u'\cos u'']\,;$$

mithin ist $\frac{\varrho'\cos\varphi}{\varrho''^2}$, indem man alle periodischen Glieder weglässt,

$$= \frac{a'}{a''^2}(1 + \frac{e'^2}{2} + \frac{e''^2}{2})\cos L$$

und keineswegs $= 0$.

§. 98. Auch die Rechnungen dieses Paragraphen enthalten viele Fehler. Vollkommen richtig aber ist die Bestimmung des Werthes der Coefficienten (a', a''), $(a', a'')_1$ u. s. w., $[a', a'']$, $[a', a'']_1$ u. s. w. als Functionen von a', a'' durch Zerlegung des Ausdrucks $a'^2 - 2a'a''\cos\varphi + a''^2$ in seine beiden imaginären Factoren

$$(a' - a''e^{\varphi\sqrt{-1}})\,(a' - a''e^{-\varphi\sqrt{-1}})$$

und Entwickelung der $-\frac{1}{2}$ten und $-\frac{3}{2}$ten Potenz eines jeden dieser Factoren nach dem Binomialtheorem. Auch die Prämissen, auf welchen diese Deduction ruht, sind völlig richtig.

§. 99. Ueber die Bestimmung des Winkels L als Function von χ', χ'' ist zu bemerken, dass hier die unrichtigen Formeln des §. 71. für $\partial\alpha$, $\partial\alpha_1$, $\partial\alpha_2$ benutzt worden sind. Aber selbst abgesehen hiervon würde der Werth von L, aus seinem Differentiale abgeleitet, unbestimmt sein; und χ würde die Summe zweier in verschiedenen Ebenen befindlichen Winkel vorstellen, da hier die Bahnen von m' und m'' zwar unter einander, aber nicht mit der Ebene der x, y zusammenfallend gedacht werden.

§. 100. Die Function $(\Omega')_1$ enthält die Excentricitäten und die Oerter der Perihelien der Planetenbahnen, nicht aber, wie der Text sagt, die Oerter der Aphelien, da $\chi = h + k$, wobei freilich ohne Grund die Ebene des Winkels k mit der Ebene des Winkels h zusammenfallend gedacht wird. Ebenso die Function Φ in den folgenden Paragraphen.

§. 103. Abgesehen davon, dass die hier gegebenen Gleichun-

gen für $\frac{\partial m'}{\partial t}$, $\frac{\partial n'}{\partial t}$, $\frac{\partial m''}{\partial t}$ u. s. w. wegen unrichtiger Prämissen, aus denen sie abgeleitet sind, verworfen werden müssen, wäre auch die verschiedene Bedeutung der Buchstaben m' und m', m'' und m'' u. s. w. leicht eine Quelle von Missverständnissen.

§. 106. Setzt man

$$x = 1 - \xi, \quad y = 1 - \eta, \quad z = 1 - \zeta;$$

so wird:

$$\xi = 2(\tfrac{1}{2}J_{,}'')^2 = \tfrac{1}{2}J_{,}''^2, \quad \eta = 2(\tfrac{1}{2}J_{,}''')^2 = \tfrac{1}{2}J'''^2, \quad \zeta = 2(\tfrac{1}{2}J_{,,}''')^2 = \tfrac{1}{2}J_{,,}'''^2,$$

$$u^2 = -2(\zeta\eta + \xi\zeta + \eta\xi) - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 + 4(\xi + \eta + \zeta - 1)$$

unter Vernachlässigung der Grössen dritter Dimension. Endlich ist

$$\partial\xi = Cu\partial t, \quad \partial\eta = Bu\partial t, \quad \partial\zeta = Au\partial t.$$

Wie bei Lagrange, wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -(A + B + C)^2 u.$$

ξ, η, ζ enthalten t nur in $\cos(\mu t + k)$, wie man durch Integration findet; z. B. für ξ:

$$\xi = C\int u\partial t + \text{const.} = CK\int \sin(\mu t + k)\partial t + \text{const.}$$

$$= CK\cos k \int \sin\mu t\partial t + CK\sin k\int\cos\mu t\partial t + \text{const.}$$

$$= \frac{CK}{\mu}\cos k\int \sin\mu t\partial.\mu t + \frac{CK}{\mu}\sin k\int\cos\mu t\partial.\mu t + \text{const.}$$

$$= -\frac{CK}{\mu}\cos(\mu t + k) + \text{const.}$$

Wegen der willkührlichen Constanten der Integration wird man ξ, η, ζ und folglich $J_{,}''$, $J_{,}'''$, $J_{,,}'''$ nicht völlig genau aus diesen Formeln finden können, wohl aber z. B. die jährliche Variation der Neigungswinkel.

Uebrigens ist die Annahme, dass ξ, η, ζ sämmtlich sehr klein seien, auf welche sich die ganze Beweisführung gründet, falsch: denn $\eta = 1 - \cos\beta$ ist, da β ein stumpfer Winkel ist, $= 1 + \frac{e}{f}$, wo $\frac{e}{f}$ ein ächter Bruch ist. Ferner ist $\eta = 2\sin^2\frac{\beta}{2} = 2\cos^2\frac{J_{,}'''}{2}$, wofür man nicht $2(\frac{1}{2}J_{,}''')^2$ setzen darf, da $\frac{J_{,}'''}{2}$ ein sehr kleiner Winkel ist.

Es bleibt also nichts übrig, als die Gleichung $\partial t = -\frac{\partial x}{Cu}$ zu integriren.

§. 108. Die Zahl der willkührlichen Constanten in den Ausdrücken von p', q' und x in t ist 6, die sich durch die Gleichung $p'^2 + q'^2 + x^2 = 1$ auf 5 reduciren. Bei der Integration der entsprechenden drei Gleichungen für $\partial p''$, $\partial q''$, ∂y ergeben sich drei neue Constanten, so dass die Zahl sämmtlicher willkührlicher Constanten durch die Gleichung $p''^2 + q''^2 + y^2 = 1$ auf sieben reducirt wird.

Die Werthe von p', q', p'', q'' können sich nicht zur genauen Bestimmung von i' und i'' eignen, da diese Winkel aus dem Sinus abgeleitet werden, der für Winkel bis 180^0 je zwei Werthe liefert.

§. 110. Der Werth von $\partial\lambda'$ wird nach dem völlig richtigen Werthe von $\partial\lambda$ in §. 77.:

$$\partial\lambda' = -2\sqrt{\frac{a'}{g'}}\frac{\partial(\Omega')}{\partial a'}\partial t + \frac{e'}{2\sqrt{g'a'}}\frac{\partial(\Omega')}{\partial e'}\partial t.$$

Wenn die von Lagrange berechneten Werthe von Φ und Ψ in §. 101. und §. 104. richtig wären, so würden die Differentialquotienten nach a' aus den Coefficienten (a', a''), $a'a''[a', a'']_1$, $a'a''[a', a'']_2$, (a', a''') u. s. w. der Functionen Φ und Ψ zu bilden sein, und die Werthe

$$\frac{\partial(a', a'')}{\partial a'},$$

$$a''[a', a'']_1 + a'a''\frac{\partial[a', a'']_1}{\partial a'},$$

u. s. w.

geben.

§. 111. Addirt man zu $\delta\Omega$ den Ausdruck

$$-\frac{\Gamma\sqrt{\partial r^2 + r^2\partial\Phi^2}\,(\partial r\delta r + r^2\partial\Phi\delta\Phi + r^2\partial\Phi\delta\chi)}{\Delta\partial t^2},$$

wo Δ die Dichtigkeit des sich Bewegenden ist, Γ die Dichtigkeit des Weltäthers, nicht des Lichtäthers (vergl. A. v. Humboldt's Kosmos, Bd. 3., S. 50.), so ist für die Planeten Δ gegen Γ unendlich gross und deshalb $\frac{\Gamma}{\Delta} = 0$.

§. 112. $\Phi - u$ liefert selbst nach Lagrange's Werth in §. 22. nicht eine Reihe, welche nur Sinusse von u, $2u$, $3u$ u. s. w. enthält, sondern es finden sich auch Cosinusse dieser Winkel vor; noch weniger aber nach dem von mir berechneten Werthe. $\partial\Phi$ wird also sowohl Sinusse als Cosinusse in sich enthalten; auch $\partial r^2 + r^2\partial\Phi^2$ wird sowohl nach meinem Werthe von Φ, als nach dem von Lagrange in §. 22. angeführten ausser den vorherrschenden Cosinussen auch Sinusse enthalten. Uebrigens enthält sowohl $\partial r^2 + r^2\partial\Phi^2$, als $\sqrt{\partial r^2 + r^2\partial\Phi^2}$ constante Glieder in sich.

$\delta(\Phi)$ enthält kein constantes Glied in sich; also wird auch $r^2\partial\Phi\delta(\Phi)$ kein constantes Glied in sich enthalten. Da auch $\partial r\delta(r)$ kein constantes Glied enthält, so wird die Grösse $\partial r\delta(r) + r^2\partial\Phi\delta(\Phi)$ für die säcularen Variationen vernachlässigt werden können.

§. 113. Der Werth von $\partial r^2 + r^2\partial\Phi^2$ ist:

$$\left(\frac{e^2(1-a)}{r^2} + \frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) g\partial t^2;$$

also sind die wegen des Widerstand leistenden Mittels zu $\delta\Omega$ zu addirenden Glieder:

$$-\frac{\Gamma}{\Delta} g \left(\frac{e^2(1-a)}{r^2} + \frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{a^3}\,\delta u$$

$$-\frac{\Gamma}{\Delta} g \sqrt{\frac{e^2(1-a)}{r^2} + \frac{2}{r} - \frac{1}{a}}\,\sqrt{a(1-e^2)}\,\delta\chi.$$

§. 114. In die Werthe von ∂a, ∂c und ∂e muss ebenfalls $\frac{\Gamma}{\Delta}$ für Γ und $\left(\frac{e^2(1-a)}{r^2} + \frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ für $\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ substituirt werden; ∂h, ∂i und ∂k werden nach meinen Formeln $= 0$, wenn man in die Formel des vorigen Paragraphen für $\delta\chi$ seinen Werth $\delta k + \cos i\delta h$ einführt. Nach Lagrange's Formeln in §. 74. wird dagegen ∂i nicht $= 0$, wenn man für $\delta\chi$ seinen Werth einführt, woran die fehlerhafte Formel für ∂i Schuld ist.

Lagrange sagt hier, die grosse Axe sei keiner säcularen Variation unterworfen, indem er darunter die Lage der grossen Axe versteht.

Wenn man die Excentricität e vernachlässigt, so wird nach Lagrange's Gleichungen:

$$r = a,$$

mithin:

$$\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{t\Gamma}{\sqrt{a^3}}.$$

Es ist nicht schwer, aufzufinden, dass die Gleichung:

$$r=a\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{t}{\sqrt{a^3}},$$

deren Ursprung Bertrand nicht begreifen kann, aus einem Schreibfehler des Manuscriptes oder einem Druckfehler der zweiten Ausgabe herrührt, indem hinter a ein Semikolon oder et fehlt.

Für u ist nach Lagrange's Werthen richtig

$$\sqrt{g}\int\frac{\partial t}{(\sqrt{A}-t\Gamma\sqrt{g})^3}$$

gefunden worden; es ist aber das Integral so zu nehmen, dass es bei dem Punkte anfängt, wo $u=0$, also $t=c$ ist. Lagrange lässt es fälschlich bei $t=0$ beginnen.

Nach den von mir gefundenen Werthen wird bei Vernachlässigung der Excentricität e:

$$\left(\frac{e^2(1-a)}{r^2}+\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{t}{\sqrt{a^3}},$$

also

$$\partial t=-\frac{\Delta\partial a}{2\Gamma\sqrt{ga}},$$

$$u=\sqrt{g}\int_c^t\frac{\partial t}{(\sqrt{A}-t\frac{\Gamma}{\Delta}\sqrt{g})^3}$$

$$=\frac{\Delta}{2\Gamma}\left(\frac{1}{(\sqrt{A}-t\frac{\Gamma}{\Delta}\sqrt{g})^2}-\frac{1}{(\sqrt{A}-c\frac{\Gamma}{\Delta}\sqrt{g})^2}\right).$$

Diese Formeln können übrigens wegen des Verhältnisses von Γ zu Δ bei den Planeten keine Anwendbarkeit besitzen, und bei den Kometen darf man e nicht vernachlässigen, selbst nicht in der ersten Approximation.

§. 119. Im Anfange dieses Paragraphen findet sich ein störender Druckfehler. Es heisst daselbst: Supposons que la force d'attraction R' soit comme la puissance ϱ'^{μ} de la distance ϱ', on aura

$$F\varrho'=\frac{\varrho'^{\mu+1}}{\mu+1},$$

et la fonction $F\varrho'$ sera une fonction homogène de x', y', z' du degré $\mu+1$; etc. statt: Supposons que la force d'attraction R' soit comme la puissance ϱ'^{μ} de la distance ϱ', on aura

$$F\varrho' = \frac{\varrho'^{\mu+1}}{\mu+1}, \quad Fr' = \frac{r'^{\mu+1}}{\mu+1},$$

et la fonction Fr' sera une fonction homogène de x', y', z' du degré $\mu+1$; etc.

§. 120. Da der Werth von

$$\frac{r''\cos\varphi}{r'^2} = \frac{a''}{a'^2}\left(1+\frac{e'^2}{2}+\frac{e''^2}{2}\right)\cos L$$

und nicht $=0$ ist, so werden auch die Werthe von (Ω') nicht dieselben sein, je nachdem man die Bahn des Planeten m' auf m oder auf den Schwerpunkt des Systems als Anfangspunkt der Coordinaten bezieht.

Uebrigens ist wohl zu bemerken, dass sich in die Formeln der Bewegung des Planeten m' um den gemeinsamen Schwerpunkt des Systems alle Coordinaten und Elemente auf den Schwerpunkt als Anfangspunkt und Brennpunkt beziehen, in den Formeln der Bewegung um die Sonne dagegen auf den Mittelpunkt der Sonne, und dass daher die correspondirenden Werthe beider nicht ganz dieselben sind.

Lässt man in dem Werthe von Ω' des §. 119. die Glieder

$$-m''\frac{r'^2}{2r'^3} - m'''\frac{r'^2}{2r'^3} - \ldots.$$

weg und vereinigt sie mit dem ersten Gliede $-\frac{m-2m'}{r'}$ von V', so geht dies über in:

$$-\frac{2(m-2m')-m''-m'''-\ldots.}{2r'};$$

so dass der Körper m' um den Schwerpunkt eine Bahn beschreiben würde, hervorgerufen durch die anziehende Masse

$$m-2m'-\frac{m''}{2}-\frac{m'''}{2}-\ldots.$$

im Schwerpunkte.

Achter Abschnitt.

Bertrand sagt in einer Note zur Vorrede der zweiten Ausgabe des zweiten Bandes, die Rechnungsfehler dieses Abschnittes seien so bedeutend, dass es unmöglich sei, sie zu corrigiren, ohne den Text zu ändern. Mir scheint dieser Vorwurf höchst ungerecht, und bloss in Beziehung auf die Formel

$$\Phi = \frac{\pi\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

(§. 21.) und auf den Endwerth von E in §. 23. gerechtfertigt.

§. 1. Die Gleichung der lebendigen Kräfte:

$$T+V=H$$

gilt jedoch nur, wenn die Verbindung der Körper unter einander von der Zeit unabhängig, d. h. constant ist.

§. 2. Der Werth von R ist auch hier, wie in §. 79. des siebenten Abschnitts,

$$= \frac{\Gamma}{\Delta}\frac{\partial s^2}{\partial t^2}$$

zu setzen. Bewegt sich ein System von Köpern in demselben Medium, und die verschiedenen Körper mit verschiedener Geschwindigkeit, so hat man:

$$R=\frac{\Gamma}{\Delta}\frac{\partial s^2}{\partial t^2},\quad R'=\frac{\Gamma}{\Delta'}\frac{\partial s'^2}{\partial t^2},\quad R''=\frac{\Gamma}{\Delta''}\frac{\partial s''^2}{\partial t^2},\text{ u. s. w.}$$

Endlich ist auch die Grösse der Widerstand leistenden Oberfläche zu berücksichtigen, wenn der sich bewegende Körper nicht bloss als Punkt betrachtet wird. Die Grösse des Widerstandes ist der Grösse dieser Fläche direct proportional; bezeichnet man also die Widerstand leistende Fläche mit F, so erhält man die Ausdrücke:

$$R=\frac{\Gamma}{\Delta}F\frac{\partial s^2}{\partial t^2},\quad R'=\frac{\Gamma}{\Delta'}F'\frac{\partial s'^2}{\partial t^2},\quad R''=\frac{\Gamma}{\Delta''}F''\frac{\partial s''^2}{\partial t^2},\text{ u. s. w.}$$

Diese Formel gilt übrigens nur unter der Voraussetzung, dass der Widerstand senkrecht gegen die Oberfläche des sich bewegenden Körpers wirke; ist dies nicht oder nur zum Theil der Fall, so ist nach bekannten Sätzen die Wirkung geringer.

Lagrange's Weise, die Wirkung der Oberfläche durch ver-

schiedene Werthe von Γ auszudrücken, ist offenbar unlogisch. Statt m, m', m'', u. s. w. wäre in T zu setzen:

$$\frac{\Gamma}{\Delta}F\partial s, \quad \frac{\Gamma}{\Delta'}F'\partial s', \quad \frac{\Gamma}{\Delta''}F''\partial s'', \text{ u. s. w.}$$

Indem so der Werth von T sich ändert, kann man ihn durch T_0 bezeichnen; dann wird die Formel der Bewegung, rücksichtlich ξ:

$$\partial.\frac{\delta T}{\delta\partial\xi}-\frac{\delta T}{\delta\xi}+\frac{\delta V}{\delta\xi}+\frac{\delta T_0}{\delta\partial\xi}=0.$$

§. 7. Da nach §. 7. des fünften Abschnitts

$$[a, b]\partial b+[a, c]\partial c+[a, k]\partial k+\ldots.$$

nothwendig constant ist, so ist es auch $\frac{\partial\Omega}{\partial a}\partial t$ und alle entsprechenden Ausdrücke; mithin nach §. 63. des siebenten Abschnitts auch ∂a, ∂b u. s. w.; also auch die Coëfficienten $[a, b]$, $[a, c]$ u. s. w. Wohl zu bemerken ist hierbei, dass Ω nur eine Function von ξ, ψ, φ u. s. w. sein darf (Abschnitt V., §. 8.).

§. 13. $\lambda\delta L$ kann das Moment einer Kraft

$$=\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2}$$

und senkrecht gegen die Fläche, deren Gleichung $\delta L=0$, nicht aber $\partial L=0$ ist, wirkend vorstellen.

§. 14. Die Anmerkungen Bertrand's zu §. 9. und §. 15. des zweiten Abschnitts des ersten Theils finden hier keine Anwendung; was Lagrange sagt, ist in voller Ausdehnung wahr.

Note X. des zweiten Bandes, von Lagrange.

§. 4. Es ist in der That auffallend, dass Lagrange von der Bedingungsgleichung

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)=0,$$

mit welcher die Gleichung $f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)=0$ einen Contact der ersten Ordnung hat, behauptet, dass sie der eines Fadens, welcher über zwei Rollen geht, äquivalent werde, da sie vielmehr die Bewegung auf zwei Curven darstellt, welche die durch die letztere Gleichung gegebenen Bahnen tangiren, weshalb auch der

Ausdruck für die dadurch hervorgerufenen Kräfte derselbe ist, wie in §. 2:

$$\Pi F'(x),\quad \Pi F'(y),\quad \Pi F'(z),\quad \Pi F'(\xi),\quad \Pi F'(\eta),\quad \Pi F'(\zeta).$$

Es scheint fast, als sei Lagrange zu der in Rede stehenden Behauptung durch die Betrachtung der Formeln

$$f'(x)=F'(x),\quad f'(y)=F'(y),\quad f'(z)=F'(z);$$
$$f'(\xi)=F'(\xi),\quad f'(\eta)=F'(\eta),\quad f'(\zeta)=F'(\zeta)$$

verführt worden; aber diese gelten ja nur für einen gegebenen Werth der Variablen x, y, z, ξ, η, ζ.

$$\Pi F'(x),\quad \Pi F'(y),\quad \Pi F'(z),\quad \Pi F'(\xi),\quad \Pi F'(\eta),\quad \Pi F'(\zeta)$$

sind vielmehr der Richtung nach den Kräften $Tf'(x)$, $Tf'(y)$, $Tf'(z)$, $Tf'(\xi)$, $Tf'(\eta)$, $Tf'(\zeta)$ gerade entgegengesetzt. Was ihre Grösse betrifft, so können sie denselben gleich gedacht werden, aber sie sind ihnen nicht nothwendig gleich. Erstere Kräfte sind wegen des Coëfficienten Π unbestimmt, letztere dagegen bestimmt.

---

§. 16. Lagrange behauptet, dass von den drei reellen Werthen von $\cos\psi$ zwei ein Maximum und einer ein Minimum von ψ geben, wobei zu bemerken ist, dass beide Maxima gleich sind. Bertrand behauptet, der dritten Wurzel könne weder ein Maximum, noch ein Minimum von ψ entsprechen: denn weil alle Werthe des Polynoms mit $\cos\psi$ positiv oder Null seien, so müsse $\cos\psi$ stets zwischen den beiden Endwerthen liegen. Stellt man aber das Polynom mit $\cos\psi$ durch eine Curve dar, die von der Abscissenaxe ausgehend sich über dieselbe erhebt und dann wieder zu derselben zurücksinkt, so giebt sie offenbar keinen dritten Werth des Polynoms $=0$, ausser den beiden Endwerthen, und man kann also nur die Curve rückwärts durchlaufen, um den dritten Nullwerth zu erreichen. Man wüsste in der That auch nicht, für welchen Werth von ψ ausser dem Maximum und Minimum $\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$ werden könnte.

§. 17. Setzt man $\cos\psi=\cos\alpha\sin^2\sigma+\cos\beta\cos^2\sigma$, so werden dem kleinsten Werthe β von ψ die Werthe 0, π, 2π, 3π u. s. w. von σ entsprechen, und dem grössten Werthe α von ψ die Werthe $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ u. s. w. von σ.

Der Werth von $\partial\varphi$ ist

$$= \frac{k\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}\left[\frac{\partial\sigma}{(1+\cos\psi)\Sigma}+\frac{\partial\sigma}{(1-\cos\psi)\Sigma}\right],$$

wo $\cos\psi = \frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)+\frac{1}{2}(\cos\beta-\cos\alpha)\cos 2\sigma$.

Denselben Werth behält der constante Coëfficient von $\partial\varphi$ auch in §. 19. in φ und Φ.

§. 18. Auch wenn das Pendel rücksichtlich der Höhe grössere Excursionen macht, so dass $\cos\beta-\cos\alpha$ nicht sehr klein ist, wird $\operatorname{tang}\gamma$ klein genug sein, um Σ in eine Reihe umwandeln zu können, deren constante Coëfficienten convergirende Reihen bilden.

§. 19. Wenn man die Reihe

$$\frac{1}{1-\operatorname{tang}^2\mu}(1-2\operatorname{tang}\mu\cos 2\sigma+2\operatorname{tang}^2\mu\cos 4\sigma-2\operatorname{tang}^3\mu\cos 6\sigma+\ldots.)$$

mit der Reihe

$$A+B\cos 2\sigma+C\cos 4\sigma+\ldots.$$

multiplicirt, so ist das Product von der Form:

$$A'+B'\cos 2\sigma+C'\cos 4\sigma+b'\cos 2\sigma\cos 4\sigma+D'\cos 6\sigma+c'\cos 2\sigma\cos 6\sigma$$
$$+d'\cos 4\sigma\cos 6\sigma+\ldots.;$$

aber die Glieder $b'\cos 2\sigma\cos 4\sigma$, $c'\cos 2\sigma\cos 6\sigma$, $d'\cos 4\sigma\cos 6\sigma$ u. s. w. lassen sich so umformen, dass die resultirenden Ausdrücke zum Theil unter die Glieder $B'\cos 2\sigma$, $C'\cos 4\sigma$, $D'\cos 6\sigma$ u. s. w. fallen, anderentheils mit $\partial\sigma$ multiplicirt leicht integrabel sind und Integrale liefern, welche für $\sigma=0$ und $\sigma=\frac{\pi}{2}$ Null werden.

Dasselbe gilt für die Reihe:

$$A''+B''\cos 2\sigma+C''\cos 4\sigma+b''\cos 2\sigma\cos 4\sigma+\ldots.$$

Man erhält, wenn man einerseits zwischen 0 und φ, andererseits zwischen 0 und σ integrirt, für φ den Werth:

$$\varphi = \frac{k\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}$$
$$\times\left(\frac{2A'\sigma+B'\sin 2\sigma+\frac{1}{2}C'\sin 4\sigma+..}{(2+\cos\alpha+\cos\beta)\cos^2\mu\cos\gamma}+\frac{2A''\sigma+B''\sin 2\sigma+\frac{1}{2}C''\sin 4\sigma+..}{(2-\cos\alpha-\cos\beta)\cos^2\nu\cos\gamma}\right).$$

§. 21. Nimmt man an, dass die Winkel α und β sehr klein

seien, und vernachlässigt in einer ersten Annäherungsrechnung die sehr kleinen Grössen zweiter Ordnung, so erhält man:

$$k=\tfrac{1}{2},\ \gamma=0,\ A=1,\ B=0,\ C=0,\ldots.\ \mu=0,\ \sin 2\nu=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$A'=1,\quad A''=\frac{1}{1-\tan g^2\nu}=\frac{\cos^2\nu}{\cos 2\nu}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\cos^2\nu;$$

mithin

$$\Phi=\frac{\pi}{2}.$$

Behält man dagegen die sehr kleinen Grössen zweiter Ordnung bei, vernachlässigt aber die von der vierten Ordnung an, so erhält man:

$$k=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\alpha^2+\beta^2}{8}},\ \sin\gamma=\gamma=\frac{\alpha^2-\beta^2}{16},\ \cos\gamma=1,$$

$$A=1,\ B=\frac{\beta^2-\alpha^2}{16},\ C=0,\ldots.,\ \sin 2\mu=\frac{\alpha^2-\beta^2}{8-\alpha^2-\beta^2},\ \sin 2\nu=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$A'=\frac{1+\tan g\gamma\tan g\mu}{1-\tan g^2\mu}=\cos^2\mu(1+\gamma\tan g\mu)=\cos^2\mu\left(1+\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{32(8-\alpha^2-\beta^2)}\right),$$

$$A''=\frac{1-\tan g\gamma\tan g\nu}{1-\tan g^2\nu}=\left[1-\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)^2\right]\frac{\cos^2\nu}{\cos 2\nu}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{8}-\frac{\alpha^3}{16\beta}-\frac{\beta^3}{16\alpha}\right)\cos^2\nu;$$

also

$$\Phi=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3}{8}\alpha\beta+\frac{3}{16}(\alpha^2+\beta^2)\right)\sqrt{1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{8}}=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3}{8}\alpha\beta+\frac{\alpha^2+\beta^2}{8}\right).$$

Die Näherungsrechnungen geben also ein rationales Verhältniss von 2Φ zu π, welches jedoch über den genauen Werth von 2Φ nicht entscheidet. Dagegen zeigen sie, dass 2Φ nothwendig grösser ist als π; wobei nicht zu vergessen ist, dass die Winkel α und β sehr klein gedacht werden.

Bravais sagt in seiner Note über Lagrange's fehlerhafte Formel für Φ (Note VII. des zweiten Bandes), es handele sich darum, den Werth von $\partial\varphi$ so zu integriren, dass nur die Glieder zweiter Ordnung von α und β beibehalten, diejenigen vierter Ordnung dagegen vernachlässigt würden. Es handelt sich aber vielmehr darum, auch die Glieder zweiter Ordnung von α und β zu

vernachlässigen, was er selbst sogleich bei der Berechnung des ersten Gliedes des Werthes von $\partial\varphi$ thut, wobei er jedoch das Product $\alpha\beta$ ausnimmt, welches denn auch in seinen Werth von Φ übergeht, während es $=0$ zu setzen wäre. Bei der Berechnung des zweiten Gliedes sind nur insofern die Glieder zweiter Ordnung von α und β zu berücksichtigen, als man für $\sin 2\nu$ und für den Quotienten $\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}$ nicht einen unbestimmten Werth erhalten darf. Gleichwohl berücksichtigt Bravais jetzt auch in den anderen Grössen die Glieder zweiter Ordnung von α und β, macht aber dabei noch verschiedene Rechnungsfehler. So findet er für den ersten Factor des Integrals des zweiten Gliedes den Werth

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\left[1-\frac{\alpha^4+\beta^4+4\alpha^2\beta^2}{12(\alpha^2+\beta^2)}\right]$$

statt

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Für den vierten Factor desselben Integrals findet er

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\left[1-\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{24(\alpha^2+\beta^2)}\right]$$

anstatt

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}.$$

In den Werthen beider Glieder des Integrals von $\partial\varphi$, so wie in dem Totalwerthe von Φ behält Bravais die Grössen zweiter Ordnung von α und β bei, was gegen die ursprüngliche Aufgabe Lagrange's und seine eigne Berechnungsweise des ersten Gliedes des Integrals von $\partial\varphi$ streitet.

§. 22. Man hat offenbar:

$$\partial\varphi=\frac{C\partial t}{\sin^2\psi}=\sqrt{\frac{g}{r\cos\alpha}}\partial t,$$

$$\varphi=t\sqrt{\frac{g}{r\cos\alpha}},$$

$$4T=2\pi\sqrt{\frac{r\cos\alpha}{g}},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\sqrt{\frac{g}{r\cos\alpha}}.$$

§. 23. Auch hier, wie in §. 2., ist statt $\Gamma\partial s$ zu setzen $\frac{\Gamma}{\Delta}F\partial s$, indem ausser der Dichtigkeit des Widerstand leistenden Mediums auch die Dichtigkeit der Masse des Pendels, so wie dessen Oberfläche von Einfluss auf die Grösse des Widerstands ist.

Man hat also zu dem ersten Gliede der ersten Differentialgleichung des §. 15. das Glied $\frac{\Gamma}{\Delta}F\frac{\partial s\partial\psi}{\partial t^2}$, und zu dem ersten Gliede der zweiten Differentialgleichung das Glied $\frac{\Gamma}{\Delta}F\frac{\partial s\sin^2\psi\partial\varphi}{\partial t^2}$ hinzuzufügen. Die zweite Gleichung lässt sich auch in der jetzigen Form in völliger Strenge integriren.

Durch den Widerstand eines Mediums werden die Constanten C und E veränderlich; bezeichnet man diese Veränderlichen durch C' und E', um sie von den Constanten C und E zu unterscheiden, so ist:

$$\partial C' = -\frac{\Gamma}{\Delta}FC'\partial s,$$

$$\partial E' = -2\frac{\Gamma F}{\Delta r^2}\frac{\partial s^2}{\partial t^2}\partial s = -2\frac{\Gamma F}{\Delta}(E' + \frac{2g}{r}\cos\psi)\partial s$$

$$= -2\frac{\Gamma F}{\Delta}(E + \frac{2g}{r}\cos\psi)\partial s,$$

und

$$\partial s = \frac{r\sin\psi\sqrt{E + \frac{2g}{r}\cos\psi}}{\sqrt{(E+\frac{2g}{r}\cos\psi)\sin^2\psi - C^2}}\partial\psi.$$

Wenn das Pendel nur in der Verticalebene schwingt, so ist $C=0$, folglich $\partial s = r\partial\psi$. Der Werth von $\partial E'$ wird dadurch integrabel; unbegreiflich ist es aber, wie Lagrange vorher mit

$$i^{\frac{2\Gamma\psi}{r^2}}$$

multipliciren und so das Integral

$$Ei^{\frac{2\Gamma\psi}{r^2}} = (E) - \frac{2\Gamma}{r^2}\int i^{\frac{2\Gamma\psi}{r^2}}\cos\psi\partial\psi$$

gewinnen konnte. Der letzte Werth von $\partial E'$ liefert ohne Weiteres beim Integriren:

$$E' = D - 2\Gamma(Er\psi + 2g\sin\psi),$$

wo D eine neue willkührliche Constante ist, und der Kürze halber Γ für $\frac{\Gamma F}{\Delta}$ steht. Man hat also für das Element der Zeit der Pendelschwingungen in der Luft oder in einem anderen Widerstand leistenden Mittel:

$$\partial t = \frac{\partial\psi}{\sqrt{D - 2\Gamma(Er\psi + 2g'\sin\psi) + \frac{2g'}{r}\cos\psi}},$$

wo g' die in der Luft verminderte Wirkung der Schwerkraft bezeichnet. Um D zu bestimmen, setzt man die Grösse unter dem Wurzelzeichen $=0$, nachdem man für ψ dessen grössten Werth α eingeführt hat; um E zu bestimmen, setzt man in seinem früheren Werthe (§. 16.) $\beta = 0$. Man erhält:

$$E = -\frac{2g'}{r}\cos\alpha,$$

$$D = 4\Gamma g'(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) - \frac{2g'}{r}\cos\alpha;$$

folglich:

$$\partial t = \frac{\partial\psi}{\sqrt{4\Gamma g'(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha + \psi\cos\alpha - \sin\psi) + \frac{2g'}{r}(\cos\psi - \cos\alpha)}},$$

oder, wenn man $\sin\psi = z$, also $\cos\psi = \sqrt{1-z^2}$, $\cos\psi\partial\psi = \partial z$, $\psi = \int_0^{\psi}\partial\psi = \int_0^{z}\frac{\partial z}{\sqrt{1-z^2}} = \operatorname{Arc}\sin z$ setzt:

$$\partial t = \frac{\partial z}{2\sqrt{(1-z^2)[\Gamma g'(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - z + \cos\alpha\operatorname{Arc}\sin z) + \frac{g'}{2r}(\sqrt{1-z^2} - \cos\alpha)]}},$$

Gleichungen, deren zweite Glieder nur durch die Rectification der Kegelschnitte integrabel sind.

Nimmt man an, dass das Pendel sehr kleine Schwingungen mache, so kann man $\sin\psi = \psi$ und $\cos\psi = 1 - \frac{\psi^2}{2}$ zum Behuf einer Näherungsrechnung setzen, und erstere Gleichung integriren. Es ist nämlich unter diesen Voraussetzungen:

$$\partial t = \frac{\partial\psi}{2\sqrt{\Gamma g'(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \psi + \psi\cos\alpha) + \frac{g'}{2r}(1-\cos\alpha-\frac{\psi^2}{2})}},$$

$$t =$$

$$\sqrt{\frac{r}{g'}}\cdot(\text{Arc tang}\frac{2\Gamma r(1-\cos\alpha)+\psi}{\sqrt{4\Gamma r(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)+2(1-\cos\alpha)-4\Gamma r(1-\cos\alpha)\psi-\psi^2}}$$

$$-\text{Arc tang}\frac{2\Gamma r(1-\cos\alpha)}{\sqrt{4\Gamma r(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)+2(1-\cos\alpha)}}),$$

also

$$2T = 2\sqrt{\frac{r}{g'}}\cdot(\text{Arc tang}\frac{2\Gamma r(1-\cos\alpha)+\alpha}{\sqrt{4\Gamma r(\sin\alpha-\alpha)+2(1-\cos\alpha)-\alpha^2}}$$

$$-\text{Arc tang}\frac{2\Gamma r(1-\cos\alpha)}{\sqrt{4\Gamma r(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)+2(1-\cos\alpha)}}).$$

§. 25. Wenn der Faden, welcher den schweren Körper trägt, elastisch und ausdehnbar ist, so ist seine Länge im Allgemeinen eine Function der Geschwindigkeit und Länge des Pendels und folglich von t, mithin auch von ψ und φ. Unter diesen Bedingungen fällt die Gleichung rücksichtlich r weg, und die beiden Gleichungen rücksichtlich ψ und φ sind:

$$\partial.\frac{r^2\partial\psi}{\partial t^2} - \frac{r^2\sin\psi\cos\psi\partial\varphi^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 r}{\delta t^2}\frac{\delta r}{\partial\psi} + gr\sin\psi + F\frac{\delta r}{\delta\psi} = 0,$$

$$\partial.\frac{r^2\sin^2\psi\partial\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\frac{\delta r}{\delta\varphi} + F\frac{\delta r}{\delta\varphi} = 0,$$

und die Gleichung der lebendigen Kräfte gilt nicht mehr.

Das Pendel müsste sehr langsam schwingen, und der Faden wenig elastisch und ausdehnbar sein, wenn Lagrange's Annahmen stattfinden sollen. r wird dann während der Schwingungen selbst constant sein.

§. 26. Wenn die Axe der z nicht vertical stände, sondern mit der Verticale den Winkel α bildete, so würde

$$V = -g(z\cos\alpha + x\sin\alpha)$$

werden; daher würde man in der ersten Gleichung g in $g\cos\alpha$ umändern und zu ihrem ersten Gliede den Ausdruck $-g\sin\alpha\cos\varphi$ hinzufügen müssen, während zum ersten Gliede der zweiten Gleichung $+g\varrho\sin\alpha\sin\varphi$ zu addiren wäre.

Neunter Abschnitt.

§. 1. In den aus §. 60. des fünften Abschnitts des ersten Theils entlehnten Formeln:

$$\delta x = \delta\lambda + z\delta M - y\delta N,$$
$$\delta y = \delta\mu + x\delta N - z\delta L,$$
$$\delta z = \delta\nu + y\delta L - x\delta M$$

kann man das Zeichen δ in δx, δy, δz mit ∂ vertauschen, weil die Verbindung der einzelnen Punkte des Systems von der Zeit völlig unabhängig ist; in $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, welche analoge Grössen sind, aus gleichem Grunde, und in δL, δM, δN, weil dies Elemente von Winkeln sind, die eben sowohl mit ∂, als mit δ bezeichnet werden können.

§. 10. Bertrand bemerkt mit Recht, die Grössen ∂P, ∂Q und ∂R seien nicht integrabel. Denn die Werthe von ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'' u. s. w. hängen zwar nur von der Art der Drehung des Systems ab, sind also Functionen der Winkel L, M, N; aber ξ', ξ'', ξ''' sind von L völlig unabhängig; ebenso η', η'', η''' von M; ζ', ζ'', ζ''' von N.

Uebrigens bezeichnen die Grössen ∂P, ∂Q, ∂R die Rotationswinkel um die beweglichen Axen der a, b, c, wie aus den Formeln

$$\bar{a} = \frac{\partial P}{\partial\varphi}, \quad \bar{b} = \frac{\partial Q}{\partial\varphi}, \quad \bar{c} = \frac{\partial R}{\partial\varphi}$$

erhellet.

§. 11. Um die Gleichung

$$2\partial P = \zeta'''\partial\xi'' - \zeta''\partial\xi''' + \eta'''\partial\eta'' - \eta''\partial\eta''' + \xi'''\partial\xi'' - \xi''\partial\xi'''$$

in die Gleichung

$$\partial P = \xi'''\partial\xi'' + \eta'''\partial\eta'' + \zeta'''\partial\zeta''$$

umzuwandeln, braucht man bloss die sechste Bedingungsgleichung des §. 3. zu differentiiren, und diesen Werth in obige Gleichung zu substituiren.

§. 14. Die Formeln dieses Paragraphen für $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$, $\partial^2\xi$, $\partial^2\eta$, $\partial^2\zeta$ u. s. w. gelten auch dann, wenn die einzelnen Punkte des Systems unveränderlich mit einander verbunden sind, wenn man nur

$$\partial a' = c\partial Q - b\partial R,$$
$$\partial b' = a\partial R - c\partial P,$$
$$\partial c' = b\partial P - a\partial Q$$

setzt.

Wenn die einzelnen Punkte des Systems ihre gegenseitige Lage verändern können, so drücken $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$ die sehr kleinen Bewegungen eines Punktes, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, nach den Richtungen der letzteren aus, sowohl insofern sie durch die Drehung des Systems, als insofern sie durch die gegenseitige Beweglichkeit der einzelnen Punkte hervorgerufen worden sind. ∂a, ∂b, ∂c sind die sehr kleinen Bewegungen desselben Punktes, dessen Coordinaten aber auf die Axen der a, b, c bezogen sind, nach den Richtungen der letzteren, insofern sie nur von der gegenseitigen Beweglichkeit der einzelnen Punkte des Systems abhängen. Die drei Punkte, deren Coordinaten ξ', η', ζ', ferner ξ'', η'', ζ'' und ξ''', η''', ζ''' sind, befinden sich in der unveränderlichen Entfernung $=1$ vom Centro des Systems; $\partial\xi'$, $\partial\eta'$, $\partial\zeta'$, $\partial\xi''$ u. s. w. bezeichnen daher die sehr kleinen Bewegungen dieser Punkte nach den Richtungen der ξ, η, ζ, insofern sie nur durch die Drehung des Systems hervorgebracht worden sind.

Fragment III., von Lagrange.

Jeder Körper m des Systems wird hier nur als Punkt betrachtet; die Grössen ξ, η, ζ, $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$, a, b, c, ∂a, ∂b, ∂c beziehen sich also auf diese Punkte. ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'' und ξ''', η''', ζ''' sind die Coordinaten dreier besonderen Punkte des Systems, welche durch Körper bezeichnet sein können oder auch nicht, sobald nur $\partial\xi'$, $\partial\eta'$, $\partial\zeta'$, $\partial\xi''$ u. s. w. die sehr kleinen Bewegungen dieser Punkte nach den Richtungen der ξ, η, ζ angeben, in sofern sie nur von der Drehung des Systems abhängen.

Die Behauptung Lagrange's, dass die Werthe von $\partial\Gamma$, $\partial\Delta$ und ∂A die partiellen Differentialquotienten des Werthes von $\frac{1}{2}S(\partial\xi^2+\partial\eta^2+\partial\zeta^2)m$, nach den Variablen ∂P, ∂Q, ∂R genommen, seien, ist nicht ganz richtig. Es ist vielmehr

$$\partial\Gamma = \tfrac{1}{2}\left(\frac{S(\partial\xi^2+\partial\eta^2+\partial\zeta^2)m}{\partial P}\right) + \tfrac{1}{2}\partial P S(b^2+c^2)m,$$
$$\partial\Delta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{S(\partial\xi^2+\partial\eta^2+\partial\zeta^2)m}{\partial Q}\right) + \tfrac{1}{2}\partial Q S(a^2+c^2)m,$$

$$\partial A = \tfrac{1}{2}\left(\frac{S(\partial\xi^2+\partial\eta^2+\partial\zeta^2)m}{\partial R}\right) + \tfrac{1}{2}\partial R S(a^2+b^2)m.$$

Die Gleichung

$$\zeta(\partial.\partial\Gamma-\partial\Delta\partial R+\partial A\partial Q)+\zeta''(\partial.\partial A-\partial A\partial P+\partial\Gamma\partial R)$$
$$+\zeta'''(\partial.\partial A-\partial\Gamma\partial Q+\partial\Delta\partial P)+S(\xi Y-\eta X)m=0$$

muss umgeändert werden in

$$\zeta'\frac{\partial.\partial\Gamma-\partial\Delta\partial R+\partial A\partial Q}{\partial t^2}+\zeta''\frac{\partial.\partial A-\partial A\partial P+\partial\Gamma\partial R}{\partial t^2}$$
$$+\zeta'''\frac{\partial.\partial A-\partial\Gamma\partial Q+\partial\Delta\partial P}{\partial t^2}+S(\xi Y-\eta X)m=0,$$

und ebenso müssen in den beiden anderen Gleichungen die Coëfficienten von η', η'', η''' und ξ', ξ'', ξ''' durch ∂t^2 dividirt werden. Man erhält also:

$$\frac{\partial.\partial\Gamma-\partial\Delta\partial R+\partial A\partial Q}{\partial t^2}=S(cY'-bZ')m,$$

$$\frac{\partial.\partial A-\partial A\partial P+\partial\Gamma\partial R}{\partial t^2}=S(aZ'-cX')m,$$

$$\frac{\partial.\partial A-\partial\Gamma\partial Q+\partial\Delta\partial P}{\partial t^2}=S(bX'-aY')m.$$

---

§. 19. Der erste Theil der Function T wird für sich behandelt werden müssen, und liefert dann für die Bewegung des Centrums des Körpers dieselben Gleichungen, als wenn die ganze Masse des Körpers in diesem Punkte vereinigt wäre, wenn der dritte Theil der Function T Null wird.

Lagrange behandelt den dritten Fall, wo ein freier Körper eine Rotation um ein Centrum hat, das nicht in den Schwerpunkt fällt, nicht, weil diese Fassung der Aufgabe unnöthige Schwierigkeiten bereiten würde, indem sich jede Rotation eines freien Körpers um ein Centrum ausserhalb des Schwerpunktes in eine Drehung um den Schwerpunkt und eine Translationsbewegung des letzteren zerlegen lässt.

§. 20. Die Constanten A, B, C, F, G, H hängen von der Gestalt des Körpers, von der Lage seines Centrums und von der Lage der Axen der a, b, c ab.

§. 21. Wenn die Grösse V Null wird, so gehen die drei Differentialgleichungen der Rotationsbewegung des Körpers in die statischen Gleichungen über.

Sie gelten aber auch für den Fall, wo die Drehung des Körpers nur durch einen Stoss hervorgerufen wird, wenn man nur $\frac{\partial\xi}{\partial t}=\dot{\xi}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}=\dot{\eta}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\dot{\zeta}$ setzt.

§. 23. Wenn $\bar{P}=k\bar{p}$ ist, und man nimmt den Schwerpunkt des Körpers selbst als Centrum der Rotationsbewegung an, so enthält V rücksichtlich der Kraft $\bar{P}$ nur die Glieder:

$$\frac{k}{2}[(x'-f)^2+(y'-g)^2+(z'-h)^2]m+\frac{k}{2}E,$$

also einen constanten Ausdruck.

Es ergiebt sich aus diesem Paragraphen, dass man nur eine Näherungsrechnung führt, indem man bei der Bewegung der Planeten um den Schwerpunkt des Sonnensystems die Planeten als Körper betrachtet, deren Masse im Schwerpunkte vereinigt ist; indessen ist der Fehler, welchen man begeht, sehr gering, weil die Dimensionen der Planeten im Verhältniss zu ihrer Entfernung von der Sonne und von einander sehr klein sind.

Fragment II., von Lagrange.

Die Gleichungen des dritten Abschnitts, welche mit den drei partikulären Gleichungen

$$(l+m)\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}+(l-m)\frac{\partial P\partial Q}{\partial t^2}=0,$$

$$(l+n)\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}+(n-l)\frac{\partial P\partial R}{\partial t^2}=0,$$

$$(m+n)\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}+(m-n)\frac{\partial Q\partial R}{\partial t^2}=0$$

übereinstimmen, befinden sich in §. 26. Um sie jedoch mit den obigen drei Gleichungen völlig in Uebereinstimmung zu bringen, muss man die drei Gleichungen des §. 22. mit $\dot{\vartheta}$ multipliciren, und dann erst deren erste Glieder P, Q, R nennen; ferner muss man in den drei obigen Gleichungen $-\frac{\partial P}{\partial t}$, $-\frac{\partial Q}{\partial t}$, $-\frac{\partial R}{\partial t}$ für $\frac{\partial P}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial t}$,

$\frac{\partial R}{\partial t}$ einführen, und also die Rotationsgeschwindigkeiten um die drei Hauptaxen hier mit $-\frac{\partial P}{\partial t}$, $-\frac{\partial Q}{\partial t}$, $-\frac{\partial R}{\partial t}$ bezeichnen. Die drei obigen Gleichungen gelten trotz der von beschleunigenden Kräften hergenommenen Ausdrücke auch für eine gleichförmige Drehung, wie sie durch einen Stoss hervorgerufen wird, da die Gleichungen des §. 16. (Abschnitt III.) mit den drei letzteren des §. 9. (eben dort) im Wesentlichen übereinstimmen, und dasselbe von den Gleichungen gilt, welche durch Differentiation dieser Gleichungen erhalten werden. Auch kann man bei einem festen Körper, der sich um ein Centrum in seinem Inneren dreht, stets innere und nach dem Centro hin wirkende beschleunigende Kräfte annehmen.

Aus §. 34. und §. 35. des dritten Abschnitts geht hervor, dass für die durch einen Stoss hervorgerufene Bewegung eines Systems, dessen Bedingungsgleichungen t nicht enthalten,

$$Sm(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2)=\text{Const.}$$

ist; folglich

$$S\left(\frac{\partial a'^2+\partial b'^2+\partial c'^2}{\partial t^2}\right)Dm=E.$$

S. 373., Z. 17. läse man besser: et l'on y parviendra comme il a été dit art. 29., sect. IX. anstatt: et l'on y parviendra en combinant les six équations de condition entre ces neuf quantités, comme il a été dit art. 29., sect. IX.

---

§. 27. Man sieht nicht ein, weshalb die Gleichung

$$[(\beta-A)(\beta-B)-H^2][(\gamma-A)(\gamma-B)-H^2]$$
$$+[F(\beta-A)-GH][F(\gamma-A)-GH]+[G(\beta-B)-HF][G(\gamma-B)-HF]$$
$$=0$$

nicht auch stattfinden kann, wenn β und γ imaginär sind.

§. 30. Um die Gleichung

$$\partial\vartheta=\frac{\partial t}{\varrho}\sqrt{N-\frac{\partial L^2}{n^2\partial t^2}-\frac{\partial\varrho^2}{\partial t^2}}$$

mit Leichtigkeit integriren zu können, muss man ϱ, welches nicht Function von t ist, constant annehmen, also $\partial\varrho = 0$ setzen.

Der Werth von x in den Formeln

$$\xi = \frac{lx + my}{\sqrt{l^2 + m^2}}, \quad \eta = \frac{mx - ly}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

wird bestimmt durch die Gleichung:

$$x = \frac{nu + z\sqrt{l^2 + m^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

§. 36. Die Formeln des §. 7. geben:

$$\sin\varphi \sin\omega = 0, \quad \cos\varphi \sin\omega = 0, \quad \cos\omega = 1;$$

also $\omega = 0^0$.

Aus $\zeta'''^2 = 1$ folgt eigentlich:

$$\zeta''' = \pm 1;$$

$\zeta''' = -1$ giebt:

$$\cos\omega = -1, \quad \text{also} \quad \omega = 180^0,$$

und es fallen die Axen der ζ und c ebenfalls zusammen.

Lagrange behauptet, dass, wenn man in die Differentialgleichungen dieses Paragraphen die Werthe

$$p = \frac{\zeta'\partial\vartheta + \partial\zeta''}{\partial t},$$

$$q = \frac{\zeta''\partial\vartheta - \partial\zeta'}{\partial t},$$

$$r = \frac{\partial\vartheta}{\partial t}$$

substituirt, und die Potenzen und Producte von ζ', ζ'' vernachlässigt, man lineare Gleichungen zur Bestimmung der Variablen ζ', ζ'' und ϑ in t erhalte; eine Berechnung zeigt jedoch, dass diese Gleichungen auch Potenzen und Producte des zweiten Grades in sich enthalten.

Sieht man ζ' und ζ'' als sehr kleine Grössen des ersten Ranges an, und vernachlässigt die sehr kleinen Grössen vom zweiten Range an, und setzt $\zeta''' = -1$, so wird:

$$\xi''' = \xi'\zeta' + \xi''\zeta'', \quad \eta''' = \eta'\zeta' + \eta''\zeta'',$$

$$p = -\frac{\zeta'\partial\vartheta + \partial\zeta''}{\partial t}, \quad q = \frac{\partial\zeta' - \zeta''\partial\vartheta}{\partial t}, \quad r = \frac{\partial\vartheta}{\partial t},$$

und die drei Differentialgleichungen dieses Paragraphen liefern nach Substitution dieser Werthe von p, q, r und Vernachlässigung der Potenzen und Producte von ζ', ζ'' andere Werthe von ζ', ζ'' und ϑ in t, als für $\zeta''' = +1$.

Ebenso werden in den Rechnungen der folgenden Paragraphen durch die Annahme, dass $\zeta''' = -1$ sei, die Werthe von ζ', ζ'' und ϑ in t verändert, ohne dass die Art der Berechnung eine Aenderung erlitte.

Sowohl für $\zeta''' = +1$, als für $\zeta''' = -1$ ist, für ζ' und $\zeta'' = 0$,

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = 0,$$

und ferner

$$\text{entweder } \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = 0, \quad \text{oder} \quad F = 0, \quad G = 0.$$

Sind dagegen, für $\zeta''' = \pm 1$, ζ' und ζ'' sehr klein, so muss auch $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}$ sehr klein sein, ferner aber auch entweder $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$ oder F und G.

§. 37. Man sieht nicht ein, mit welchem Recht Lagrange annimmt, dass die sehr kleinen Grössen ζ' und ζ'' ein constantes Verhältniss $\alpha:\gamma$ haben, wenn der Körper sehr kleine Schwingungen um die Verticallinie macht, und zugleich eine beliebige Rotationsbewegung um seine Axe hat.

Damit die Wurzeln ϱ und ϱ' reell und ungleich seien, muss

$$BC - F^2 + AC - G^2 > 0,$$

$$[BC - F^2 + AC - G^2]^2 > 4(CH + FG)^2 + [(B - A)C + G^2 - F^2]^2,$$

$$4(CH + FG)^2 + [(B - A)C + G^2 - F^2]^2 > 0$$

sein; diese Gleichungen aber hängen von der Gestalt des Körpers, von der Lage des Aufhängepunkts und der Axen der a, b, c ab.

§. 39. Es ist

$$\sin\omega = \sqrt{s^2 + u^2}.$$

§. 40. Die Wurzeln ϱ und σ müssen reell, kleiner als 1 und

ungleich sein, damit der Winkel ϑ nur unter dem Sinus- und Cosinuszeichen vorkomme; aber sie können sowohl positiv als negativ sein, indem $\sqrt{1-\varrho}$ und $\sqrt{1-\sigma}$ reell sein muss. Lagrange behauptet irrthümlich, ϱ und σ müssten positiv sein, was vielmehr von $1-\varrho$ und $1-\sigma$ gilt.

Fragment IV., von Lagrange.

Die Gleichung (K) zeigt an, dass die Rotationsgeschwindigkeit um drei auf einander senkrechte feste Axen im Raume constant ist, wenn T und V nur Functionen von a, b, c und letztere constant sind: man hat nur für l, m, n, K drei verschiedene Reihen von Werthen zu setzen, und

$$(\eta')=\frac{l'}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}},\quad (\eta'')=\frac{m'}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}},\quad (\eta''')=\frac{n'}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}};$$

$$(\zeta')=\frac{l''}{\sqrt{l''^2+m''^2+n''^2}},\quad (\zeta'')=\frac{m''}{\sqrt{l''^2+m''^2+n''^2}},\quad (\zeta''')=\frac{n''}{\sqrt{l''^2+m''^2+n''^2}}$$

zu machen. Es muss also auch die resultirende Rotationsgeschwindigkeit um eine einzige feste Axe im Raume constant sein.

Zehnter Abschnitt.

Eilfter Abschnitt.

§. 7.

Die Werthe der Differentiale ∂x, ∂y, ∂z hängen zwar nicht blos von t, sondern auch von den bewegenden Kräften ab; da indess letztere nicht näher bestimmt sind, so bleiben auch ∂x, ∂y, ∂z in Bezug auf sie völlig unbestimmt, und sind zunächst nur Functionen von t.

Um die Werthe von

$$\frac{D.\frac{\partial y}{\partial t}}{Dy} \quad \text{und} \quad \frac{D.\frac{\partial z}{\partial t}}{Dz}$$

zu finden, hat man nur in dem Werthe von

$$D.\frac{\partial x}{\partial t}$$
$$\overline{Dx}$$

x in y und z und α, β, γ in α', β', γ' und α'', β'', γ'' zu verwandeln.

§. 8. Wenn die Wände des Gefässes unbeweglich sind und $A=0$ als Function von x, y, z gegeben ist, so kann man diese Coordinaten ohne Weiteres in die Anfangswerthe a, b, c umändern.

§. 9. Statt: donc, si l'on conçoit qu'on substitue dans ces fonctions les valeurs de a, b, c en x, y, z tirées de celles de x, y, z en a, b, c, etc. lies: donc, si l'on conçoit qu'on substitue dans ces fonctions les valeurs de a, b, c en x, y, z, t tirées de celles de x, y, z en a, b, c, t, etc.

§. 11. Statt: qui servira à déterminer l'inconnue Δ dans les équations (F), parce que dans ces équations on doit traiter Δ comme une fonction de x, y, z, lies: qui servira à déterminer l'inconnue Δ dans les équations (F), parce que dans ces équations on doit traiter Δ comme une fonction de x, y, z, t.

§. 15. Die Grösse

$$\frac{\partial.(p^2+q^2+r^2)}{2}+\frac{\partial p}{\partial t}\partial x+\frac{\partial q}{\partial t}\partial y+\frac{\partial r}{\partial t}\partial z,$$

wo das Differential von $\frac{p^2+q^2+r^2}{2}$ nach x, y, z zu nehmen ist, lässt sich auf die Form

$$\frac{\partial.(p^2+q^2+r^2)}{2}+p\frac{\partial p}{\partial t}\partial t+q\frac{\partial q}{\partial t}\partial t+r\frac{\partial r}{\partial t}\partial t=\frac{\partial.(p^2+q^2+r^2)}{2}$$

nach x, y, z, t bringen, und ist also stets ein vollständiges Differential, da p, q, r nur Functionen von x, y, z, t sind. Ausserdem ist $q\partial x-p\partial y=0$, wie man sogleich sieht, wenn man durch ∂t dividirt, nachdem man für p den Werth $\frac{\partial x}{\partial t}$ und für q den Werth $\frac{\partial y}{\partial t}$ gesetzt hat; ebenso ist $r\partial x-p\partial z=0$ und $r\partial y-q\partial z=0$. Also ist das zweite Glied der fraglichen Gleichung stets ein vollständiges Differential.

Dagegen ist es schwer einzusehen, wie $\frac{\partial.(p^2+q^2+r^2)}{2}$, nach

x, y, z genommen, ein vollständiges Differential sein soll; ebenso wie $\frac{\partial p}{\partial t}\partial x + \frac{\partial q}{\partial t}\partial y + \frac{\partial r}{\partial t}\partial z$ ein vollständiges Differential sein soll. Auch ist das partielle Differential von $p\partial x + q\partial y + r\partial z$ nach t

$$= \left(\frac{\partial p}{\partial t}\partial x + \frac{\partial q}{\partial t}\partial y + \frac{\partial r}{\partial t}\partial z + p\frac{\partial^2 x}{\partial t} + q\frac{\partial^2 y}{\partial t} + r\frac{\partial^2 z}{\partial t}\right)\partial t.$$

Die Gleichung (L) liefert bei'm Integriren:

$$\lambda - V = \frac{p^2+q^2+r^2}{2} + \text{Const.}$$

$$= \frac{\partial\alpha^2}{2\partial x^2} + \frac{\partial\alpha^2}{2\partial x^2} + \frac{\partial\beta^2}{2\partial y^2} + \frac{\partial\beta^2}{2\partial z^2} + \frac{\partial\alpha\partial\beta}{\partial x\partial y} + \text{Const.},$$

woraus sich λ mittelst α und β bestimmen lässt.

§. 16. Die Entwickelung in diesem Paragraphen als begründet angenommen, sieht man nicht ein, weshalb am Schlusse desselben die Einschränkung gemacht wird, dass t sehr klein sei, wenn $p\partial x + q\partial y + r\partial z$ ein vollständiges Differential ist.

§. 18. Der Beweis des Satzes, dass, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten durch einen Stoss gegen die Oberfläche der Flüssigkeit, z. B. durch einen Stempel hervorgebracht worden sind, $p\partial x + q\partial y + r\partial z$ integrabel sei, setzt voraus, dass wirkliches Gleichgewicht in der Flüssigkeit stattfinde, und gilt also nur für den Fall, wo der Stempel einen Druck auf die Oberfläche ausübt, ohne wegen der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit eine Bewegung erzeugen zu können: wenn nämlich der Stempel genau in den einschliessenden Pumpenstiefel passt und die Oberfläche der Flüssigkeit berührt.

§. 20. Um den in meiner Note zu §. 15. erhaltenen Werth von λ

$$\lambda = V + \frac{p^2+q^2+r^2}{2} + \text{Const.}$$

mit dem hier gegebenen Werthe von λ in Uebereinstimmung zu bringen, hat man nur das vollständige Differential $p\partial p + q\partial q + r\partial r$ durch Multiplication mit der Constanten ∂t umzuwandeln in

$$\partial x\partial p + \partial y\partial q + \partial z\partial r = \partial.(\partial\varphi^2),$$

wo $\partial\varphi$ irgend eine integrable Function von x, y, z, t ist, und t in den partiellen Differentialen von $\partial\varphi^2$ als constant angesehen wird. Es ist also:

$$\partial p = \frac{\partial.(\partial\varphi^2)}{\partial x}, \quad \partial q = \frac{\partial.(\partial\varphi^2)}{\partial y}, \quad \partial r = \frac{\partial.(\partial\varphi^2)}{\partial z};$$

$$p = \partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + f(t), \quad q = \partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + f'(t), \quad r = \partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z} + f''(t);$$

mithin:

$$\lambda = V + \tfrac{1}{2}\partial\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\partial\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\partial\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + F(t) + \text{Const.}$$

$f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$ und $F(t)$ bezeichnen willkührliche Functionen von t.

Dieser Werth von λ unterscheidet sich also von dem Lagrange's nur durch das Hinzutreten der willkührlichen Constanten, welche mit $F(t)$ vereinigt werden kann, und durch die Producte $\partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ statt der dort gegebenen partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Man hat also φ hier aus der Gleichung

$$\partial\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \partial\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \partial\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

zu bestimmen.

Lagrange's Darstellung in diesem Paragraphen leidet übrigens an dem Fehler, dass er bei der Integration von $\partial\varphi$, einem vollständigen Differential, eine willkührliche Function von t, die er mit T bezeichnet, zufügt, statt einer willkührlichen Constanten. Nur bei der Integration der partiellen Differentiale von φ ist eine willkührliche Function von t hinzuzufügen. Doch ist Lagrange's Resultat vollkommen richtig, indem die willkührliche Function von t, welche bei der Integration der Gleichung erhalten wird, mit $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ vereinigt werden kann.

§. 21. Lagrange schliesst daraus, dass $\frac{\partial p}{\partial t}\partial x + \frac{\partial q}{\partial t}\partial y + \frac{\partial r}{\partial t}\partial z$ nach x, y, z integrabel ist, dass auch $p\partial x + q\partial y + r\partial z$ diese Eigenschaft besitze. Dieser Schluss ist falsch. Denn es ist zwar

$$p\partial x + q\partial y + r\partial z = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t} = (p^2 + q^2 + r^2)\partial t = 0,$$

also ein vollständiges Differential nach x, y, z. Aber nur dadurch, dass p, q, r sehr klein sind, und ihre zweiten Potenzen vernachlässigt werden, wird $p\partial x + q\partial y + r\partial z$ integrabel.

Streng genommen, folgt daraus, dass $\partial\varphi$ sehr klein gedacht wird, nicht, dass auch φ sehr klein sei.

Man sieht nicht ein, dass $\int p\partial t$, $\int q\partial t$, $\int r\partial t$ nothwendig die allgemeine Form $\int\varphi\partial t$ haben, und noch weniger, dass nach Veränderung von x, y, z in a, b, c

$$\int p\partial t=\frac{\partial\Phi}{\partial a},\quad \int q\partial t=\frac{\partial\Phi}{\partial b},\quad \int r\partial t=\frac{\partial\Phi}{\partial c}$$

sei. Wäre z. B. $\int p\partial t=\int(x+y+z)t\partial t=\int(a+b+c)t\partial t=\frac{a+b+c}{2}t^2$, so würde $\frac{\partial\Phi}{\partial a}=t\partial t$ sein.

§. 22. Wenn y und z im Vergleich mit x beide sehr klein sind, so sind p', p'' u. s. w., q', q'' u. s. w., r', r'' u. s. w. blosse Functionen von x und t.

§. 23. Nimmt man an, dass die Flüssigkeit schwer und gleichartig sei, so gelten streng allgemein die in meiner Bemerkung zu §. 20. gefundenen Formeln. Ist also $\partial\varphi$ irgend eine integrable Function von x, y, z, t, so ist

$$\partial\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\partial\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\partial\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0;$$

ferner hat man für die Geschwindigkeiten jedes Theilchens, in den Richtungen der Coordinaten x, y, z, die Ausdrücke:

$$p=\partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+f(t),\quad q=\partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}+f'(t),\quad r=\partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}+f''(t),$$

und für λ den Werth:

$$\lambda=V+F(t)+\tfrac{1}{2}\partial\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\tfrac{1}{2}\partial\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\tfrac{1}{2}\partial\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2,$$

welcher an der äusseren freien Oberfläche der Flüssigkeit Null wird.

§. 24. Die Gleichung (J) des §. 12. liefert, für $A=z-\alpha$, nach meinen Formeln zu §. 20.:

$$\partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=f(t).$$

Die Gleichung (K) des §. 12. liefert:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\lambda}{\partial z}=\varphi(t).$$

§. 25. Setzt man in der Gleichung

$$\partial\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\partial\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\partial\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

$$\varphi=\varphi'+z\varphi''+z^2\varphi'''+z^3\varphi^{IV}+\ldots.,$$

so erhält man:

$$(\partial\varphi'+\varphi''\partial z)\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}+2\varphi'''\right)+\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\varphi''\partial\varphi''$$
$$+z[\partial\varphi'\left(\frac{\partial^2\varphi''}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi''}{\partial y^2}+2.3\varphi^{IV}\right)+(\partial\varphi''+2\varphi'''\partial z)\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}+2\varphi'''\right)$$
$$+\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi''}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi''}{\partial y}+2\varphi''\partial\varphi'''+\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+2\varphi'''\partial\varphi'']$$
$$+z^2[(\partial\varphi'+\varphi''\partial z)\left(\frac{\partial^2\varphi'''}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'''}{\partial y^2}+3.4\varphi^{V}\right)+(\partial\varphi''+2\varphi'''\partial z)\left(\frac{\partial^2\varphi''}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi''}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.+2.3\varphi^{IV}\right)+\partial\varphi'''\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}+2\varphi'''\right)+\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'''}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'''}{\partial y}$$
$$+3\varphi''\partial\varphi^{IV}+\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi''}{\partial x}+\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi''}{\partial y}+4\varphi'''\partial\varphi'''+\ldots.=0,$$

und indem man die Glieder, welche die verschiedenen Potenzen von z enthalten, jedes für sich gleich Null setzt:

$$\varphi'''=-\frac{\partial^2\varphi'}{2\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi'}{2\partial y^2}-\frac{1}{2(\partial\varphi'+\varphi''\partial z)}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\varphi''\partial\varphi''\right),$$

$$\varphi^{IV}=-\frac{1}{2.3\partial\varphi'}\left(\frac{\partial^2\varphi''}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi''}{\partial y^2}+\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi''}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi''}{\partial y}+2\varphi''\partial\varphi'''\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+2\varphi'''\partial\varphi''\right)-\frac{\partial\varphi''+2\varphi'''\partial z}{2.3\partial\varphi'}\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}+2\varphi'''\right)=-\frac{1}{2.3\partial\varphi'}\left(\frac{\partial^2\varphi''}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi''}{\partial y^2}+\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi''}{\partial y}+\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{\partial\varphi''+\varphi'''\partial z}{3\partial\varphi'(\partial\varphi'+\varphi''\partial z)}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\varphi''\partial\varphi''\right)$$
$$+\frac{\varphi''}{2.3\partial\varphi'}[\partial.\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\partial.\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}+\frac{1}{\partial\varphi'+\varphi''\partial z}\partial.(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\varphi''\partial\varphi'')$$
$$-\frac{\partial^2\varphi'+\partial\varphi''\partial z+\varphi''\partial^2 z}{(\partial\varphi'+\varphi''\partial z)^2}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\varphi''\partial\varphi''\right)]$$
$$+\frac{\partial\varphi''}{2.3\partial\varphi'}\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}\right),$$

. . . . . .

Daher wird der Werth von φ:

$$\varphi = \varphi' + z\varphi'' - \frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} + \frac{1}{\partial\varphi' + \varphi''\partial z}\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\partial\varphi' + \varphi''\partial z}\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\frac{\partial\varphi''}{\partial\varphi' + \varphi''\partial z}\right) + \ldots.$$

Für p, q, r erhält man durch Differentiation die Werthe:

$$p = \partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + f(t) = \partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial z + z[\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial x} + \partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x}$$
$$+ \varphi''\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\partial z - \frac{\partial\varphi'}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}\right)\partial z$$
$$- \frac{\partial\varphi'}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\partial\varphi''\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi' + \varphi''\partial z}] + \ldots.,$$

$$q = \partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + f'(t) = \partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial z + z[\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial y} + \partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y}$$
$$+ \varphi''\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\partial z - \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}\right)\partial z$$
$$- \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\partial\varphi''\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi' + \varphi''\partial z}] + \ldots.,$$

$$r = \partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z} + f''(t) = \varphi''\partial\varphi' + \varphi''^2\partial z + z[\varphi''\partial\varphi''$$
$$- (\partial\varphi' + 2\varphi''\partial z)\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} + \frac{1}{\partial\varphi' + \varphi''\partial z}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \varphi''\partial\varphi''\right)\right)] - \ldots.$$

Setzt man

$$\lambda = \lambda' + z\lambda'' + z^2\lambda''' + z^3\lambda^{IV} + \ldots.,$$

so ist:

$$\lambda' = -g(x\cos\xi + y\cos\eta) + \tfrac{1}{2}(\partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial z)^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial z)^2 + \tfrac{1}{2}(\varphi''\partial\varphi' + \varphi''^2\partial z)^2,$$

$$\lambda''=-g\cos\zeta+(\partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial z)[\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial x}+\partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\varphi''\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\partial z$$
$$-\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}+\frac{1}{\partial\varphi'+\varphi''\partial z}\Big(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\varphi''\partial\varphi''\Big)\Big)\partial z]$$
$$+(\partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial z)[\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial y}+\partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\varphi''\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\partial z$$
$$-\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}+\frac{1}{\partial\varphi'+\varphi''\partial z}\Big(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\varphi''\partial\varphi''\Big)\Big)\partial z]$$
$$+(\varphi''\partial\varphi'+\varphi''^2\partial z)[\varphi''\partial\varphi''-(\partial\varphi'+2\varphi''\partial z)\Big(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}$$
$$+\frac{1}{\partial\varphi'+\varphi''\partial z}\Big(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\varphi''\partial\varphi''\Big)\Big)],$$

u. s. w.

§. 26. Die Gleichung (J) des §. 12. bringt man, für $A=z-\alpha$, am besten auf die Form:

$$r-p\frac{\partial\alpha}{\partial x}-q\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0,$$

und substituirt dann für p, q, r die Werthe der Note zum vorigen Paragraphen. Man erhält:

$$0=\varphi''\partial\varphi'+\varphi''^2\partial z-(\partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial z)\frac{\partial\alpha}{\partial x}-(\partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial z)\frac{\partial\alpha}{\partial y}$$
$$+z[\varphi''\partial\varphi''-(\partial\varphi'+2\varphi''\partial z)\Big(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}+\frac{1}{\partial\varphi'+\varphi''\partial z}\Big(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}$$
$$+\varphi''\partial\varphi''\Big)\Big)-(\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial x}+\partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\varphi''\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\partial z)\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}$$
$$+\frac{1}{\partial\varphi'+\varphi''\partial z}\Big(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\varphi''\partial\varphi''\Big)\Big)\partial z-(\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial y}+\partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y}$$
$$+\varphi''\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\partial z)\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}+\frac{1}{\partial\varphi'+\varphi''\partial z}\Big(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\varphi''\partial\varphi''\Big)\Big)\partial z]-....,$$

welche Gleichung man, indem man z in α umändert, auf folgende einfache Form bringen kann:

$$0 = \varphi''\partial\varphi' + \varphi''\partial.\alpha\varphi'' - \left(\frac{\partial.\alpha\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial.\alpha\dfrac{\partial\varphi'}{\partial y}}{\partial y}\right)(\varphi''\partial\alpha + \partial\varphi')$$

$$-\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}\right)\frac{\partial.\alpha^2\varphi''}{2} - \left(\frac{\partial.\alpha^2\partial\varphi''}{2\partial x^2} + \frac{\partial.\alpha^2\partial\varphi''}{2\partial y^2}\right)\partial\varphi'$$

$$-\left(\frac{\partial.\alpha^2\partial\varphi'}{2\partial x^2} + \frac{\partial.\alpha^2\partial\varphi'}{2\partial y^2}\right)\partial\varphi'' - \ldots.$$

§. 27. Die Gleichung (K) des §. 12. liefert, wenn man

$$\lambda = \lambda' + z\lambda'' + z^2\lambda''' + z^3\lambda^{IV} + \ldots. = 0$$

setzt, und für p, q, r meine Werthe zu §. 25. einführt, folgende Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial\lambda'}{\partial t} + (\partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial z)\frac{\partial\lambda'}{\partial x} + (\partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial z)\frac{\partial\lambda'}{\partial y} + \lambda''(\varphi''\partial\varphi' + \varphi''^2\partial z)$$

$$+z\Big[\frac{\partial\lambda''}{\partial t} + (\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial x} + \partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \varphi''\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\partial z)\frac{\partial\lambda'}{\partial x} - \frac{\partial\varphi'}{\partial x}\frac{\partial\lambda'}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}$$

$$+\frac{1}{\partial\varphi' + \varphi''\partial z}\Big(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\partial\varphi''\Big)\Big)\partial z + (\partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial z)\frac{\partial\lambda''}{\partial x}$$

$$+(\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial y} + \partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\partial z)\frac{\partial\lambda'}{\partial y} - \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\frac{\partial\lambda'}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}$$

$$+\frac{1}{\partial\varphi' + \varphi''\partial z}\Big(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\partial\varphi''\Big)\Big)\partial z + (\partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial z)\frac{\partial\lambda''}{\partial y}$$

$$+\lambda''\varphi''\partial\varphi'' - \lambda''\partial\varphi'\Big(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} + \frac{1}{\partial\varphi' + \varphi''\partial z}\Big(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\partial\varphi''\Big)\Big)$$

$$-2\lambda''\varphi''\Big(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} + \frac{1}{\partial\varphi' + \varphi''\partial z}\Big(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\partial\varphi''\Big)\Big)\partial z$$

$$+2\lambda'''(\varphi''\partial\varphi' + \varphi''^2\partial z)\Big] + \ldots. = 0.$$

§. 28. Wenn die Theilchen der Flüssigkeit, welche die freie Oberfläche bilden, während der Bewegung der Flüssigkeit stets an derselben bleiben sollen, so muss $\lambda = 0$ blos Function von a, b, c ohne t sein (§. 8.); da nun aber die Oberfläche der Flüssigkeit bei'm Ausflusse derselben aus dem Gefässe fortwährend sinkt, so müssen die Abscissen x von der Oberfläche aus genommen werden, damit λ nur Function von a, b, c ohne t sei. Hier aber ist λ Function von x und t ohne z, woraus geschlossen wird, dass die Oberfläche stets eben und horizontal ist; die x sind aber

hier von dem höchsten Punkte der Gefässwände aus gerechnet, da sie aus den Gleichungen der Gefässwände herrühren. Also kann λ nicht eine unveränderliche Function von a, b, c ohne t sein, und folglich kann auch die Bedingungsgleichung dafür, dass dieselben Flüssigkeitstheilchen stets an der Oberfläche bleiben:

$$\frac{\partial\lambda'}{\partial t}+\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\frac{\partial\lambda'}{\partial x}=\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\frac{\Theta}{\gamma}\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0$$

hier nicht gelten.

Indem man übrigens annimmt, dass die Ordinaten $y=0$ und die Ordinaten z sehr klein seien, und dass $z=\alpha$, $z=\beta$ die Gleichungen der beiden Gefässwände seien, wo α und β gegebene, sehr kleine Functionen von x vorstellen, so hat man offenbar einen Verticaldurchschnitt durch das mit der Flüssigkeit angefüllte Gefäss, der von zwei schrägen Seitenwänden begränzt wird.

Die Gleichungen, welche ausdrücken, dass die an den Gefässwänden liegenden Flüssigkeitstheilchen die Lage in dieser Schicht während der Bewegung beibehalten, sind:

$$\varphi''\partial\varphi'+\varphi''\partial.\alpha\varphi''-\frac{\partial.\alpha\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x}}{\partial x}(\varphi''\partial\alpha+\partial\varphi')-\ldots.=0,$$

$$\varphi''\partial\varphi'+\varphi''\partial.\beta\varphi''-\frac{\partial.\beta\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x}}{\partial x}(\varphi''\partial\beta+\partial\varphi')-\ldots.=0,$$

welche, indem man z, α und β als sehr kleine Grössen der ersten Ordnung betrachtet, und die von der zweiten Ordnung an vernachlässigt, übergehen in:

$$\varphi''\partial\varphi'+\varphi''\partial.\alpha\varphi''-\partial\varphi'\frac{\partial.\alpha\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x}}{\partial x}=0,$$

$$\varphi''\partial\varphi'+\varphi''\partial.\beta\varphi''-\partial\varphi'\frac{\partial.\beta\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x}}{\partial x}=0.$$

Sie eignen sich aber nicht zur Bestimmung von φ' und φ''. Berücksichtigt man blos die beiden ersten Glieder auf der linken Seite der Gleichungen, so lassen sich φ' und φ'' leicht bestimmen. Man erhält dann:

$$\partial.\alpha\varphi'' = \partial.\beta\varphi'',$$
$$\alpha\varphi'' = \beta\varphi'' + C,$$
$$\varphi'' = \frac{C}{\alpha-\beta};$$
$$\partial\varphi' = -\partial.\alpha\varphi'',$$
$$\varphi' = -\alpha\varphi'' + D = D - \frac{C\alpha}{\alpha-\beta},$$

woraus sich ferner die sehr complicirten Werthe von p, r, λ berechnen lassen.

§. 29. Es ist unbegreiflich, wie Lagrange den Druck der Flüssigkeit an der Bodenfläche des Gefässes $\lambda'' = 0$ setzen kann.

§. 30. Von den vier Gleichungen

$$\lambda' = 0,$$
$$\lambda'' = 0,$$
$$\frac{\partial\lambda'}{\partial t} + \frac{\Theta}{\gamma'}\frac{\partial\lambda'}{\partial x'} = 0,$$
$$\frac{\partial\lambda''}{\partial t} + \frac{\Theta}{\gamma''}\frac{\partial\lambda''}{\partial x''} = 0$$

müssen die drei letzteren verworfen werden. Man kann also diese Aufgabe nicht lösen.

Ueber die Lösung der Aufgabe, wie sie hier gegeben ist, ist noch Folgendes zu bemerken:

Die Gleichung

$$g\gamma' x'\partial x' - \Theta\partial\Theta\int\frac{\partial x'}{\gamma'} - \Theta\partial\vartheta - \frac{\Theta^2\partial x'}{2\gamma'} = 0$$

giebt bei'm Integriren:

$$g\int\gamma' x'\partial x' - \frac{\Theta^2}{2}\int\frac{\partial x'}{\gamma'} - \int\Theta\partial\Theta\int\frac{\partial x'}{\gamma'} - \int\Theta\partial\vartheta = \text{const.}$$

Ebenso findet man ein zweites entsprechendes Integral, welches aus der Gleichung $\lambda'' = 0$ herrührt; zieht man das erste Integral von dem zweiten ab, so erhält man:

$$g\left(\int\gamma'' x''\partial x'' - \int\gamma' x'\partial x'\right) - \frac{\Theta^2}{2}\left(\int\frac{\partial x''}{\gamma''} - \int\frac{\partial x'}{\gamma'}\right)$$
$$- \int\Theta\partial\Theta\left(\int\frac{\partial x''}{\gamma''} - \int\frac{\partial x'}{\gamma'}\right) = L,$$

woraus sich Θ nicht mittelst x' bestimmen lässt, indem vielmehr Θ als Function von x' gegeben sein müsste, um das Integral

$$\int \Theta\partial\Theta\left(\int\frac{\partial x''}{\gamma''}-\int\frac{\partial x'}{\gamma'}\right)$$

zu finden.

§. 31. Die Gleichung

$$\frac{\partial\lambda'}{\partial t}+\frac{\Theta}{\gamma'}\frac{\partial\lambda'}{\partial x'}=0$$

muss verworfen und die Gleichung $\lambda''=0$ in

$$\lambda''=x''-x'$$

umgeändert werden. Man kann also diese Aufgabe nicht lösen.

Ueber die hier mitgetheilte Lösung ist zu bemerken:

Die aus der Gleichung $\lambda''=0$ abgeleitete Gleichung ist:

$$gf\gamma'\partial x'-n\Theta\partial\Theta-\Theta\partial\vartheta-\frac{\Theta^2\gamma'\partial x'}{2h^2}=0.$$

Die aus dieser und einer früheren abgeleitete Gleichung

$$g(f-x')\gamma'\partial x'-(n-\int\frac{\partial x'}{\gamma'})\Theta\partial\Theta-\left(\frac{\gamma'}{2h^2}-\frac{1}{2\gamma'}\right)\Theta^2\partial x'=0$$

eignet sich nicht, um eine der beiden Variablen x' und Θ als Function der anderen zu bestimmen, weil ausser den endlichen Variablen x' und Θ auch deren Differentiale vorkommen. Auch durch Integration der Gleichung ist dies nicht möglich; vielmehr setzt die Integration diese Bestimmung als erledigt voraus.

§. 32. Anstatt der Gleichung $\lambda''=0$ hat man hier:

$$\lambda''=\text{const.}=x''-x',$$

wo x' bekannt, x'' unbekannt ist.

Obgleich hier drei Gleichungen zur Bestimmung von x'', und von Θ und ϑ als Functionen von t gegeben sind, so eignen sie sich wegen ihrer Form doch nicht dazu.

§. 33. Statt der Gleichung $\lambda''=0$ hat man hier:

$$\lambda''=\text{const.}=F-f=-gF+\frac{\partial\Theta}{\partial t}N+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+\frac{\Theta^2}{2H^2},$$

folglich:

$$\partial t = \frac{(N-n)\partial\Theta}{(1+g)(F-f)-\left(\frac{1}{2H^2}-\frac{1}{2h^2}\right)\Theta^2}.$$

Multiplicirt man die Gleichung

$$-gf+\frac{\partial\Theta}{\partial t}n+\frac{\partial\vartheta}{\partial s}+\frac{\Theta^2}{2h^2}=0$$

mit ∂t und integrirt, so erhält man ϑ als Function von t.

Uebrigens gelten diese Gleichungen nur für die von Lagrange in §. 28. gegebenen Werthe von λ, die sich auf die Voraussetzung gründen, dass die Formeln des §. 20. nur gelten, wenn

$$p\partial x + q\partial y + r\partial z$$

integrabel ist.

§. 34. Statt der hier behandelten vier Fälle der Bewegung einer Flüssigkeit in einem Gefässe, welches sehr eng ist und beinahe senkrechte Seitenwände hat, hat man eigentlich acht zu unterscheiden: denn der Ausfluss aus einem Gefässe von unbestimmter Höhe kann auch durch eine Oeffnung im Boden, und der Ausfluss aus einem Gefässe von bestimmter Höhe durch eine Oeffnung in der Seitenwand stattfinden.

§. 35. Da die Flüssigkeit nur durch den Canal hindurchfliesst und stets dieselbe Höhe behält, so gilt hier die Gleichung:

$$\frac{\partial\lambda'}{\partial t}+\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\frac{\partial\lambda'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\frac{\partial\lambda'}{\partial y}-g\varphi''+gz\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}\right)=0,$$

und es werden nur die Werthe von p und q, aber nicht von r bestimmt.

Nach den von mir berechneten Werthen gestalten sich übrigens die Gleichungen dieses Paragraphen so:

Die Gleichung, welche ausdrückt, dass die Flüssigkeitsschicht am Boden des Canals ihre Lage unverändert beibehält, ist:

$$\varphi''(\partial\varphi'+\partial.\alpha\varphi'')-\partial\varphi'\left(\frac{\partial.\alpha\frac{\partial\varphi'}{\partial x}}{\partial x}+\frac{\partial.\alpha\frac{\partial\varphi'}{\partial y}}{\partial y}\right)=0;$$

sie ist aber zur Bestimmung von φ' und φ'' nicht geeignet. Berücksichtigt man nur das erste Glied auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, so erhält man:

$$\partial\varphi'=-\partial.\alpha\varphi'', \quad \varphi'=-\alpha\varphi''+\text{Const.}$$

φ' und φ'' sind also beide endliche Grössen.

Der Werth von λ reducirt sich auf

$$\lambda' + z\lambda'',$$

und es ist:

$$\lambda' = \tfrac{1}{2}\partial\varphi'^2\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)^2 + \varphi''\partial\varphi'\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)^2\partial z + \tfrac{1}{2}\partial\varphi'^2\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2 + \varphi''\partial\varphi'\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2\partial z + \tfrac{1}{2}\varphi''^2\partial\varphi'^2 + \varphi''^3\partial\varphi'\partial z,$$

$$\lambda'' = -g + \partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\left(\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial x} + \partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right) + \partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\left(\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial y} + \partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)$$
$$+ \varphi''\partial\varphi'\left[\varphi''\partial\varphi'' - \partial\varphi'\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} + \frac{1}{\partial\varphi' + \varphi''\partial z}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \varphi''\partial\varphi''\right)\right)\right].$$

Die Bedingungsgleichung dafür, dass dieselben Flüssigkeitstheilchen an der Oberfläche bleiben, ist:

$$\frac{\partial\lambda'}{\partial t} + (\partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial z)\frac{\partial\lambda'}{\partial x} + (\partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial z)\frac{\partial\lambda'}{\partial y} + \lambda''(\varphi''\partial\varphi' + \varphi''^2\partial z)$$
$$+ z\left[\frac{\partial\lambda''}{\partial t} + (\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial x} + \partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x})\frac{\partial\lambda'}{\partial x} + \partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\frac{\partial\lambda''}{\partial x} + (\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial y} + \partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y})\frac{\partial\lambda'}{\partial y}\right.$$
$$+ \partial\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\frac{\partial\lambda''}{\partial y} + \lambda''\varphi''\partial\varphi'' - \lambda''\partial\varphi'\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\partial\varphi' + \varphi''\partial z}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi''\partial\varphi''\right)\right)\right.$$
$$+ \varphi''\partial\varphi'(\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial x} + \partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial x})^2 + 2\varphi''\partial\varphi'^2\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\left[\partial\varphi''\frac{\partial\varphi''}{\partial x} - \partial\varphi'\left(\frac{\partial^3\varphi'}{\partial x^3}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial^3\varphi'}{\partial x\partial y^2}\right)\right] + \varphi''\partial\varphi'(\partial\varphi'\frac{\partial\varphi''}{\partial y} + \partial\varphi''\frac{\partial\varphi'}{\partial y})^2 + 2\varphi''\partial\varphi'^2\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\left[\partial\varphi''\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\right.$$
$$\left. - \partial\varphi'\left(\frac{\partial^3\varphi'}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3\varphi'}{\partial y^3}\right)\right] + \varphi''\partial\varphi'\left[\varphi''\partial\varphi'' - \partial\varphi'\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}\right)\right]^2$$
$$- (\varphi''\partial\varphi')^2\left[\partial\varphi'\left(\frac{\partial^2\varphi''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi''}{\partial y^2}\right) + \varphi''(\partial.\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \partial.\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2})\right.$$
$$\left.\left. + \partial\varphi''\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}\right)\right]\right] = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung für λ' und λ'' die Werthe, und darauf für φ' den Werth in φ'', so erhält man eine Gleichung mit

partiellen Differentialquotienten von φ'' nach x, y, t, welche sich aber nicht integriren lässt.

Die horizontalen Geschwindigkeiten p, q jedes Flüssigkeitstheilchens sind:

$$p = \partial\varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \varphi'' \frac{\partial\varphi'}{\partial x} \partial z + z(\partial\varphi' \frac{\partial\varphi''}{\partial x} + \partial\varphi'' \frac{\partial\varphi'}{\partial x}),$$

$$q = \partial\varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \varphi'' \frac{\partial\varphi'}{\partial y} \partial z + z(\partial\varphi' \frac{\partial\varphi''}{\partial y} + \partial\varphi'' \frac{\partial\varphi'}{\partial y}).$$

§. 36. Wenn $\frac{\partial\varphi'}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi'}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi'}{\partial y}$ unendlich klein sind, so ist auch $\partial\varphi'$ unendlich klein, aber keineswegs φ'.

Vernachlässigt man in Lagrange's Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial\lambda'}{\partial t} + \frac{\partial.(\lambda' - g\alpha)\frac{\partial\varphi'}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial.(\lambda' - g\alpha)\frac{\partial\varphi'}{\partial y}}{\partial y} = 0$$

die sehr kleinen Grössen von der zweiten Ordnung an, so wird sie:

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2} = 0$$

und ist also integrabel. $\frac{\partial.\alpha\frac{\partial\varphi'}{\partial x}}{\partial x}$ und $\frac{\partial.\alpha\frac{\partial\varphi'}{\partial y}}{\partial y}$ sind als sehr kleine Grössen zweiter Ordnung zu vernachlässigen.

Streng genommen, muss z in den Gleichungen für die Gestalt der Oberfläche der Flüssigkeit und für das Beharren der Flüssigkeitstheilchen in dieser Schicht $= 0$ sein, und man hat also in den von mir berechneten Werthen:

$$\lambda = \lambda',$$

$$\lambda' = \tfrac{1}{2}\partial\varphi'^2 \left[\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2 + \varphi''^2\right].$$

Die Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, dass die Flüssigkeitstheilchen der Oberfläche an derselben bleiben, wird:

$$\frac{\partial\lambda'}{\partial t} + \partial\varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial x}\frac{\partial\lambda'}{\partial x} + \partial\varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\frac{\partial\lambda'}{\partial y} + \lambda''\varphi''\partial\varphi' = 0.$$

Die Werthe von p und q sind:

$$p = \partial\varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial x}, \quad q = \partial\varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial y}.$$

Nimmt man diese als unendlich klein an, so ist auch $\partial\varphi'$ unendlich klein, also $\lambda'=0$, und die obige Bedingungsgleichung wird, indem die sehr kleinen Grössen von der zweiten Ordnung an vernachlässigt werden:

$$-g\varphi''\partial\varphi'=g\frac{\varphi'}{\alpha}\partial\varphi'-C\partial\varphi'=0,$$

welche integrabel sein kann.

Auf die Wellenbewegung kann diese Gleichung natürlich nicht angewendet werden.

§. 37. Nimmt man an, dass der Boden des Canals oder Beckens horizontal sei, so dass α constant und gleich der Tiefe der Flüssigkeit wird, so ändert sich die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}=0$$

nicht. Die nach meinen Werthen berechnete Bedingungsgleichung wird nothwendig integrabel; ihr Integral ist:

$$\frac{g}{2\alpha}\varphi'^2-C\varphi'=D,$$

wo C und D willkührliche Constanten sind; folglich:

$$\varphi'=\frac{1}{g}(C\alpha+\sqrt{C^2\alpha^2+2Dg\alpha}).$$

φ' wird also eine sehr kleine Grösse der ersten Ordnung.

Zwölfter Abschnitt.

§. 7. Die Gleichung (l) ist auch hier, wie im vorigen Abschnitte die Gleichung (L), ohne Weiteres integrabel, und liefert:

$$E=-V-\frac{p^2+q^2+r^2}{2}-\text{Const.}$$

Setzt man hier eben so, wie in meiner Note zu §. 20. des vorigen Abschnitts:

$$\partial x\partial p+\partial y\partial q+\partial z\partial r=\partial.(\partial\varphi^2),$$

wo $\partial\varphi$ irgend eine integrable Function von x, y, z, t ist, und t in den partiellen Differentialen von $\partial\varphi^2$ als constant angesehen wird, so ist:

$$\partial p = \frac{\partial.(\partial\varphi^2)}{\partial x}, \quad \partial q = \frac{\partial.(\partial\varphi^2)}{\partial y}, \quad \partial r = \frac{\partial.(\partial\varphi^2)}{\partial z};$$

$$p = \partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + f(t), \quad q = \partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + f'(t), \quad r = \partial\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z} + f''(t);$$

mithin:

$$E = -V - \tfrac{1}{2}\partial\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\partial\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\partial\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - F(t).$$

§. 8. Die Gleichung (g) des §. 4. giebt, wenn man die von mir berechneten Werthe von p, q, r einführt:

$$gh\partial\varphi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) + gh\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$
$$+ \partial\varphi\left(\frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \frac{\partial E}{\partial t} + F'(t) = 0.$$

Substituirt man in diese Gleichung für E den in meiner Anmerkung zum vorigen Paragraphen gefundenen Werth, so erhält man:

(n)

$$gh\partial\varphi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) + gh\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$
$$- \partial\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \partial\varphi^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^3\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^3\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^3\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] - \partial\varphi^3\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]$$
$$- \partial\varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] - \partial\varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$- \partial\varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] - \partial\varphi^3\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)$$
$$- \partial\varphi^3\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\right) - \partial\varphi^3\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\right)$$
$$- \partial\varphi\partial.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] - \partial\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial y}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial z}\right) + F'(t) = 0.$$

§. 9. Wenn φ im Zustande des Gleichgewichts Null ist, so

kann für diesen Zustand $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ sein oder auch nicht. Wenn z. B. $\varphi=axt=0$ für den Zustand des Gleichgewichts, wo $t=t'$ sei, so ist $ax=0$, also $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=ax=0$. Wenn aber $\varphi=ax+t=0$ für den Zustand des Gleichgewichts, so ist $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=1$.

Wenn $\Delta=e^{-\frac{V}{gh}}(1+s)$ ist, so ist:

$$l.V=-\frac{V}{gh}+l.(1+s),$$

und wenn man, da s sehr klein gedacht wird, die zweiten und höheren Potenzen dieser Grösse vernachlässigt:

$$l.\Delta=-\frac{V}{gh}+s.$$

Dagegen sehe ich nicht ein, wie Lagrange seinen Werth

$$l.\Delta=-\frac{V}{gh}-s$$

erhält.

Aus $l.\Delta=s-\frac{V}{gh}$ folgt:

$$s=-\frac{\partial\varphi}{gh\partial t}.$$

Es frägt sich übrigens, inwiefern die dieser ganzen Untersuchung über den Schall zu Grunde liegende Annahme, dass die Geschwindigkeiten jedes einzelnen schwingenden Lufttheilchens in der Richtung der Coordinaten, p, q, r sehr klein seien, gerechtfertigt ist: denn aus der Kleinheit der Excursionen ∂x, ∂y, ∂z folgt nicht die Kleinheit von $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, und bekanntlich nimmt man an, dass die Luftschwingungen äusserst schnell sind.

Die von mir in den Noten zu §. 7. und §. 8. berechneten Gleichungen lassen sich ohne Weiteres auf jede Bewegung eines Gases, also auch auf den Schall, anwenden. Setzt man p, q, r sehr klein, so muss auch $\partial\varphi$ sehr klein sein, aber nicht $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$; und vernachlässigt man die Potenzen von $\partial\varphi$ von der zweiten an, so lassen sich auch meine Formeln, obgleich sie complicirter sind, behandeln.

§. 11. Setzt man für $F(x+t\sqrt{gh})$ und $f(x-t\sqrt{gh})$ beliebige Functionen von $x+t\sqrt{gh}$ und $x-t\sqrt{gh}$ und differentiirt sie, so überzeugt man sich leicht, dass

$$\frac{\partial F(x+t\sqrt{gh})}{\partial x+\partial t\sqrt{gh}}+\frac{\partial f(x-t\sqrt{gh})}{\partial x-\partial t\sqrt{gh}}=\frac{\partial F(x+t\sqrt{gh})+\partial f(x-t\sqrt{gh})}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F(x+t\sqrt{gh})}{\partial x+\partial t\sqrt{gh}}-\frac{\partial f(x-t\sqrt{gh})}{\partial x-\partial t\sqrt{gh}}=\frac{\partial F(x+t\sqrt{gh})+\partial f(x-t\sqrt{gh})}{\partial t\sqrt{gh}}=\frac{\partial\varphi}{\partial t\sqrt{gh}},$$

wie es sein muss.

§. 12. Man kennt die Werthe von $F'(a+z)$ und von $f'(-z)$, so lange $z\leqq a$ ist; ferner die von $F'(2a+z)$ und von $f'(-a-z)$, u. s. w.

Die Zeit einer Oscillation verhält sich zur Zeit des Falls eines Körpers von der Höhe $\frac{h}{2}$ wie $2a:1$, nicht aber wie $2a:h$.

§. 13. Ebenso, wie im vorigen Paragraphen, sind hier $F'z$ und $f'(a-z)$ durch den Initialzustand der tönenden Luftsäule gegegeben, so lange $z\leqq a$ ist.

§. 14. Wenn man für z eine positive Grösse setzt, welche $\leqq a$ ist, so werden die Functionen $F'(x+t\sqrt{gh})$ und $f'(x-t\sqrt{gh})$ nur reelle Werthe haben, so lange man $x\pm t\sqrt{gh}=z$ hat.

§. 16. Ueber die Lage der reflectirten Schallwellen gegen die ursprünglichen entscheiden die Formeln für die entsprechenden Abscissen

$$x=2a-z-t\sqrt{gh}$$

und

$$x=z-t\sqrt{gh}$$

nichts wegen des zwischen 0 und a veränderlichen Werthes von z.

XXV.

Entwurf einer neuen Theorie der elliptischen Integrale.

Von

Herrn Doctor *A. Weiler*,

Lehrer der Mathematik an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

§. 1.

Um das elliptische Integral der ersten Art:

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}} = F(e, \psi),$$

worin der Modulus e und die Amplitude ψ beide zwischen 0 und 1 angenommen sind, zu berechnen, bedient man sich bekanntlich der Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad \operatorname{tg}\psi_1 = \frac{\sin 2\psi}{e_1 + \cos 2\psi}, \quad \text{worin} \quad e_1 = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}$$

ist. An die Stelle von ψ führt man die neue Veränderliche ψ_1 in die Funktion $F(e, \psi)$ ein, und man erhält die Gleichung:

$$F(e, \psi) = \frac{1+e_1}{2} . F(e_1, \psi_1).$$

Der neue Modulus e_1 ist $< e$. Indem man dieselbe Transformation wiederholt in Anwendung bringt, gelangt man sehr bald zu einem Modulus, welcher nur wenig von Null verschieden ist. Setzt man aber den durch die $n$malige Transformation erhaltenen Modulus $e_n = 0$, so entsteht, da dann $F(e_n, \psi_n) = \psi_n$ ist, die Gleichung

$$F(e, \psi) = \frac{1+e_1}{2} \cdot \frac{1+e_2}{2} \cdot \frac{1+e_3}{2} \cdots \frac{1+e_n}{2} \psi_n.$$

Dies Verfahren fördert sehr schnell. Mit Recht hat man demselben vor jedem andern Verfahren den Vorzug gegeben, welches zur Berechnung der Funktion $F(e, \psi)$ aufgestellt worden ist. Man setzt vortheilhaft $e = \sin\alpha$, $e_1 = \sin\alpha_1$ u. s. w. Denn man

erhält dann, um die auf einander folgenden Amplituden und Modulen zu berechnen, die Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \operatorname{tg}(\psi_1 - \psi) = \cos\alpha . \operatorname{tg}\psi, \quad \sin\alpha_1 = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ferner hat man die Gleichung:

$$F(e, \psi) = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2} . \cos^2\frac{\alpha_1}{2} . \cos^2\frac{\alpha_2}{2} \ldots . \cos^2\frac{\alpha_{n-1}}{2}} . \frac{\psi_n}{2^n}.$$

§. 2.

Dasselbe Verfahren in der Anwendung auf die elliptischen Integrale der zweiten und dritten Art:

$$\int_0^{\psi} d\psi \sqrt{1 - e^2\sin^2\psi} = E(e, \psi),$$

$$\sin\varphi\cos\varphi . \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi} . \int_0^{\psi} \frac{e^2\sin^2\psi}{1 - e^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} . \frac{d\psi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\psi}}$$

$$= \Pi(e, \varphi, \psi)$$

führt zu Weitläuftigkeiten. Man hat sich veranlasst gesehen, anderen Wegen nachzuforschen, auf welchen man zu den Zahlenwerthen der Funktionen $E(e, \psi)$ und $\Pi(e, \varphi, \psi)$ gelangen könnte.

Da zur Berechnung von $F(e, \psi)$ ein Verfahren gegeben war, welches Nichts zu wünschen übrig lässt, so hat man sich die Aufgabe gestellt, die elliptischen Integrale der zweiten und dritten Art $E(e, \psi)$ und $\Pi(e, \varphi, \psi)$ nicht mehr als Funktionen von e, φ, ψ, sondern als Funktionen von e, $F(e, \varphi)$, $F(e, \psi)$ aufzufassen. Die Umkehrung der Funktion $F(e, \psi)$, wodurch nämlich die Amplitude ψ als Funktion von $F(e, \psi)$ dargestellt wird, bildet die Grundlage zu diesen Untersuchungen. Durch eine sehr kunstvolle Analysis hat Jacobi Reihenentwicklungen für die elliptischen Integrale der zweiten und dritten Art aufgestellt, welche in Rücksicht auf Einfachheit und auf Convergenz Alles übertreffen, was vorher in dieser Absicht geleistet war.

Wenn ich auch mit Anderen die Bewunderung für den schönen Erfolg der Jacobi'schen Entwicklungen theile, so hat es mir doch stets widerstrebt, eine so weit ausholende und so kunstvolle Rechnung durchzuführen, um ein so nahe liegendes Ziel zu erreichen, wie es nach meinem Dafürhalten die Berechnung der

elliptischen Integrale ist. Es konnte die Ueberzeugung in mir nicht aufkommen, dass es nicht noch einen andern Weg gebe, welcher die elliptischen Integrale der zweiten und dritten Art $E(e, \psi)$ und $\Pi(e, \varphi, \psi)$ unmittelbar als Funktionen von e, φ, ψ darstellend zu wenigstens annähernd eben so einfachen Resultaten führe. Nachdem ich manchen mühevollen Weg verfolgt hatte, der mich mehr oder weniger von meinem Ziele abzog, griff ich erst spät zu dem geeigneten Mittel. Ich hatte dasselbe nur darum lange Zeit unbenutzt gelassen, weil es näher liegt als zu erwarten war. Die Resultate, wozu mich meine Untersuchungen über einen so vielfach behandelten Gegenstand geführt haben, sind meines Wissens neu, und ich denke, auch der Mittheilung nicht unwerth. Ein guter Ausgangspunkt für die Vergleichung mit den Jacobi'schen Resultaten ist durch den Umstand gegeben, dass diejenigen Bestandtheile, in welche die elliptischen Integrale der zweiten und dritten Art $E(e, \psi)$ und $\Pi(e, \varphi, \psi)$ auf den Grund der Jacobi'schen Theorie hin aus einander fallen, in ähnlicher Gestalt in den von mir aufgefundenen Resultaten sich vorfinden, nur mit dem Unterschiede, dass dieselben nicht mehr als Funktionen von $F(e, \varphi)$ und $F(e, \psi)$, sondern als Funktionen von φ und ψ sich darstellen.

§. 3.

Mein Verfahren gründet sich auf den Gebrauch der Transformation

$$(b) \quad \sqrt{e_1 y_1} = \frac{1-\sqrt{1-e^2y^2}}{ey}, \text{ worin } \sqrt{e_1} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}$$

ist. Man erhält dadurch die Gleichung:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}} = (1+e_1)\frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-e_1^2y_1^2)}}.$$

Wenn man $y = \sin\psi$ und $y_1 = \sin\psi_1$ setzt, so entsteht durch die Integration:

$$F(e, \psi) = (1+e_1).F(e_1, \psi_1),$$

was sich leicht mit dem obigen Resultat des §. 1. vergleichen lässt.

Der Modulus erleidet, wie man sieht, ganz dieselbe Aenderung, wie durch die dort erwähnte Transformation. Dagegen hat die transformirte Funktion nun nicht den Faktor $\frac{1+e_1}{2}$, sondern den doppelten Faktor $1+e_1$. Andererseits wächst hier die neue

Amplitude ψ_1 von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gleichzeitig mit der ursprünglichen Amplitude ψ, während eben diese Aenderung von ψ für die Amplitude ψ_1 vorhin den doppelten Zuwachs von 0 bis π ergab.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Transformationen (a) und (b), welcher ganz besonders in Betracht kommt, besteht darin, dass die letztere nicht so wie die erstere nur dann zulässig ist, wenn y zwischen 0 und 1 liegt, so dass jederzeit $y = \sin\psi$ gesetzt werden kann. Die Amplitude y darf hier auch zwischen 1 und $\frac{1}{e}$ gedacht werden. Der Umstand, dass die letztere Transformation der Amplitude einen grösseren Spielraum gestattet, lässt eine weitere Reduktion des Modulus zu, welche für die Convergenz der Reihenentwicklungen von Wichtigkeit ist.

Man bemerke zunächst, dass der Modulus e durch die beiden Transformationen in einem um so grösseren Verhältnisse abnimmt, je kleiner sein Werth ist, und dass derselbe nur langsam sich ändert, wenn y nahe bei 1 oder α nahe bei $\frac{\pi}{2}$ liegt. In der That hat man für die beiden auf einander folgenden Winkel α und α_1 das Verhältniss:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos^3\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

was für $\alpha = 0$ den Werth ∞ annimmt; für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ aber den Werth 1, so dass also in dem letzteren Falle $\alpha_1 = \alpha$ ist.

Man betrachte nun die Gleichung, wodurch man bekanntlich die Amplitude, wenn sie zwischen 1 und $\frac{1}{e}$ liegt, auf eine andere zwischen 0 und 1 zurückführt, um alsdann die Transformation (a) in Anwendung bringen zu können. Man gebraucht dazu die Gleichung:

(c) $$1 - e^2y^2 = c^2x^2, \text{ worin } c = \sqrt{1-e^2}.$$

Anstatt y führt man die neue Veränderliche x in das elliptische Integral ein, und man erhält die Gleichung:

$$\frac{dy}{\sqrt{-(1-y^2)(1-e^2y^2)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

Anstatt $y = 1$ und $y = \frac{1}{e}$ ergeben sich in der That die neuen Inte-

grationsgrenzen $x=1$ und $x=0$. Indem man aber so die Amplitude y in der angegebenen Weise umwandelt, erfährt zugleich der Modulus eine Aenderung. Anstatt des Modulus $e=\sin\alpha$ erhält man den neuen Modulus $c=\sqrt{1-e^2}=\cos\alpha$.

Da nun die Transformation (b) auch diejenige Amplitude y zulässt, welche zwischen 1 und $\frac{1}{e}$ liegt, so wird hier die Transformation (c) in der angegebenen Absicht entbehrlich. Man wird aber doch Gebrauch davon machen, um den Winkel α, welcher jedenfalls zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gedacht werden muss, wenn die Berechnung des elliptischen Integrals auf die Transformation (a) gegründet ist, durch einen andern Winkel zu ersetzen, welcher zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ liegt. Aus den angegebenen Rücksichten erhellet, dass die Convergenz der Reihenentwicklungen durch diese Reduktion des Modulus wesentlich gefördert wird.

Auch die Transformation (b) zieht aus der Einführung von trigonometrischen Funktionen grossen Gewinn. Ich setze hier $ey=\sin\psi$, $e_1y_1=\sin\psi_1$, $e=\sin\alpha$, $e_1=\sin\alpha_1$, und ich behalte die beiden Gleichungen:

$$\text{(b)} \qquad \sin\psi_1=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} \text{ und } \sin\alpha_1=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Darin ist, wie schon erwähnt, α jederzeit zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ angenommen; der Winkel ψ aber, weil y zwischen 0 und $\frac{1}{e}$ liegen soll, liegt zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$.

§. 4.

So lange y zwischen 0 und $\frac{1}{e}$ liegt, hat die Grösse $\sqrt{1-e^2y^2}$ einen reellen positiven Werth. Die Grösse $\sqrt{1-y^2}$ dagegen ist nur so lange reell, als $y<1$ gedacht wird. Wenn $y>1$ ist, so hat dieselbe den Faktor $\sqrt{-1}$. Dies verlangt, dass man in der Integralform

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-e^2y^2)}}$$

die Amplituden zwischen 0 und 1 von den zwischen 1 und $\frac{1}{e}$ liegenden trenne. Um in den beiden Fällen denselben Ausgangspunkt für die Veränderliche y zu haben, schreibe ich das elliptische Integral der ersten Art in der Form:

$$\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}} = F(e, y).$$

So lange $y < 1$ ist, stellt dasselbe einen reellen positiven Werth vor. Für den andern Fall $y > 1$ hat man, wenn

$$\sqrt{1-y^2} = \sqrt{-1}.\sqrt{y^2-1}$$

gesetzt wird, jedesmal einen positiven Werth $F(e, y)$, verbunden mit dem Faktor $\sqrt{-1}$.

Ebenso bin ich veranlasst, den elliptischen Integralen der zweiten und dritten Art jedesmal die obere Integrationsgrenze $y = 1$ zu geben.

§. 5.

Indem ich die Transformation (b) wiederholt in Anwendung bringe, gelange ich zu Reihenentwicklungen, welche für die elliptischen Integrale der zweiten und dritten Art eben so vortheilhaft sich gestalten, als für das der ersten Art. Man gelangt zu diesen Entwicklungen auf verschiedenen Wegen. Es finden sich verschiedene Ausgangspunkte der Rechnung, und ich habe mich über die Wahl des einzuschlagenden Weges noch nicht einigen können. Desshalb habe ich geglaubt, vorerst nur die Resultate mittheilen zu dürfen. Es möchte übrigens für den Leser keine besonderen Schwierigkeiten haben, dieselben auf dem einen oder auf dem andern Wege zu erlangen, da nun die Transformation (b) gegeben ist, welche bei dieser Unternehmung als Leitfaden dienen soll.

In den nachfolgenden Blättern soll untersucht werden, was meine Resultate in der Berechnung der elliptischen Integrale leisten. Insbesondere war ich bemüht, die Convergenz der Reihen abzuschätzen. Das Verfahren, welches zu den Zahlenresultaten führt, glaubte ich durch verschiedene Beispiele erläutern zu müssen. Diejenigen Gleichungen, deren Entwicklung nicht beigefügt ist, habe ich mit römischen Ziffern bezeichnet. Ich habe andere Gleichungen daraus abgeleitet, aber den Weg genauer angegeben,

welcher dazu führt. Den letzteren Gleichungen sind gewöhnliche Ziffern beigefügt.

§. 6.

Man bezeichnet das elliptische Integral der ersten Art, so lange der Modulus e keine Aenderung erleidet, kürzer durch $F(y)$. Ich schreibe desshalb:

$$\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}} = F(y),$$

und ich erhalte den Werth:

$$\text{I.} \qquad F(y) = \frac{1}{\varepsilon(\alpha)} \cdot \int_z^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \text{worin } z = y\frac{\varepsilon(\alpha)}{\varepsilon(\psi)}.$$

Ferner ist $\sin\psi = ey$ und $\sin\alpha = e$. Die Berechnung von $F(y)$ kommt demnach zurück auf die Berechnung der Funktion $\varepsilon(\psi)$. Diese lässt sich in einer Faktorenreihe entwickeln. Es ist:

$$\varepsilon(\psi) = \cos^2\frac{\psi}{2} \cdot \cos^2\frac{\psi_1}{2} \cdot \cos^2\frac{\psi_2}{2} \cdot \cos^2\frac{\psi_3}{2} \ldots.$$

Zur Bestimmung der auf einander folgenden Werthe ψ und α hat man die Gleichungen:

$$\sin\psi_1 = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}, \quad \sin\alpha_1 = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\psi_2 = \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi_1}{2}, \quad \sin\alpha_2 = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha_1}{2},$$

$$\sin\psi_3 = \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi_2}{2}, \quad \sin\alpha_3 = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha_2}{2},$$

u. s. w.

Man ersieht daraus, wenn $\psi = \alpha$, dass auch $\psi_n = \alpha_n$. Ferner folgt, dass $\psi_n <$ oder $> \alpha_n$, jenachdem $\psi <$ oder $> \alpha$ ist.

Der Werth $\varepsilon(\psi)$ liegt in allen Fällen zwischen 0 und 1. Man hat $\varepsilon(0) = 1$, und wenn ψ zunimmt, so nimmt der Werth $\varepsilon(\psi)$ ab. Es ist also $\varepsilon(\psi) > \varepsilon(\alpha)$, wenn $\psi < \alpha$, und $\varepsilon(\psi) < \varepsilon(\alpha)$, wenn $\psi > \alpha$ angenommen wird.

Man könnte übrigens auch einfacher $z = y_n = \dfrac{\sin\psi_n}{\sin\alpha_n}$ setzen, was gleichbedeutend ist mit dem obigen Werthe $z = y \cdot \dfrac{\varepsilon(\alpha)}{\varepsilon(\psi)}$, wenn darin nur die n ersten Faktoren von $\varepsilon(\psi)$ in Betracht kommen. Denn man hat die identische Gleichung:

1. $$y_n = y \cdot \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha_1}{2} \ldots \cos^2\frac{\alpha_{n-1}}{2}}{\cos^2\frac{\psi}{2} \cdot \cos^2\frac{\psi_1}{2} \ldots \cos^2\frac{\psi_{n-1}}{2}}.$$

Der Ausdruck $\frac{\sin\psi_n}{\sin\alpha_n}$ ist aber für die Berechnung von z ungeeignet, da derselbe für ein hinreichend grosses n die Gestalt $\frac{0}{0}$ annimmt. Man könnte aber den Werth z noch auf andere Weise berechnen. Denn man hat auch die identische Gleichung:

2. $$\frac{\sqrt{1-y_n^2}}{y_n} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \cdot \frac{\sec\psi_1 \sec\psi_2 \ldots \sec\psi_n}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha_1}{2} \ldots \cos^2\frac{\alpha_{n-1}}{2}}.$$

Endlich findet man auch die Gleichung:

3. $$\sqrt{\frac{1-y_n}{1+y_n}}$$
$$= \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi_1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi_2}{2}\right)\ldots\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi_n}{2}\right).$$

Für $y=1$ oder $\psi=\alpha$ ist auch $z=1$. Ferner findet sich $z<$ oder >1, je nachdem $y<$ oder >1 ist. In dem ersteren Falle kann man schreiben:

4. $$F(y) = \frac{1}{\varepsilon(\alpha)} \operatorname{arc\,cos} z.$$

Setzt man $y=0$, so geht dies über in:

5. $$F(0) = \frac{1}{\varepsilon(\alpha)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

In dem andern Falle hat man, wenn $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{-1}.\sqrt{y^2-1}$ gesetzt wird,

$$F(y) = \frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon(\alpha)} l(z + \sqrt{z^2-1}).$$

Man setze noch $\sin\omega = \frac{1}{z} = \frac{1}{y} \cdot \frac{\varepsilon(\psi)}{\varepsilon(\alpha)}$, und man behält:

6. $$F(y) = \frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon(\alpha)} \cdot l \cot\frac{\omega}{2}.$$

§. 7.

Die drei ersten Faktoren der Entwicklung $\varepsilon(\psi)$ sind jederzeit hinreichend, um den Werth $F(y)$ auf mindestens neun Dezimalstellen genau herzustellen. Es seien Beispiels halber die beiden Werthe $\varepsilon\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $\varepsilon\left(\frac{\pi}{4}\right)$ zu berechnen, wobei $\alpha=\frac{\pi}{4}$ angenommen ist. Ich schreibe desshalb die folgenden Werthe nieder:

$$\begin{aligned}
&\log\operatorname{tg}45^0 &&= 0\\
+&\log\operatorname{tg}22^0\,30' &&= 9{,}6172243 = \log\sin 24^0\,28'\,11{,}28'' = \log\sin\psi_1\\
2&\log\operatorname{tg}22^0\,30' &&= 9{,}2344486 = \log\sin\ 9^0\,52'\,45{,}44'' = \log\sin\alpha_1\\
&\log\operatorname{tg}12^0\,14'\ 5{,}64'' &&= 9{,}3361500\\
+&\log\operatorname{tg}\ 4^0\,56'\,22{,}72'' &&= 8{,}9366510\\
&&&\overline{8{,}2728010 = \log\sin 1^0\ 4'\,25{,}91'' = \log\sin\psi_2}\\
2&\log\operatorname{tg}\ 4^0\,56'\,22{,}72'' &&= 7{,}8733030 = \log\sin\ \ 25'\,40{,}75'' = \log\sin\alpha_2.
\end{aligned}$$

Nachdem man so die vier Winkel ψ_1, ψ_2, α_1, α_2 bestimmt hat, schreibt man weiter:

$$\begin{aligned}
&\log\cos^2 45^0 &&= 9{,}6989700\\
+&\log\cos^2 12^0\,14'\ 5{,}64'' &&= 9{,}9800442\\
+&\log\cos^2\ \ 32'\,12{,}95'' &&= 9{,}9999619\\
&&&\overline{\log\varepsilon\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}6789761 - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\log\cos^2 22^0\,30' &&= 9{,}9312306\\
+&\log\cos^2\ 4^0\,56'\,22{,}72'' &&= 9{,}9967680\\
+&\log\cos^2\ \ 12'\,50{,}37'' &&= 9{,}9999940\\
&&&\overline{\log\varepsilon\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}9279926 - 1.}
\end{aligned}$$

Die siebente Dezimalstelle in den hier berechneten Werthen ist nur desshalb unzuverlässig, weil die Logarithmentafel, deren ich mich bedient habe, überhaupt nur sieben Dezimalstellen enthält.

Es frägt sich nun, welche Aenderung der Werth $F(y)$ erfährt, wenn man zu den drei ersten Faktoren der Entwicklung $\varepsilon(\psi)$ den vierten Faktor hinzufügt. Da die Aenderung von z nur klein ist, so kann man die Aenderung von $F(y)$ darstellen durch die Gleichung:

$$\Delta F(y) = \frac{1}{\varepsilon(\alpha)} \cdot \frac{-\Delta z}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Nun ist aber $-\Delta z = z(1 - \frac{\cos^2\frac{\alpha_3}{2}}{\cos^2\frac{\psi_3}{2}})$ und $z = \frac{\sin\psi_3}{\sin\alpha_3}$. Desshalb

$$\Delta F(y) = \frac{1}{\varepsilon(\alpha)} \cdot \frac{\sin\psi_3 \,(\cos^2\frac{\psi_3}{2} - \cos^2\frac{\alpha_3}{2})}{\cos^2\frac{\psi_3}{2}\sqrt{\sin^2\alpha_3 - \sin^2\psi_3}}.$$

Da ferner $\cos^2\frac{\psi_3}{2} - \cos^2\frac{\alpha_3}{2} = \sin^2\frac{\alpha_3}{2} - \sin^2\frac{\psi_3}{2}$; und da wegen der Kleinheit von ψ_3 und α_3 der Faktor $\cos^2\frac{\psi_3}{2} = 1$ und $\sin\frac{\alpha_3}{2} = \frac{1}{2}\sin\alpha_3$ und $\sin\frac{\psi_3}{2} = \frac{1}{2}\sin\psi_3$ gesetzt werden können, so kann man endlich auch schreiben:

$$\Delta F(y) = \frac{\sin\psi_3\sqrt{\sin^2\alpha_3 - \sin^2\psi_3}}{4\,.\,\varepsilon(\alpha)}.$$

In dem obigen Beispiel, wo $\psi = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = \frac{\pi}{4}$ angenommen ist, findet man $\psi_3 = 7{,}2''$ und $\alpha_3 = 2{,}9''$; oder, in Theilen des Halbmessers 1 ausgedrückt, annähernd $\psi_3 = 0{,}000035$ und $\alpha_3 = 0{,}000014$. Wenn dies in die obige Gleichung eingesetzt wird, so erhält man:

$$\Delta F(y) = 0{,}000\,000\,000\,3\,.\sqrt{-1}.$$

Man sieht aber ein, dass die Aenderung $\Delta F(y)$ am grössten ist, wenn ψ und α beide ihren grössten Werth erhalten, oder wenn $\psi = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Daraus folgt, dass der Werth $F(y)$ in allen Fällen auf mindestens neun Dezimalstellen genau berechnet wird, wenn man sich auf die drei ersten Faktoren der Funktion $\varepsilon(\psi)$ beschränkt.

§. 8.

Die elliptischen Integrale der zweiten und dritten Art schreibe ich in einer von der gewöhnlichen etwas abweichenden Form an. Ich glaubte dieselbe so einrichten zu müssen, dass man zu der möglichst einfachen Reihenentwicklung gelangt. Indem ich von der gebräuchlichen Form ausging, fand ich, dass gewisse Glieder der entsprechenden Reihenentwicklung mit derselben sich vereinigen lassen. Durch die Vereinigung ergaben sich andere Formen, welche auf den Grund der von mir aufgestellten Reihen-

entwicklungen hin als die Grundformen der elliptischen Integrale der zweiten und dritten Art angesehen werden dürften.

Das elliptische Integral der zweiten Art schreibe ich in der Form:

$$\int_y^1 \frac{dy}{y^2}\sqrt{\frac{1-y^2}{1-e^2y^2}} = G(y).$$

Der Zahlenwerth ist reell und positiv, wenn $y<1$; dagegen hat man einen negativen Werth, verbunden mit dem Faktor $\sqrt{-1}$, wenn $y>1$ angenommen wird. Zur Bestimmung von $G(y)$ erhalte ich die Gleichung:

$$\text{II.} \qquad G(y)+\cos\alpha.\zeta(\alpha).F(y)=\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.\zeta(\psi).$$

Darin ist wieder $\sin\psi=ey$ und $\sin\alpha=e$. Die Funktion $G(y)$ ist demnach zurückgeführt auf die Funktion $\zeta(\psi)$. Man hat aber:

$$\zeta(\psi)=-1-\frac{2}{\cos\psi_1}-\frac{4}{\cos\psi_1\cos\psi_2}-\ldots.+\frac{2^n}{\cos\psi_1\cos\psi_2\ldots.\cos\psi_n},$$

worin die auf einander folgenden Winkel ψ gleichbedeutend sind mit den vorhin für die Reihenentwicklung von $\varepsilon(\psi)$ berechneten. Die Glieder der Reihe sind alle mit dem negativen Zeichen behaftet, ausgenommen das letzte Glied, welches das positive Zeichen hat. Die Wahl des letzten Gliedes hängt davon ab, dass $\cos\psi_{n+1}=1$ gesetzt werden kann.

Der Werth $\zeta(\psi)$ liegt jederzeit zwischen 1 und 2. Man hat $\zeta(0)=1$; und bei wachsendem ψ nimmt auch der Werth $\zeta(\psi)$ zu.

§. 9.

Die drei ersten Glieder der Reihe $\zeta(\psi)$ sind in allen Fällen hinreichend, um den Zahlenwerth der Grösse $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.\zeta(\psi)$ auf mindestens acht Dezimalstellen genau herzustellen, so dass also, wenn nicht eine noch grössere Genauigkeit verlangt wird, jederzeit

$$\zeta(\psi)=-1-\frac{2}{\cos\psi_1}+\frac{4}{\cos\psi_1\cos\psi_2}$$

gesetzt werden kann.

Es seien nun Beispiels halber die Werthe $\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $\zeta\left(\frac{\pi}{4}\right)$ zu berechnen, wobei wieder $\alpha = \frac{\pi}{4}$ angenommen ist. Man schreibe desshalb:

$$\begin{aligned}
-\log\cos 24^\circ 28' 11{,}28'' &= 0{,}0408728 = \log 1{,}098684\\
-\log\cos\ 1^\circ\ 4' 25{,}91'' &= 0{,}0000763\\
&\overline{0{,}0409491 = \log 1{,}098877.}\\
\text{Folglich } \zeta\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= -1 - 2{,}197368\\
&\quad + 4{,}395508\\
&\overline{= 1{,}198140}\\
-\log\cos\ 9^\circ 52' 45{,}44'' &= 0{,}0064882 = \log 1{,}0150532\\
-\log\cos\ \ 25' 40{,}75'' &= 0{,}0000122\\
&\overline{0{,}0065004 = \log 1{,}0150795.}\\
\text{Folglich } \zeta\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= -1 - 2{,}0301064\\
&\quad + 4{,}0603180\\
&\overline{= 1{,}0302116.}
\end{aligned}$$

Wollte man das vierte Glied der Reihe noch in die Rechnung bringen, so würde zu dem oben angeschriebenen einfacheren Ausdruck hinzukommen:

$$-\frac{8}{\cos\psi_1\cos\psi_2} + \frac{8}{\cos\psi_1\cos\psi_2\cos\psi_3} = \frac{8(1-\cos\psi_3)}{\cos\psi_1\cos\psi_2\cos\psi_3}$$

$$= \frac{16\sin^2\frac{\psi_3}{2}}{\cos\psi_1\cos\psi_2\cos\psi_3}.$$

Daraus folgt weiter, dass:

$$\Delta\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.\zeta(\psi) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.\frac{16\sin^2\frac{\psi_3}{2}}{\cos\psi_1\cos\psi_2\cos\psi_3}.$$

Nun darf man aber wegen 2. des §. 6. die folgende Gleichung anschreiben:

$$\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.\frac{1}{\cos\psi_1\cos\psi_2\cos\psi_3} = \frac{\varepsilon(\alpha).\sqrt{\sin^2\alpha_3 - \sin^2\psi_3}}{\sin\psi_3},$$

Da ferner annähernd $2\sin\frac{\psi_3}{2} = \sin\psi_3$ gesetzt werden kann, so erhält man den Werth:

$$\Delta\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.\zeta(\psi)=4\varepsilon(\alpha).\sin\psi_3\sqrt{\sin^2\alpha_3-\sin^2\psi_3}.$$

Dieser Zuwachs zeigt sich am grössten, wenn $\psi=\frac{\pi}{2}$ und $\alpha=\frac{\pi}{4}$ ist. Da dann $\psi_3=0{,}000035$ und $\alpha_3=0{,}000014$ ist, so ergiebt sich:

$$\Delta\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.\zeta(\psi)=0{,}000\,000\,004.\sqrt{-1}.$$

Man sieht also, dass man den Werth $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.\zeta(\psi)$ in allen Fällen auf mindestens acht Dezimalstellen genau berechnet, wenn man sich in der Entwicklung von $\zeta(\psi)$ auf die drei ersten Glieder beschränkt.

§. 10.

Wenn man das elliptische Integral der dritten Art in der Form

$$\int\frac{1}{p-y^2}.\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}$$

anschreibt und dann die vier Intervalle unterscheidet, welche zwischen den fünf Grenzwerthen $-\infty$, 0, 1, $\frac{1}{e^2}$, $+\infty$ liegen, so lässt sich der Werth p bekanntlich in zweien von diesen vier Intervallen unterbringen. Es lassen sich nämlich die Werthe p des zweiten und vierten Intervalls und ebenso auch die Werthe p des ersten und dritten Intervalls in einander überführen. Man bedient sich in dieser Absicht der Gleichung:

$$\int_y^1\left(\frac{y^2}{x^2-y^2}+\frac{1-e^2y^2}{1-e^2x^2-(1-x^2)e^2y^2}\right)\frac{dy}{x}\sqrt{\frac{(1-x^2)(1-e^2x^2)}{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}$$

$$=\tfrac{1}{2}l\frac{1-r}{1+r},$$

worin abkürzend gesetzt worden ist:

$$r=\frac{x}{y}\sqrt{\frac{(1-y^2)(1-e^2x^2)}{(1-x^2)(1-e^2y^2)}}.$$

In der That liegt, wenn x^2 zwischen 0 und 1, also in dem zweiten Intervall gedacht wird, der Werth $\frac{1-e^2x^2}{(1-x^2)e^2}$ zwischen $\frac{1}{e^2}$ und ∞ oder in dem vierten Intervall; und wenn x^2 zwischen 1 und

$\frac{1}{e^2}$ oder in dem dritten Intervall angenommen wird, so liegt der Werth $\frac{1-e^2x^2}{(1-x^2)e^2}$ zwischen $-\infty$ und 0 oder in dem ersten Intervall.

Die Grösse $\sqrt{p}$ wird der Parameter des elliptischen Integrals der dritten Art genannt. Der Parameter kann also ebenso wie die Amplitude jederzeit in die Grenzen 0 und $\frac{1}{e}$ hineingezogen werden. Man wird aber noch die beiden Intervalle unterscheiden, welche durch die drei Grenzwerthe 0, 1, $\frac{1}{e}$ bestimmt sind. Wenn die Amplitude und der Parameter beide demselben Intervall angehören, so mögen sie gleichartig heissen; in dem andern Falle ungleichartig. In dem letzteren Falle bedarf die obige Reduktionsgleichung einer Aenderung, damit sie in reeller Form dastehe. Man hat dann:

$$r=\sqrt{-1}\cdot\frac{x}{y}\sqrt{\frac{(y^2-1)(1-e^2x^2)}{(1-x^2)(1-e^2y^2)}}=\sqrt{-1}\,.s,$$

und man muss desshalb schreiben:

$$\tfrac{1}{2}l\frac{1-r}{1+r}=-\sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tg}\,s.$$

Auch die Reihenentwicklung des elliptischen Integrals der dritten Art gestaltet sich verschiedenartig, je nachdem die Amplitude und der Parameter gleichartig oder ungleichartig sind.

§. 11.

Ich schreibe das elliptische Integral der dritten Art in der Form:

$$\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}{x}\cdot\int_y^1\frac{-y^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}=H(x,y),$$

worin x ebenso wie y zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{e}$ angenommen ist. Wenn die Amplitude und der Parameter ungleichartig sind, so hat die Grösse $H(x,y)$ den Faktor $\sqrt{-1}$. Der andere Faktor ist positiv, wenn $y>1$, und negativ, wenn $y<1$ ist. Wenn x und y ungleichartig sind, so hat man zur Berechnung des Integrals die Gleichung:

III. $$H(x,y)-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\zeta(\varphi)\cdot F(y)=\sqrt{-1}\cdot\eta(\varphi,\psi),$$

worin $\sin\varphi = ex$ und wie bisher $\sin\psi = ey$ ist. Zu den bisherigen Funktionen $\varepsilon(\psi)$ und $\zeta(\varphi)$ kommt also noch die neue Funktion $\eta(\varphi, \psi)$ hinzu. Es ist:

$$\eta(\varphi, \psi) = -\operatorname{arctg} t - 2\operatorname{arctg} t\frac{\cos\varphi_1}{\cos\psi_1} - 4\operatorname{arctg} t\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\cos\psi_1\cos\psi_2} - \ldots$$

$$\ldots + 2^n \operatorname{arctg} t\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2\ldots\cos\varphi_n}{\cos\psi_1\cos\psi_2\ldots\cos\psi_n},$$

worin abkürzend $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^2-1}{1-x^2}} = t$ gesetzt worden, und die auf einander folgenden Winkel φ ganz ebenso aus einander herzuleiten sind, wie dies vorhin mit den auf einander folgenden Winkeln ψ geschehen ist. Alle Glieder der Reihe sind mit dem negativen Zeichen behaftet, ausgenommen das letzte Glied, welches das positive Zeichen hat. Die Reihe wird aber jedesmal dann abzubrechen sein, wenn φ_{n+1} und ψ_{n+1} so klein geworden sind, dass $\cos\varphi_{n+1} = 1$ und $\cos\psi_{n+1} = 1$ gesetzt werden darf. Noch ist zu bemerken, wenn x der Einheit nahe kommt, dass dasselbe dann doch in einem solchen Abstand von 1 gedacht werden muss, dass $\sqrt{\frac{y^2-1}{1-x^2}} = 0$ ist, so bald an die Stelle von y die untere Integrationsgrenze $y = 1$ tritt. Denn nur so bleibt die obige Reihenentwicklung $\eta(\varphi, \psi)$ richtig.

Wenn $y > 1$ und also $x < 1$, so liegt der Werth $\eta(\varphi, \psi)$ jedesmal zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Insbesondere erhält man $\eta(0, \psi) = 0$ und $\eta(\alpha, \psi) = \frac{\pi}{2}$. Wenn umgekehrt $y < 1$ und $x > 1$ ist, so hat man

$$t = \frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^2-1}{1-x^2}} = -\frac{x}{y}\sqrt{\frac{1-y^2}{x^2-1}}$$

zu setzen, weil

$$\sqrt{1-y^2} = \sqrt{-1}.\sqrt{y^2-1} \text{ und } \sqrt{1-x^2} = \sqrt{-1}.\sqrt{x^2-1}$$

angenommen ist. Der Werth $\eta(\varphi, \psi)$ liegt dann jedesmal zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$. Man erhält $\eta(\varphi, 0) = -\frac{\pi}{2}$ und $\eta(\varphi, \alpha) = 0$. Jedenfalls aber hat man, weil $\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg}\frac{-1}{t} = \operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg}\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$ ist, die Gleichung:

$$7. \qquad \eta(\varphi, \psi) - \eta(\psi, \varphi) = \pm\frac{\pi}{2},$$

worin auf der rechten Seite das obere Zeichen beizubehalten ist, wenn $\psi > \alpha$; das untere Zeichen, wenn $\psi < \alpha$ ist.

Setzt man $x=0$ in die Gleichung III. ein, so hat man eine identische Gleichung. Für $y=0$ aber erhält man:

$$8. \qquad H(x,0) - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.\zeta(\varphi).F(0) = -\sqrt{-1}.\frac{\pi}{2}.$$

Man setze ferner $x=\frac{1}{e}$ oder $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Man behält, da $H\left(\frac{1}{e}, y\right)=0$ ist, die einfachere Gleichung:

$$-\cos\alpha.\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right).F(y) = \eta\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right).$$

Da aber $\eta(\varphi, 0) = -\frac{\pi}{2}$ ist, so geht dies für $y=0$ über in:

$$\cos\alpha.\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right)F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Man setze den Werth $F(0)$ aus 5. in §. 6. hier ein, und man hat:

$$9. \qquad \cos\alpha.\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon(\alpha).$$

Durch die Elimination von $\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ wird die ursprüngliche Gleichung umgewandelt in:

$$10. \qquad -\varepsilon(\alpha).F(y) = \eta\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right).$$

Man erfährt daraus, dass man, um die Funktion $\eta\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right)$ zu berechnen, dieselbe mit Vortheil auf das elliptische Integral der ersten Art zurückführt. Man wird dies benutzen, um auch die Funktion $H(x, \frac{1}{e})$ ohne die Beihilfe von η durch die früheren Funktionen ε und ζ auszudrücken. Denn für $y=\frac{1}{e}$ oder $\psi=\frac{\pi}{2}$ hat man zunächst:

$$H(x, \tfrac{1}{e}) - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\zeta(\varphi).F\left(\frac{1}{e}\right) = \sqrt{-1}\,\eta(\psi, \tfrac{\pi}{2}).$$

Nun ergiebt sich aber aus dem Obigen, aus 7. und 10., die Gleichung:

$$\eta(\varphi, \tfrac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \eta\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) = \frac{\pi}{2} - \varepsilon(a)\, F(x).$$

Die vorige Gleichung geht desshalb über in:

$$11.\quad H(x, \tfrac{1}{e}) - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \zeta(\varphi) \cdot F\left(\frac{1}{e}\right) = \sqrt{-1}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon(a) F(x)\right).$$

§. 12.

Auch die drei ersten Glieder der Reihe $\eta(\varphi, \psi)$ sind hinreichend, um einen Zahlenwerth zu erzielen, worin mindestens acht Dezimalstellen genau sind, so dass man also, wenn nicht eine noch grössere Genauigkeit verlangt wird, zu der Berechnung von $\eta(\varphi, \psi)$ jederzeit der einfacheren Gleichung:

$$\eta(\varphi, \psi) = -\operatorname{arc\,tg} t - 2 \operatorname{arc\,tg} t \frac{\cos\varphi_1}{\cos\psi_1} + 4 \operatorname{arc\,tg} t \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\cos\psi_1 \cos\psi_2}$$

sich bedienen würde.

Wollte man noch das vierte Glied der Reihe berücksichtigen, so würde der obige Werth $\eta(\varphi, \psi)$ den Zuwachs

$$-8 \operatorname{arc\,tg} t \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\cos\psi_1 \cos\psi_2} + 8 \operatorname{arc\,tg} t \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3}{\cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\psi_3}$$

erhalten. Man kann annähernd auch setzen:

$$\Delta\eta(\varphi, \psi) = 8 \operatorname{arctg} \frac{\cos\varphi_3 - \cos\psi_3}{\frac{1}{t} \frac{\cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\psi_3}{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3} + t \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3}{\cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\psi_3}}.$$

Ferner erhält man aus der in dem §. 6. gegebenen Gleichung 2.:

$$t \cdot \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3}{\cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\psi_3} = \frac{\sin\varphi_3}{\sin\psi_3} \sqrt{\frac{\sin^2\psi_3 - \sin^2\alpha_3}{\sin^2\alpha_3 - \sin^2\varphi_3}}.$$

Man setze dies in die vorige Gleichung ein und man erhält annähernd:

$$\Delta\eta(\varphi, \psi) = 8 \operatorname{arctg} \frac{\sin\varphi_3 \sin\psi_3 \sqrt{(\sin^2\alpha_3 - \sin^2\varphi_3)(\sin^2\psi_3 - \sin^2\alpha_3)}}{2\sin^2\alpha_3}.$$

Nun darf man aber den kleinen Bogen mit der Tangente verwechseln. Man nehme ferner an, dass $\varphi < \alpha$ und desshalb $\psi > \alpha$ sei. Man wird desshalb schreiben:

$$\Delta\eta(\varphi, \psi) = \frac{\sin\varphi_3}{\sin\alpha_3} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi_3}{\sin^2\alpha_3}} \cdot 4 \sin\psi_3 \cdot \sqrt{\sin^2\psi_3 - \sin^2\alpha_3}.$$

Anstatt des ersten Faktors $\frac{\sin\varphi_3}{\sin\alpha_3}\sqrt{1-\frac{\sin^2\varphi_3}{\sin^2\alpha_3}}$ setze man seinen grössten Werth $\frac{1}{2}$. Der andere Faktor $4\sin\psi_3.\sqrt{\sin^2\psi_3-\sin^2\alpha_3}$ erreicht sein Grösstes, wenn $\psi=\frac{\pi}{4}$ und $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Da dann

$$\psi_3=0{,}000035 \quad \text{und} \quad \alpha_3=0{,}000014,$$

so findet man den grössten Werth:

$$\Delta\eta(\varphi,\psi)=0{,}000\,000\,002.$$

Man überzeugt sich hierdurch, dass die drei ersten Glieder der Reihenentwicklung $\eta(\varphi,\psi)$ mindestens acht Dezimalstellen genau geben.

§. 13.

Wenn auch die in 8. und 11. gegebenen Werthe $H(x,0)$ und $H(x,\frac{1}{e})$ nur so lange gelten, als die Amplitude und der Parameter ungleichartig sind, so bleibt doch die zuvor gegebene allgemeinere Gleichung III., woraus das elliptische Integral $H(x,y)$ sich bestimmt, auch dann richtig, wenn die Amplitude und der Parameter gleichartig sind. Die Funktion $\eta(\varphi,\psi)$ hat dann aber eine imaginäre Gestalt. Man erhält einen andern für die Berechnung brauchbaren Ausdruck dadurch, dass man die verschiedenen Glieder arctg in logarithmische Glieder umwandelt. Der Ausdruck lässt ausserdem noch andere Umwandlungen zu. Jacobi hat zuerst gezeigt, dass die Funktion, von welcher die Bestimmung des elliptischen Integrals der dritten Art abhängt, durch die Differenz zweier logarithmischen Grössen ausgedrückt werden kann, von denen jede nicht mehr Funktion der beiden von einander unabhängigen Grössen x und y ist, sondern von einer einzigen Veränderlichen, welche selbst aber als geschlossene algebraische Funktion von x und y sich darstellt. Es zeigt sich diese Darstellungsweise der Funktion in dem gegenwärtigen Falle, wo die Amplitude und der Parameter gleichartig angenommen sind, als die vortheilhafteste für die Berechnung des elliptischen Integrals der dritten Art. Die Reihenentwicklung gestaltet sich aber einfacher, wenn das elliptische Integral der dritten Art in der Form

$$\frac{1}{e^2x}\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}\int_y^1\frac{dy}{p-y^2}\sqrt{\frac{1-e^2y^2}{1-y^2}}=K(x,y)$$

angeschrieben wird, worin $p=\frac{1-e^2x^2}{(1-x^2)e^2}$ ist. Da auch hier wieder x zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{e}$ gedacht wird, so liegt p entweder zwischen $-\infty$ und 0 oder zwischen $\frac{1}{e^2}$ und $+\infty$. Wenn nicht x, sondern p gegeben ist, so hat man zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}=\sqrt{\frac{p}{p-1}}.$$

In dem vorliegenden Falle, wo x und y gleichartig angenommen sind, hat die Grösse $K(x,y)$ jederzeit einen reellen Werth, welcher negativ ist, wenn $y>1$, und positiv, wenn $y<1$ gedacht wird. Zur Bestimmung von $K(x,y)$ hat man die Gleichung:

$$\text{IV.}\qquad K(x,y)-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.\zeta(\varphi).F(y)=\tfrac{1}{2}l\frac{\vartheta(\sigma-\tau)}{\vartheta(\sigma+\tau)}.$$

Die Werthe σ und τ ergeben sich aus den beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\sigma=\cot\alpha.\operatorname{tg}\varphi.\operatorname{tg}\psi,$$

$$\operatorname{tg}\tau=\operatorname{tg}\alpha\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)},$$

worin ebenso wie bisher $ex=\sin\varphi$, $ey=\sin\psi$, $e=\sin\alpha$ gesetzt worden ist. Was nun aber die neue Funktion betrifft, von welcher die Berechnung der Funktion $K(x,y)$ abhängt, so hat man:

$$\vartheta(\psi)=\cos^2\frac{\psi}{2}.\cos^4\frac{\psi_1}{2}.\cos^8\frac{\psi_2}{2}.\cos^{16}\frac{\psi_3}{2}\ldots.,$$

worin die auf einander folgenden Winkel ψ wieder ebenso aus einander herzuleiten sind, wie dies in den bisherigen Rechnungen geschehen ist.

Der Werth $\vartheta(\psi)$ liegt stets zwischen 0 und 1. Man hat $\vartheta(0)=1$, und bei zunehmendem ψ nimmt der Werth $\vartheta(\psi)$ ab. Man kann auch leicht den Werth $\vartheta(\alpha)$ angeben. Denn man hat.

$$\vartheta(\alpha)=\cos^2\frac{\alpha}{2}.\cos^4\frac{\alpha_1}{2}.\cos^8\frac{\alpha_2}{2}.\cos^{16}\frac{\alpha_3}{2}\ldots.$$

Aus der Gleichung $\sin\alpha_1=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ folgt aber

$$\cos\alpha_1=\sqrt{1-\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Man eliminire dadurch die Grösse $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Ebenso eliminire man auch die Grössen $\cos^4\frac{\alpha_1}{2}$, $\cos^8\frac{\alpha_2}{2}$, $\cos^{16}\frac{\alpha_3}{2}$.... Dadurch erhält man:

$$\vartheta(\alpha)=\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\alpha_1}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\cos^2\alpha_2}\cdot\frac{\cos^2\alpha_2}{\cos^4\alpha_3}\cdot\frac{\cos^4\alpha_3}{\cos^8\alpha_4}\ldots=\sqrt{\cos\alpha}.$$

Aus der Bedeutung der Grössen σ und τ ersieht man, dass dieselben symmetrisch sind nach x und y und also keine Aenderung erleiden, wenn x und y gegen einander vertauscht werden. Dieselbe Eigenschaft besitzt desshalb auch die Funktion $l\frac{\vartheta(\sigma-\tau)}{\vartheta(\sigma+\tau)}$.

Der Werth σ ist in allen Fällen positiv, der Werth τ aber nur so lange positiv, als x und $y>1$ sind. Wenn x und $y<1$, so hat man zur Bestimmung von τ die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\tau=-\operatorname{tg}\alpha\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)};$$

und man erhält einen negativen Werth τ. Daraus folgt, dass $\sigma+\tau>\sigma-\tau$, wenn x und $y>1$; dass aber umgekehrt $\sigma-\tau>\sigma+\tau$, wenn x und $y<1$ sind. In dem ersteren Falle fällt desshalb der Werth $l\frac{\vartheta(\sigma-\tau)}{\vartheta(\sigma+\tau)}$ positiv, in dem andern Falle negativ aus.

Ausserdem ergiebt sich durch die genauere Untersuchung, dass sowohl der Unterschied $\sigma-\tau$, als auch die Summe $\sigma+\tau$, beide gleichartig mit φ und ψ, also beide $>\alpha$ oder $<\alpha$ sind, gleichzeitig mit φ und mit ψ. Mit Rücksicht auf das Zeichen von σ und τ kann man desshalb sagen, der Unterschied $\sigma-\tau$ liege stets näher bei α als die Summe $\sigma+\tau$; abgesehen davon, dass die beiden Werthe gleich gross sind, wenn $\varphi=\alpha$ oder wenn $\psi=\alpha$. Es folgt weiter, dass der Unterschied $\sigma-\tau$ stets zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Man hat $\sigma-\tau=0$, wenn φ und ψ die Werthe 0 und α, und $\sigma-\tau=\frac{\pi}{2}$, wenn φ und ψ die Werthe α und $\frac{\pi}{2}$ annehmen. Für $\varphi=\psi$ findet man $\sigma-\tau=\alpha$. Die Summe $\sigma+\tau$ aber kann nicht allein über $\frac{\pi}{2}$ hinaus anwachsen, sondern auch <0 werden. Man findet $\sigma+\tau=\frac{\pi}{2}$, wenn $\sin\varphi\sin\psi=\sin\alpha$, und $\sigma+\tau>\frac{\pi}{2}$, wenn $\sin\varphi\sin\psi>\sin\alpha$ ist. Die Summe $\sigma+\tau$ erreicht den grössten Werth $\pi-\alpha$, wenn $\varphi=\frac{\pi}{2}$ und $\psi=\frac{\pi}{2}$. Andererseits findet man $\sigma+\tau=0$, wenn $\cos\varphi\cos\psi=\cos\alpha$, und $\sigma+\tau<0$,

wenn $\cos\varphi\cos\psi > \cos\alpha$ ist. Für $\varphi=0$ und $\psi=0$ hat man den kleinsten Werth $\sigma+\tau=-\alpha$.

Wenn $x=0$, so geht die Gleichung IV. in eine identische über. Setzt man aber $y=0$, so behält man die einfachere Gleichung:

$$12. \qquad K(x,0)-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.\zeta(\varphi)F(0)=0.$$

Man setze nun $x=\frac{1}{e}$ oder $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Dann ist auch $\sigma=\frac{\pi}{2}$, und man hat, weil $K\left(\frac{1}{e}, y\right)=0$ ist, die Gleichung:

$$-\sqrt{-1}.\cos\alpha.\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right).F(y)=\tfrac{1}{2}l\frac{\vartheta\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)}.$$

Zur Bestimmung von τ behält man die Gleichung $\operatorname{tg}\tau=\sqrt{y^2-1}$ oder $\cos\tau=\frac{1}{y}$. Mit Rücksicht auf die Gleichung 9. des §. 11. ist:

$$13. \qquad -\sqrt{-1}.\varepsilon(\alpha).F(y)=\tfrac{1}{2}l\frac{\vartheta\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)}.$$

Man erfährt hierdurch, dass man, um die Grösse $l\frac{\vartheta\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)}$ zu berechnen, dieselbe mit Vortheil auf das elliptische Integral der ersten Art zurückführt. Man benutze dies, um auch die Funktion $K(x,\frac{1}{e})$ ohne die Beihilfe von ϑ durch ε und ζ auszudrücken. Man erhält zunächst die Gleichung:

$$K(x,\tfrac{1}{e})-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.\zeta(\varphi).F\left(\frac{1}{e}\right)=\tfrac{1}{2}l\frac{\vartheta\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)},$$

worin aber $\cos\tau=\frac{1}{x}$ ist. Dies geht nun über in:

$$14. \quad K(x,\tfrac{1}{e})-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.\zeta(\varphi).F\left(\frac{1}{e}\right)=-\sqrt{-1}.\varepsilon(\alpha).F(x).$$

Die Gleichung 13. zeigt auch, dass man den Werth $\vartheta(\pi-\alpha)$ durch die Funktion ε ausdrücken kann. Man setze dort $y=\frac{1}{e}$. Daraus folgt $\cos\tau=\sin\alpha$ oder $\tau=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Man behält desshalb die Gleichung:

$$-\sqrt{-1}.\varepsilon(\alpha).F\left(\frac{1}{e}\right)=\tfrac{1}{2}l\frac{\vartheta(\alpha)}{\vartheta(\pi-\alpha)}.$$

Mit Rücksicht auf die Werthe $\vartheta(\alpha)$ und $F\left(\frac{1}{e}\right)$ des §. 6. wird dies umgewandelt in:

15. $$\vartheta(\pi-\alpha)=\sqrt{\cos\alpha}.\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2},\quad \text{worin } \sin\omega=e\frac{\varepsilon\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\varepsilon(\alpha)}.$$

§. 14.

Die Funktion $\vartheta(\psi)$ unterscheidet sich nur dadurch von der Funktion $\varepsilon(\psi)$, dass die Exponenten der auf einander folgenden Faktoren von $\vartheta(\psi)$ die Glieder der geometrischen Reihe 2, 4, 8, 16.... darstellen, während dieselben in $\varepsilon(\psi)$ unter sich alle gleich sind. Es ist einleuchtend, dass aus diesem Grunde die Convergenz der Reihe $\vartheta(\psi)$ etwas schwächer ausfällt, als die der Reihe $\varepsilon(\psi)$. Es hat sich in §. 7. herausgestellt, dass der vierte Faktor der Entwicklung $\varepsilon(\psi)$ auf die neun ersten Dezimalen des Zahlenwerthes keinen Einfluss hat. Die schwächste Convergenz der Reihe ergab sich für $\psi=\frac{\pi}{2}$ und $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Unter den gleichen Umständen könnte aber der Werth $\vartheta(\psi)$ schon in der neunten Dezimalstelle eine Aenderung erleiden. Denn der vierte Faktor der Funktion $\vartheta(\psi)$ giebt eine achtmal grössere Correktur, als der vierte Faktor der Funktion $\varepsilon(\psi)$.

Es kommt aber noch ein anderer Umstand in Betracht, welcher auch dazu beiträgt, die Convergenz der Reihe $\vartheta(\psi)$ abzuschwächen. Während nämlich in der Funktion $\varepsilon(\psi)$ der Winkel ψ nicht über $\frac{\pi}{2}$ hinaus wächst, erreicht derselbe in der Funktion $\vartheta(\psi)$ sein Grösstes erst in dem Werthe $\pi-\alpha$. Es versteht sich, dass dann der vierte Faktor der Entwicklung einen grösseren Einfluss gewinnt.

Man berechne nun Beispiels halber die beiden Werthe $\vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right)$

und $\vartheta\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, wobei wieder $\alpha=\frac{\pi}{4}$ angenommen ist. Die Winkel α_1, α_2, ψ_1, ψ_2 für das erste Beispiel sind schon in dem §. 7. berechnet worden. Für das zweite Beispiel hat man $\psi_1=\frac{\pi}{2}$: und um ψ_2 zu erhalten, schreibe man:

$$\log \operatorname{tg} 45^0 \qquad = 0,$$

$$\log \operatorname{tg}\ 4^0 56' 22{,}72'' = 8{,}9366510 = \log \sin 4^0 57' 30{,}82'' = \log \sin \psi_2.$$

Da nun alle Hilfswinkel bekannt sind, schreibe man weiter:

$$\begin{aligned} \log \cos^2 45^0 \qquad\qquad &= 9{,}6989700 \\ +2 \log \cos^2 12^0 14'\ 5{,}64'' &= 9{,}9600884 \\ +4 \log \cos^2 \quad 32' 12{,}95'' &= 9{,}9998475 \\ \hline \log \vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 9{,}6589059 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos^2 67^0 30' \qquad &= 9{,}1656794 \\ +2 \log \cos^2 45^0 \qquad &= 9{,}3979400 \\ +4 \log \cos^2\ 2^0 28' 45{,}41'' &= 9{,}9967464 \\ \hline \log \vartheta\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= 8{,}5603658 - 10. \end{aligned}$$

Durch die Berücksichtigung des vierten Faktors in der Entwicklung von $\vartheta(\psi)$ erhält man im Allgemeinen den Zuwachs:

$$\Delta \tfrac{1}{2} l \vartheta(\psi) = l \cos^8 \frac{\psi_3}{2} = l(1-\psi_3^2) = -\psi_3^2.$$

In dem vorliegenden Falle, wo $\psi=\frac{\pi}{2}$ und $\alpha=\frac{\pi}{4}$ angenommen ist, hat man $\psi_3 = 0{,}000035$ und desshalb

$$\Delta \tfrac{1}{2} l \vartheta(\psi) = -\,0{,}000\ 000\ 001.$$

In dem andern Falle, wo $\psi=\pi-\alpha$ und $\alpha=\frac{\pi}{4}$ ist, findet man annähernd $\psi_3 = 34''$ oder, in Theilen des Halbmessers 1 ausgedrückt, $\psi_3 = 0{,}00016$. Man erhält desshalb den Zuwachs:

$$\Delta \tfrac{1}{2} l \vartheta(\psi) = -\,0{,}000\ 000\ 03;$$

und man sieht, dass durch die drei ersten Faktoren der Entwicklung $\vartheta(\psi)$ hier immer noch die sieben ersten Dezimalstellen des Werthes $\frac{1}{2} l \vartheta(\psi)$ genau berechnet werden. Die Convergenz der

Reihe ist aber am schwächsten, wenn $\psi = \pi - \alpha$ und $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Daraus folgt, dass man in jedem andern Falle eine grössere Genauigkeit erzielen würde, als die zuletzt erwähnte.

§. 15.

Man führe nun die Bezeichnungen $H(x, y)$ und $K(x, y)$ in die Gleichung ein, welche in dem §. 10. für die Reduktion der Parameter aufgestellt worden ist. Dieselbe zeigt sich dann in der Form:

16. $$H(x, y) - K(x, y) = \tfrac{1}{2} l \frac{\sin 2\psi . \sqrt{1-x^2} + \sin 2\varphi . \sqrt{1-y^2}}{\sin 2\psi . \sqrt{1-x^2} - \sin 2\varphi . \sqrt{1-y^2}}.$$

Man wird sich derselben zur Bestimmung von $H(x, y)$ bedienen, wenn die Amplitude und der Parameter gleichartig sind. Wenn dieselben ungleichartig sind, so setze man $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^2-1}{1-x^2}} = t$, und man hat die Gleichung:

17. $$K(x, y) - H(x, y) = -\sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tg}\, t \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}.$$

Daraus wird man für den zuletzt genannten Fall die Grösse $K(x, y)$ bestimmen.

Für den Fall, dass die Amplitude und der Parameter gleichartig sind, hat man in dem §. 13. die beiden Gleichungen:

12. $$K(x, 0) - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} . \xi(\varphi) . F(0) = 0,$$

14. $$K(x, \tfrac{1}{e}) - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} . \xi(\varphi) . F\left(\frac{1}{e}\right) = -\sqrt{-1} . \varepsilon(\alpha) . F(x)$$

aufgestellt. Um die Funktionen $K(x, 0)$ und $K(x, \frac{1}{e})$ zu bestimmen, wenn die Amplitude und der Parameter ungleichartig sind, bringe man die Gleichung 17. in Verbindung mit den in dem §. 11. gegebenen Gleichungen 8. und 11. Man gelangt so wieder zu denselben Ausdrücken, wie sie durch die Gleichungen 12. und 14. gegeben sind. Daraus folgt, dass diese beiden Gleichungen richtig bleiben für alle Werthe x, welche zwischen 0 und $\frac{1}{e}$ liegen.

Man setze die Werthe $H(x, y)$ und $K(x, y)$, wie sie aus den Gleichungen III. und IV. hervorgehen, in die Gleichung 17. ein. Dies führt zu der Beziehung, welche zwischen den Funktionen $\eta(\varphi, \psi)$ und $l\frac{\vartheta(\sigma-\tau)}{\vartheta(\sigma+\tau)}$ besteht. Man hat:

$$18. \qquad \tfrac{1}{2} l \frac{\vartheta(\sigma+\tau)}{\vartheta(\sigma+\tau)} = -\sqrt{-1}\left(\operatorname{arc\,tg} t \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} - \eta(\varphi, \psi)\right).$$

§. 16.

Die gebräuchliche Form für das elliptische Integral der zweiten Art ist:

$$\int_y^1 dy \sqrt{\frac{1-e^2y^2}{1-y^2}} = E(y).$$

Zur Bestimmung von $E(y)$ hat man die Gleichung:

$$E(y) + G(y) = \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}{y}.$$

Man setze den Werth $G(y)$ aus II. ein, und man behält:

$$19. \qquad E(y) - \cos\alpha\zeta(\alpha)\, F(y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}(\cos\psi - \zeta(\psi)).$$

Für den Fall $y=\frac{1}{e}$ findet man mit Rücksicht auf die Gleichung 9.:

$$20. \qquad E\left(\frac{1}{e}\right) - \cos\alpha\zeta(\alpha)\, F\left(\frac{1}{e}\right) = -\sqrt{-1}\,.\,\varepsilon(\alpha).$$

Die auf der rechten Seite der Gleichung 19. stehenden Glieder geben den Werth $\frac{0}{0}$, wenn $y=0$ ist. Aus diesem Grunde eignet sich dieselbe nicht wohl zur Berechnung von $E(y)$, wenn die Amplitude der Null nahe kommt. Diesem Uebelstande lässt sich aber abhelfen. Durch die Verbindung der Gleichungen 12. und 16., nachdem man in der letzteren $y=0$ gesetzt hat, entsteht:

$$H(x, 0) - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.\zeta(\varphi)\, F(0) = 0,$$

worin $x^2<1$ gedacht werden muss. Man benutze dies, um $H(x, 0)$ durch die Funktion $\zeta(\varphi)$ auszudrücken. Unter der Voraussetzung $x^2<1$ ist bekanntlich auch:

$$\int_0^1 \left(\frac{y^2}{x^2-y^2}+\frac{1-y^2}{1-x^2-(1-e^2x^2)y^2}\right)\frac{dy}{x}\sqrt{\frac{(1-x^2)(1-e^2x^2)}{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}=0.$$

Man setze abkürzend $\frac{1-x^2}{1-e^2x^2}=x_0^2$, und man kann dies dann in der folgenden Form anschreiben:

$$H(x,0)+H(x_0,0)=\frac{1}{xx_0}F(0).$$

Indem man nun an die Stelle von H die Funktion ζ einführt, erhält man:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\zeta(\varphi)+\frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x_0}\zeta(\varphi_0)=\frac{1}{xx_0},$$

worin $\sin\varphi_0=ex_0$ ist. Zur Bestimmung von x_0 besteht dann auch die Gleichung $\cos\varphi\cos\varphi_0=\cos\alpha$. Man erhält weiter:

$$\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}(\cos\psi-\zeta(\psi))\mp\frac{\sqrt{1-y_0^2}}{y_0}(\zeta(\psi_0)-\frac{1}{\cos\psi_0})$$
$$=\frac{y\cos\alpha}{\sqrt{1-y^2}}(\zeta(\psi_0)-\frac{1}{\cos\psi_0}).$$

Die Gleichung zur Bestimmung von $E(y)$ geht demnach über in:

21. $$E(y)-\cos\alpha\zeta(\alpha)F(y)=\frac{y\cos\alpha}{\sqrt{1-y^2}}(\zeta(\psi_0)-\frac{1}{\cos\psi_0}),$$

worin $\cos\psi\cos\psi_0=\cos\alpha$ ist. Man wird davon Gebrauch machen, wenn y nahe bei Null liegt. Insbesondere findet man daraus den Werth:

22. $$E(0)=\cos\alpha\zeta(\alpha).F(0).$$

Derselbe Umstand kommt in Betracht bei der Berechnung des elliptischen Integrals der dritten Art. Schreibt man dasselbe in der Form:

$$x\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}.\int_y^1\frac{-1}{x^2-y^2}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}=D(x,y),$$

so hat man zur Bestimmung von $D(x,y)$ die Gleichung

$$D(x,y)-H(x,y)+\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}{x}.F(y)=0.$$

Man setze den Werth $H(x,y)$ aus III. ein, und man behält:

$$23.\quad D(x,y)+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}(\cos\varphi-\zeta(\varphi))\,F(y)=\sqrt{-1}\,.\,\eta(\varphi,\psi).$$

Wenn aber x nahe bei Null liegt, so bediene man sich der Gleichung:

$$24.\quad D(x,y)+\frac{x\cos\alpha}{\sqrt{1-x^2}}(\zeta(\varphi_0)-\frac{1}{\cos\varphi_0})\,F(y)=\sqrt{-1}\,.\,\eta(\varphi,\psi),$$

worin φ_0 durch die Gleichung $\cos\varphi\cos\varphi_0=\cos\alpha$ gegeben ist.

Schreibt man das elliptische Integral der dritten Art in der Form:

$$x\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}\int_y^1\frac{dy}{p-y^2}\sqrt{\frac{1-y^2}{1-e^2y^2}}=C(x,y),$$

worin wieder $p=\frac{1-e^2x^2}{(1-x^2)\,e^2}$ ist, so hat man die Gleichung:

$$C(x,y)-K(x,y)+\frac{\sqrt{(1-x^2)\,(1-e^2x^2)}}{x}\,.\,F(y)=0.$$

Setzt man den Werth $K(x,y)$ aus IV. ein, so geht dies über in:

$$25.\quad C(x,y)+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}(\cos\varphi-\zeta(\varphi))\,F(y)=\tfrac{1}{2}l\frac{\vartheta(\sigma-\tau)}{\vartheta(\sigma+\tau)}.$$

Wenn x nahe bei Null liegt, so gebrauche man die Gleichung:

$$26.\quad C(x,y)+\frac{x\cos\alpha}{\sqrt{1-x^2}}(\zeta(\varphi_0)-\frac{1}{\cos\varphi_0})\,F(y)=\tfrac{1}{2}l\frac{\vartheta(\sigma-\tau)}{\vartheta(\sigma+\tau)}.$$

Um aber in allen Fällen einen brauchbaren Ausdruck für die Funktionen $C(x,y)$ und $D(x,y)$ zu erhalten, bringe man die Gleichungen 23., 24., 25., 26. in Verbindung mit den beiden folgenden:

$$27.\quad D(x,y)-C(x,y)=\tfrac{1}{2}l\frac{\sin 2\psi\sqrt{1-x^2}+\sin 2\varphi\sqrt{1-y^2}}{\sin 2\psi\sqrt{1-x^2}-\sin 2\varphi\sqrt{1-y^2}},$$

$$28.\quad C(x,y)-D(x,y)=-\sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tg}\,t\frac{\cos\varphi}{\cos},$$

worin wie oben $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^2-1}{1-x^2}}=t$ gesetzt worden ist. Aus der ersteren bestimme man $D(x,y)$, wenn x und y gleichartig, aus der anderen Gleichung $C(x,y)$, wenn x und y ungleichartig sind.

§. 17.

Die Winkel σ und τ, welche aus den Gleichungen

$$\operatorname{tg}\sigma = \cot\alpha \operatorname{tg}\varphi . \operatorname{tg}\psi,$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}$$

(vergl. §. 13.) sich ergeben, stehen in naher Beziehung zu der Addition der elliptischen Integrale, deren Amplituden x und y sind. In der That hat man, wenn $\sin(\sigma+\tau) = eu$ und $\sin(\sigma-\tau) = ev$ gesetzt wird, für die Addition der elliptischen Integrale der ersten Art die beiden Gleichungen:

V. $$F(x) + F(y) = F(u),$$

VI. $$F(x) - F(y) = F(v).$$

Die Grösse F hat hier dieselbe Bedeutung wie bisher, so dass also die Amplituden x und y ebensowohl zwischen 0 und 1, als auch zwischen 1 und $\frac{1}{e}$ angenommen werden können. Doch wird man sich darauf beschränken, dieselben gleichartig, d. h. beide entweder <1 oder beide >1 anzunehmen, damit die neuen Amplituden u und v reell ausfallen. Diese sind dann selbst jedesmal gleichartig mit x und y (vergl. §. 13.). Doch ist zu bemerken, dass die letztere Gleichung nur dann richtig ist, wenn y näher bei 1 gedacht wird als x, so dass also $y > x$, wenn beide <1, und $y < x$, wenn beide >1 angenommen sind.

Es ist schon in dem §. 13. erwähnt worden, dass der Unterschied $\sigma - \tau$ stets zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liege. Die Summe $\sigma + \tau$ aber, und desshalb auch u, fällt negativ aus, wenn $\cos\varphi\cos\psi > \cos\alpha$. Es versteht sich, dass dann das Integral $F(u)$ gleichbedeutend ist mit $2F(0) - F(-u)$. Es bedarf aber einer besonderen Erwähnung, wenn $\sigma+\tau$ über $\frac{\pi}{2}$ hinaus wächst, oder wenn $eu = \sin(\sigma+\tau)$ sein Grösstes überschritten hat und wieder abnimmt, dass dann das Integral $F(u)$ selbst fortwährend im Zunehmen gedacht werden muss. Man hat dann $F(u) = 2F\left(\frac{1}{e}\right) - F(u_0)$ zu setzen, wo eu_0 die Bedeutung von $\sin(\pi-\sigma-\tau)$ hat. Der Fall tritt ein, wenn $\sin\varphi\sin\psi > \sin\alpha$ ist.

Für die Addition der elliptischen Integrale der zweiten Art hat man die beiden Gleichungen:

VII. $E(x)+E(y)=E(u)-\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-u^2)}$,

VIII. $E(x)-E(y)=E(v)+\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-v^2)}$.

In der letzteren Gleichung muss wieder y näher bei 1 angenommen werden als x. Ferner gilt hier über die Bedeutung von $E(v)$, wenn $\sigma+\tau>\frac{\pi}{2}$ ist, ganz dieselbe Bemerkung wie vorhin über die Bedeutung von $F(v)$.

§. 18.

Die Reihenentwicklungen, auf welche in dem Bisherigen die elliptischen Integrale zurückgeführt worden sind, dienen zur Berechnung von noch anderen irrationalen Integralformen. Einen sehr einfachen Ausdruck erhält man für das bestimmte Integral:

$$\int_0^1 {}_{\frac{1}{2}}l\,\frac{1-e^2x^2-(1-x^2)e^2y^2}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}=M(x),$$

worin x irgend einen Werth zwischen 0 und $\frac{1}{e}$ vorstellt. Setzt man $ex=\sin\varphi$, so ist:

IX. $$M(x)=F(0).l\vartheta(\varphi).$$

Man schreibe $1-e^2x^2-(1-x^2)e^2y^2=(1-x^2)e^2(p-y^2)$; und es ist $p=\frac{1-e^2x^2}{(1-x^2)e^2}$ offenbar ein Werth, welcher entweder zwischen $-\infty$ und 0 oder zwischen $\frac{1}{e^2}$ und $+\infty$ liegt. Wenn nun an die Stelle von p ein Werth tritt, welcher zwischen 0 und $\frac{1}{e}$ liegt, so schreibe man das bestimmte Integral in der Form $N(x)$ folgendermaßen:

$$\int_0^1 {}_{\frac{1}{2}}\frac{l(ex^2-ey^2)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}=N(x),$$

worin x dieselbe Bedeutung hat wie vorhin, aber $l(x^2-y^2)$ gleichbedeutend mit $\frac{1}{2}l(x^2-y^2)^2$ gedacht werden muss. Man erhält dann die Gleichung:

X. $$N(x)=F(0).l\vartheta(\varphi)-iF(x)+\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\,F\left(\frac{1}{e}\right).$$

Darin ist wieder $\sin\varphi=ex$. Ferner ist $i=0$ zu setzen, wenn $x<1$; dagegen $i=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, wenn $x>1$ gedacht wird.

Mit Hilfe der Gleichungen IX. und X. ist man im Stande, den Werth $\vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ durch die Funktion ε auszudrücken. Denn es ist:

$$M\left(\frac{1}{e}\right)=\int_0^1 \frac{l(\sqrt{1-e^2}.y^2)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}=F(0).l\vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

und

$$N(0)=\int_0^1 \frac{l(ey^2)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}=\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}.F\left(\frac{1}{e}\right).$$

Durch die Subtraktion entsteht:

$$F(0)\,l(\operatorname{tg}\alpha\vartheta^2\left(\frac{\pi}{2}\right))=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}.F\left(\frac{1}{e}\right).$$

Mit Rücksicht auf die Werthe $F(0)$ und $F\left(\frac{1}{e}\right)$ des §. 6. geht dies über in:

29. $$\vartheta^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cot\alpha.\operatorname{tg}\frac{\omega}{2},\quad \text{worin}\quad \sin\omega=e\frac{\varepsilon\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\varepsilon(\alpha)}.$$

Einen etwas weniger einfachen Ausdruck erhält man zur Berechnung des bestimmten Integrals, wenn in den beiden obigen Integralformen an die Stelle der Integrationsgrenzen 0 und 1 die Grenzen $\frac{1}{e}$ und 1 treten. Setzt man zunächst:

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 \tfrac{1}{2}l\frac{1-e^2x^2-(1-x^2)e^2y^2}{\sqrt{1-e^2}}.\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}=M_1(x),$$

so hat man jedenfalls die Gleichung:

XI. $$M_1(x)=F\left(\frac{1}{e}\right).l\vartheta(\varphi)-\frac{\sqrt{-1}}{2}\varepsilon(\alpha)\,F^2(x),$$

mag nun x zwischen 0 und 1 oder zwischen 1 und $\frac{1}{e}$ liegen. Dagegen erhält man zwei verschiedene Ausdrücke $N_1(x)$, je nach dem $x<$ oder >1 gedacht wird, wenn man

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{l(ex^2-ey^2)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}=N_1(x)$$

schreibt. Denn man hat die Gleichung:

$$N_1(x) = F\left(\frac{1}{e}\right) . l\vartheta(\varphi) - \frac{\sqrt{-1}}{2}\varepsilon(\alpha)F^2(x) + iF(x) - \frac{\pi}{4}\sqrt{-1} . F(0),$$

worin diesmal $i=0$ zu setzen ist, wenn $x>1$, und $i=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, wenn $x<1$ angenommen wird.

Endlich kann man auch das Doppelintegral

$$\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}} \cdot \int_y^1 dy \sqrt{\frac{1-e^2y^2}{1-y^2}} = L(y)$$

durch die Funktionen ε, ζ, ϑ ausdrücken. Man findet die Gleichung:

XIII. $$L(y) - \tfrac{1}{2}\cos\alpha\zeta(\alpha)F^2(y) = l\frac{\vartheta(\alpha)}{\vartheta(\psi)},$$

worin wieder $\sin\psi = ey$ und $\sin\alpha = e$ gesetzt worden ist. Die Gleichung bleibt richtig für alle Werthe y, welche zwischen 0 $\frac{1}{e}$ liegen; oder für alle ψ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$.

Man differentiire die Gleichung XIII. nach y, und multiplizire alsdann mit $\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}$. Man erhält:

$$E(y) - \cos\alpha\zeta(\alpha)F(y) = e\sqrt{1-y^2}\cdot\frac{\vartheta'(\psi)}{\vartheta(\psi)}.$$

Man vergleiche dies mit der Gleichung 19. des §. 16. Dies führt auf die Beziehung:

30. $$\frac{\vartheta'(\psi)}{\vartheta(\psi)} = \frac{\cos\psi - \zeta(\psi)}{\sin\psi}.$$

Differentiirt man auch die Gleichungen IX., X., XI., XII. nach x und nimmt man dabei Rücksicht auf die so eben aufgefundene Beziehung 30., so ergeben sich die bestimmten Integrale $C(x, 0)$, $D(x, 0)$, $C(x, \frac{1}{e})$, $D(x, \frac{1}{e})$ übereinstimmend mit den in den §§. 15. und 16. aufgestellten Resultaten.

§. 19.

Die Reihenentwicklungen von $\varepsilon(\psi)$, $\zeta(\psi)$, $\vartheta(\psi)$, $\eta(\varphi, \psi)$ enthalten nur trigonometrische Funktionen der Winkel φ_n und ψ_n; es kommen nur die trigonometrischen Funktionen $\cos\varphi_n$, $\cos\psi_n$,

$\cos^2\frac{\psi_n}{2}$ darin vor. Die auf einander folgenden Winkel φ_n und ψ_n bestimmen sich durch die beiden Gleichungen:

$$\sin\psi_{n+1} = \operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{2}.\operatorname{tg}\frac{\psi_n}{2} \text{ und } \sin\alpha_{n+1} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha_n}{2}.$$

Die Zahlenrechnung kann mit Hilfe der logarithmisch trigonometrischen Tafeln durchgeführt werden. Es ist aber im Grunde zwecklos, die Winkel φ_n und ψ_n selbst zu kennen; und nur die der logarithmisch trigonometrischen Tafel eigenthümliche Einrichtung trägt die Schuld, wenn man bei der Bestimmung der in den Reihenentwicklungen vorkommenden trigonometrischen Funktionen die Vermittlung dieser Winkel nicht entbehren kann. Die Zahlenrechnung wäre wesentlich vereinfacht durch den Gebrauch einer anderen Tafel, welche so eingerichtet ist, dass man für einen gegebenen Werth $\log\sin\psi$ die zugehörigen Werthe $\log\cos\psi$, $\log\cos\frac{\psi}{2}$ und $\log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ unmittelbar aufschlagen kann.

Ein anderer Missstand, welchen hier der Gebrauch der logarithmisch trigonometrischen Tafel mit sich bringt, besteht darin, dass man, wenn ψ bekannt ist, die Werthe $\log\cos\frac{\psi}{2}$ und $\log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ etwa auf sieben Dezimalstellen genau abliest; während dann aber die daraus abgeleiteten Werthe $\log\cos^2\frac{\psi}{2}$ und $\log\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}$ wegen der vorzunehmenden Verdoppelung, und aus einem ähnlichen Grunde auch der Werth $\log\sin\psi_1$, in der siebenten Dezimalstelle unzuverlässig sind. Auch dies wäre beseitigt, wenn man zu dem gegebenen Werthe $\log\sin\psi$ sogleich die zugehörigen Werthe $\log\cos^2\frac{\psi}{2}$ und $\log\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}$ aufschlagen könnte.

Man würde sich also vortheilhafter der folgenden Tafel bedienen:

$\log\sin\psi$	$\log\cos\psi$	$\log\cos^2\frac{\psi}{2}$	$\log\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}$

welche in der ersten Vertikalreihe die gegebenen Zahlenwerthe und in den drei andern Vertikalreihen die abzulesenden Zahlenwerthe enthält.

Mannheim im August 1860.

XXVI.

Zur Integration der linearen Differentialgleichungen.

Von

Herrn Doctor *A. Weiler*,

Lehrer der Mathematik an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

Um der linearen Differentialgleichung

$$(y-1)y\frac{d^2z}{dy^2}+((1-a-b)y+c)\frac{dz}{dy}+abz=0$$

zu genügen, schreibt man bekanntlich das bestimmte Integral

$$z=\int_{v_1}^{v_2}(v-1)^{b-c-1}.v^{c-a}(v-y)^a dv$$

an. Man findet, dass man als Integrationsgrenzen v_1 und v_2 irgend zwei von den Werthen 1, 0, y, $\pm\infty$ gebrauchen kann. Doch genügt das vorliegende bestimmte Integral nur unter gewissen Bedingungen der Differentialgleichung. Jeder von den angegebenen Grenzwerthen v stellt für sich eine bestimmte Anforderung an die Bedeutung der Buchstaben a, b, c. Die Grenze $v=1$ ist nur dann zulässig, wenn $b-c>0$, die Grenze $v=0$, wenn $c-a+1>0$ ist; die Grenze $v=y$ verlangt, dass $a+1>0$, und die Grenzen $v=\pm\infty$ endlich, dass $b<0$ sei.

Zur Darstellung des allgemeinen Integrals der linearen Differentialgleichung sind zwei verschiedene Funktionen von y erforderlich, welche, anstatt z in die Differentialgleichung eingesetzt, derselben Genüge leisten. Die Coeffizienten a, b, c können allerdings so beschaffen sein, dass das oben angegebene bestimmte Integral mehr als zwei von den genannten Grenzwerthen zulässt, und in Folge davon zwei derartige Funktionen von y liefert. Wenn dies aber nicht der Fall ist, so entsteht die Frage, wie man anders zu diesen Funktionen gelangen könne.

In einer Abhandlung über lineare Differentialgleichungen, welche

in dem 51sten Bande des Crelle'schen Journals abgedruckt ist, habe ich gezeigt, was meines Wissens vorher noch Niemand beachtet hatte, dass das bestimmte Integral

$$z=\int_{v_1}^{v_2}(v-1)^{b-c-1}v^{c-a}(v-y)^a\,dv$$

unter allen Umständen ausreichend ist zur Darstellung der beiden vorhin verlangten Funktionen von y, auch dann, wenn die oben erwähnten Bedingungen unerfüllt sind.

Ich denke mir, um dies nachzuweisen, die bestimmte Integration für den Fall, dass die oben verlangten Bedingungen erfüllt sind, in irgend einer Reihenentwicklung ausgeführt. Es steht fest, dass diese Reihenentwicklung unter der genannten Voraussetzung der Differentialgleichung genügt, und als deren Integral betrachtet werden darf, so lange sie nicht aufhört, konvergent zu sein. Ich behaupte aber, dass dieselbe Reihenentwicklung auch dann ein Integral der vorliegenden Differentialgleichung ist, wenn die Bedingungen, unter welchen sie aus dem obigen bestimmten Integral abgeleitet worden ist, nicht mehr erfüllt sind, so dass also das Fortbestehn der Convergenz die einzige Anforderung ist.

Betrachte man beispielsweise das bestimmte Integral:

$$z=\int_1^{\infty}(v-1)^{b-c-1}v^{c-a}(v-y)^a\,dv.$$

Dasselbe genügt der Differentialgleichung, wenn $b-c>0$ und wenn zugleich $b<0$ ist. Die bestimmte Integration lässt sich leicht ausführen, nachdem man den Faktor $(v-y)^a$ nach steigenden Potenzen von y entwickelt hat. Man erhält alsdann:

$$z=\int^{\infty}(v-1)^{b-c-1}.(v^c-av^{c-1}\frac{y}{1}+a(a-1)v^{c-2}.\frac{y^2}{1.2}$$
$$-a(a-1)(a-2)v^{c-3}.\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots.)\,dv.$$

Man wende auf die einzelnen Glieder der Reihe die theilweise Integration an und gebrauche desshalb die Gleichung:

$$d\{(v-1)^{b-c}.v^{c-n}\}$$
$$=(b-n)(v-1)^{b-c-1}.v^{c-n}dv-(c-n)(v-1)^{b-c-1}.v^{c-n-1}dv,$$

worin n als positive ganze Zahl aufzufassen ist. Durch die bestimmte Integration zwischen den Grenzen $v=1$ und $v=\infty$ entsteht daraus die Gleichung:

$$\int_1^\infty (v-1)^{b-c-1} v^{c-n-1} dv = \frac{b-n}{c-n} \cdot \int_1^\infty (v-1)^{b-c-1} \cdot v^{c-n} dv.$$

Doch ist dies nur so lange richtig, als die beiden Bedingungen $b-c>0$ und $b<0$ fortbestehen, da nur dann das algebraische Glied $(v-1)^{b-c} v^{c-n}$ sowohl für $v=1$, als auch für $v=\infty$ verschwindet. Nachdem man die Gleichung wiederholt in Anwendung gebracht hat bis endlich $n=0$ geworden, findet man in der Reihenentwicklung den gemeinsamen, von y unabhängigen Faktor $\int_1^\infty (v-1)^{b-c-1} v^c dv$. Da man jeden Faktor der Art in dem Integral ausser Acht lassen kann, so zeigt sich dasselbe in der Form:

$$z = 1 - \frac{ab}{c}\frac{y}{1} + \frac{ab}{c} \cdot \frac{(a-1)(b-1)}{c-1} \cdot \frac{y^2}{1.2}$$

$$- \frac{ab}{c} \frac{(a-1)(b-1)}{c-1} \cdot \frac{(a-2)(b-2)}{c-2} \cdot \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Da dieselbe der Differentialgleichung für alle möglichen Werthe b genügt, welche <0 sind, so folgt nothwendig, nachdem man dieselbe an die Stelle von z eingesetzt hat, dass dann der gemeinsame Faktor jeder einzelnen Potenz von b in der so umgewandelten Differentialgleichung für sich verschwindet. Wenn aber dies zutrifft, so versteht es sich, dass die Reihe auch dann genügt, wenn $b>0$ ist.

Wenn nun auch die vorliegende Reihe als Integral der Differentialgleichung ihre Bedeutung verliert, so bald sie aufhört konvergent zu sein, so ist doch leicht zu sehen, dass die Bedingungen der Convergenz mit den obigen Bedingungen $b-c>0$ und $b<0$, welche der Entwicklung zum Grunde liegen, Nichts zu schaffen haben. Geht ja doch die Reihe in einen geschlossenen Ausdruck über, für $b=0$, $b=1$, $b=2$, u. s. w., welche Werthe offenbar der Bedingung $b<0$ widersprechen.

Wollte man annehmen, dass die oben erwähnten Bedingungen nicht erfüllt seien, während man die bestimmte Integration ausführt, so würde man allerdings eine Reihenentwicklung erhalten, welche der Differentialgleichung nicht genügt. Aber man sieht nun ein, dass man dennoch im Stande ist, aus der Form

$$z = \int_{v_1}^{v_2} (v-1)^{b-c-1} v^{c-a} (v-y)^a dv$$

ein Integral der Differentialgleichung abzuleiten. Es kommt nur

darauf an, dass die bestimmte Integration in der Weise durchgeführt werde, wie wenn die vorgeschriebenen Bedingungen wirklich erfüllt wären, da dann nach vollzogener Integration diese Beschränkungen hinwegfallen und das Resultat auch für alle anderen Werthe der Buchstaben a, b, c richtig bleibt. Insofern bei der bestimmten Integration die Form der entstehenden Reihenentwicklung nicht vorgeschrieben ist, sondern es freisteht, dieselbe jedesmal so zu wählen, dass sie für die vorkommenden Werthe a, b, c, y Convergenz hat, ist man berechtigt zu der Behauptung, das obige bestimmte Integral sei unter allen Umständen ausreichend zur Darstellung der beiden Integrale.

Wenn man dieser Darstellungsweise der Integrale einen Vorwurf zu machen hätte, so wäre es der Umstand, dass die bestimmte Integration, sobald die obigen Bedingungen nicht erfüllt sind, für die allgemeine Bedeutung der Buchstaben a, b, c durchgeführt werden muss, und alsdann erst die in der vorliegenden Aufgabe vorkommenden Werthe a, b, c eingesetzt werden können. Denn wenn man den Fall setzt, dass der linearen Differentialgleichung etwa durch andere bestimmte Integrale Genüge geschehe, worin noch vor der Ausführung der bestimmten Integration die vorliegenden Werthe a, b, c sogleich in Anwendung kommen dürfen, so könnte man sich dann vielleicht gewisser Vortheile bedienen, welche bei der Berechnung des bestimmten Integrals an bestimmte Zahlenwerthe a, b, c geknüpft sind. Ich beabsichtige aber jetzt zu zeigen, dass man aus derselben Form

$$z = \int_{v_1}^{v_2} (v-1)^{b-c-1} . v^{c-a} . (v-y)^a \, dv$$

jedesmal andere bestimmte Integrale ableitet, welche die zuletzt erwähnte Eigenschaft besitzen.

Ich nehme desshalb zunächst an, dass die Bedingung $b < 0$ erfüllt, dass also eine der beiden Grenzen $v = \pm\infty$ anwendbar sei. Die bestimmte Integration muss dann der vorhin gegebenen Vorschrift gemäss in der Art durchgeführt werden, wie wenn noch eine der drei andern Bedingungen $b-c > 0$, $c-a+1 > 0$, $a+1 > 0$ bestände, je nachdem die zweite Integrationsgrenze v die Werthe 1, 0, y annimmt. Hat man das bestimmte Integral

$$z = \int_{1}^{\infty} (v-1)^{b-c-1} . v^{c-a} (v-y)^a \, dv ,$$

so lässt sich dasselbe, indem man $n$mal nach einander theilweise integrirt, auch also anschreiben:

$$z = \int_1^{\infty} \frac{d^n\{v^{c-a}(v-y)^a\}}{dv^n}(v-1)^{b-c+n-1}\,dv.$$

Denn alle übrigen, durch die theilweise Integration entstehenden Glieder treten aus dem Integralzeichen heraus und verschwinden als algebraische Funktionen sowohl für $v=1$, als auch für $v=\infty$, da bei der Integration die beiden Bedingungen $b<0$ und $b-c>0$ festgehalten werden müssen. Gesetzt nun aber, die letztere Bedingung $b-c>0$ sei nicht erfüllt, und die Zahl n sei von der Art, dass auch $b-c+n<0$. Man wird sich dann leicht davon überzeugen, dass die Reihenentwicklung, welche unter diesen Umständen durch die bestimmte Integration etwa auf dem oben verfolgten Wege aus der letzteren Integralform erzielt wird, von derjenigen verschieden ist, welche unter der Voraussetzung, dass $b-c>0$ sei, daraus hervorgeht, und dass sie dann der Differentialgleichung nicht genügt. Wenn aber n so gross gedacht wird, dass $b-c+n>0$ ist, so findet sich in beiden Fällen ein und dieselbe Reihenentwicklung. Daraus schliesst man, dass in der neuen Form:

$$z = \int_1^{\infty} \frac{d^n\{v^{c-a}(v-y)^a\}}{dv^n}.(v-1)^{b-c+n-1}\,dv,$$

um der linearen Differentialgleichung zu genügen, auch dann, wenn $b-c<0$, die vorliegenden Werthe b und c sogleich eingesetzt werden dürfen, bevor noch die bestimmte Integration ausgeführt ist. Die Zahl n muss dabei nur so gewählt sein, dass $b-c+n>0$ ist.

In derselben Weise wird das bestimmte Integral

$$z = \int_y^{\infty} (v-1)^{b-c-1}.v^{c-a}(v-y)^a\,dv,$$

worin $a+1>0$ gedacht werden muss, auf eine andere Form:

$$z = \int_y^{\infty} \frac{d^n\{(v-1)^{b-c-1}.v^{c-a}\}}{dv^n}(v-y)^{a+n}\,dv$$

zurückgeführt, wo nun jene Bedingung wegfällt, so bald $a+n+1>0$ angenommen wird.

Ferner wird das bestimmte Integral

$$z = \int_{-\infty}^{0} (v-1)^{b-c-1}v^{c-a}(v-y)^a\,dv$$

umgewandelt in:

$$z=\int_{-\infty}^{0}\frac{d^n\{(v-1)^{b-c-1}.(v-y)^a\}}{dv^n}v^{c-a+n}dv,$$

worin $c-a+n+1>0$ gedacht werden muss.

Ich bin vorhin von der Annahme ausgegangen, dass die Integrationsgrenzen $v=\pm\infty$ zulässig seien. Wenn dies nicht der Fall ist, so kann man das bestimmte Integral durch die Einführung einer neuen Veränderlichen doch jedesmal in eine andere ähnliche Form umwandeln, worin die Integrationsgrenzen $v=\pm\infty$ zulässig sind. Man bemerke nur, dass von den vier Bedingungen $b-c>0$, $c-a+1>0$, $a+1>0$, $b<0$ jedenfalls eine besteht. Denn wenn keine der drei ersten erfüllt ist, so ist es die letzte, was die Addition der drei übrigen zeigt.

Wenn nun $b-c>0$ ist, was die Grenze $v=1$ liefert, so setze man $v-1=\frac{1-y}{u-1}$, und man erhält die neue Form:

$$z=(y-1)^{a+b-c}.\int_{u_1}^{u_2}(u-1)^{-b-1}(u-y)^{c-a}u^a\,du,$$

worin anstatt der Grenzwerthe $v=1$, $v=0$, $v=y$, $v=\pm\infty$ die neuen $u=\pm\infty$, $u=y$, $u=0$, $u=1$ in Anwendung kommen.

Hat man $a-c+1>0$, und desshalb die Grenze $v=0$, so setze man $v=\frac{y}{u}$, und man erhält die neue Form:

$$z=y^{c+1}.\int_{u_1}^{u_2}(u-y)^{b-c-1}.u^{-b-1}.(u-1)^a\,du,$$

wo nun anstatt $v=1$, $v=0$, $v=y$, $v=\pm\infty$ die Grenzwerthe $u=y$, $u=\pm\infty$, $u=1$, $u=0$ einzuführen sind.

Hat man endlich $a+1>0$ und desshalb die Grenze $v=y$, so setze man $v-y=\frac{y(y-1)}{u-y}$. Es findet sich die neue Form:

$$z=y^{c+1}(y-1)^{a+b-c}.\int_{u_1}^{u_2}u^{b-c-1}.(u-1)^{c-a}.(u-y)^{-b-1}\,du.$$

Darin hat man anstatt $v=1$, $v=0$, $v=y$, $v=\pm\infty$ zu setzen: $u=0$, $u=1$, $u=\pm\infty$, $u=y$.

Ich habe hierdurch gezeigt, wie man aus der Form:

$$z=\int_{v_1}^{v_2}(v-1)^{b-c-1}.v^{c-a}(v-y)^a dv$$

in allen Fällen andere bestimmte Integrale ableitet, welche der Differentialgleichung genügen und zugleich die vorhin erwähnte Eigenschaft besitzen, wornach die Buchstaben a, b, c, bevor noch die bestimmte Integration ausgeführt ist, alle möglichen Zahlenwerthe annehmen dürfen. Dieselben Integralformen hat Jacobi auf einem andern Wege dargestellt, in einer Abhandlung, mitgetheilt durch Herrn E. Heine, in dem 56sten Bande des Crelle'schen Journals. Jacobi hat dieselben aus bestimmten Doppelintegralen abgeleitet, welche der linearen Differentialgleichung genügen. Da die gegenwärtige Notiz auf andere Aufsätze sich bezieht, welche in dem Crelle'schen Journal erschienen sind, so war es mein Wunsch, dass dieselbe ebenda abgedruckt werde. Der geehrte Redakteur des Crelle'schen Journals, Herr Dr. Borchardt, hat aber geglaubt, dieselbe nicht aufnehmen zu dürfen.

Zwei verschiedene Integrale der Differentialgleichung:

$$y\frac{d^2z}{dy^2}+(y-a-b)\frac{dz}{dy}-az=0$$

sind in allen Fällen durch die beiden bestimmten Integrale

$$z=\int_0^\infty e^{-v}v^b(v-y)^a dv \quad \text{und} \quad z=\int_y^\infty e^{-v}v^b(v-y)^a dv$$

gegeben. Dieselben genügen der Differentialgleichung unmittelbar, wenn $b+1>0$ und $a+1>0$ ist. Wenn die Bedingung $b+1>0$ nicht erfüllt ist, so hat man das erstere bestimmte Integral zu ersetzen durch die Form:

$$z=\int_0^\infty \frac{d^n\{e^{-v}(v-y)^a\}}{dv^n}v^{b+n}dv,$$

worin aber die Zahl n so gewählt werden muss, dass $b+n+1>0$ ist. Wenn die Bedingung $a+1>0$ nicht erfüllt ist, so verliert das zweite bestimmte Integral in der vorstehenden Form seine Brauchbarkeit. Man wird dann

$$z=\int_y^\infty \frac{d^n\{e^{-v}v^b\}}{dv^n}(v-y)^{a+n}dv$$

schreiben, worin $a+n+1>0$ gedacht wird.

XXVII.

Zusatz zu dem Aufsatze über die Fläche des sphärischen Vierecks in diesem Theile. Nr. XII. S. 104.

Von

Herrn Director Professor Dr. *Strehlke*

zu Danzig.

Durch Anwendung des sphärischen Polarvierecks lässt sich Einiges in jenem Aufsatze vereinfachen. In dem sphärischen Vierecke seien wieder die auf einander folgenden Seiten a, b, c, d; die von diesen eingeschlossenen Winkel B, C, D, A; die den Polen A, B, C, D entsprechenden Seiten des sphärischen Polarvierecks a', b', c', d'; die von denselben eingeschlossenen Winkel sind A', B', C', D'. Zerfällt man nun das Polarviereck durch die sphärische Diagonale $A'C'$ in die beiden Dreiecke $C'D'A'$ und $A'C'B'$, so hat man aus dem ersten:

$$\begin{aligned}\cos A'C' &= \cos a' . \cos d' + \sin a' . \sin d' . \cos D' \\ &= \cos A . \cos D - \sin A . \sin D . \cos d,\end{aligned}$$

aus dem zweiten:

$$\begin{aligned}\cos A'C' &= \cos b' . \cos c' + \sin b' . \sin c' . \cos B' \\ &= \cos B . \cos C - \sin B . \sin C . \cos b;\end{aligned}$$

folglich

(I)

$$\cos A . \cos D - \cos B . \cos C = \sin A . \sin D . \cos d - \sin B . \sin C . \cos b.$$

Durch Addition und Subtraction von $\sin A . \sin D$ und $\sin B . \sin C$ auf beiden Seiten der Gleichung (I) erhält man nach einander:

$$\sin\tfrac{1}{2}(B+C-A+D).\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C-D)$$
$$=\sin A.\sin D.\cos\tfrac{1}{2}d^2+\sin B.\sin C.\sin\tfrac{1}{2}b^2, \qquad (1)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C+D-B).\sin\tfrac{1}{2}(A+D+B-C)$$
$$=\sin A.\sin D.\sin\tfrac{1}{2}d^2+\sin B.\sin C.\cos\tfrac{1}{2}b^2, \qquad (2)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(B+D-A-C).\sin\tfrac{1}{2}(A+B-C-D)$$
$$=\sin A.\sin D.\cos\tfrac{1}{2}d^2-\sin B.\sin C.\cos\tfrac{1}{2}b^2, \qquad (3)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(B+C-A-D).\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C+D)$$
$$=-\sin A.\sin D.\sin\tfrac{1}{2}d^2+\sin B.\sin C.\sin\tfrac{1}{2}b^2. \qquad (4)$$

Durch Multiplication von (1) mit (2) wird erhalten:

(5)

$$\sin\tfrac{1}{2}(B+C+D-A).\sin\tfrac{1}{2}(A+C+D-B).\sin\tfrac{1}{2}(B+D+A-C)\times\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C-D)$$
$$=(\tfrac{1}{2}\sin A.\sin D.\sin d\pm\tfrac{1}{2}\sin B.\sin C.\sin b)^2$$
$$+\sin A.\sin B.\sin C.\sin D.\cos\tfrac{1}{2}(b\pm d)^2,$$

durch Multiplication von (3) und (4):

(6)

$$\sin\tfrac{1}{2}(B+D-A-C).\sin\tfrac{1}{2}(A+B-C-D).\sin\tfrac{1}{2}(B+C-A-D)\times\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C+D)$$
$$=-(\tfrac{1}{2}\sin A.\sin D.\sin d\pm\tfrac{1}{2}\sin B.\sin C.\sin b)^2$$
$$+\sin A.\sin B.\sin C.\sin D.\sin\tfrac{1}{2}(b\pm d)^2.$$

Ist das sphärische Viereck in einen kleineren Kreis der Sphäre beschrieben, so wird $B+D=A+C$, und man erhält aus (6), dessen linke Seite dann $=0$:

$$\tfrac{1}{2}\sin A.\sin D.\sin d\pm\tfrac{1}{2}\sin B.\sin C.\sin b$$
$$=\sqrt{\sin A.\sin B.\sin C.\sin D}.\sin\tfrac{1}{2}(b\pm d).$$

Aus (3) folgt für das sphärische Kreisviereck:

$$\sin A.\sin D.\cos\tfrac{1}{2}d^2=\sin B.\sin C.\cos\tfrac{1}{2}b^2; \qquad (7)$$

und ebenso durch Vertauschung mit den beiden anderen Gegenseiten und den anliegenden Winkeln:

$$\sin A.\sin B.\cos\tfrac{1}{2}a^2=\sin D.\sin C.\cos\tfrac{1}{2}c^2. \qquad (8)$$

Durch Division von (7) und (8) wird erhalten:

$$\frac{\sin D.\cos\tfrac{1}{2}d^2}{\sin B.\cos\tfrac{1}{2}a^2}=\frac{\sin B}{\sin D}.\frac{\cos\tfrac{1}{2}b^2}{\cos\tfrac{1}{2}c^2},\quad\text{woraus folgt:}\quad\frac{\sin D}{\sin B}=\frac{\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}.\cos\frac{d}{2}}=\frac{\alpha}{\alpha'}$$

nach der früheren Bezeichnung. Sonach kann der Bruch

$$\frac{\beta \sin B + \beta' \sin D}{\beta \sin B - \beta' \sin D}$$ *)

sehr leicht ohne Kenntniss der Ausdrücke von $\sin B$ und $\sin D$ durch die Seiten des sphärischen Kreisvierecks, durch $\frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\alpha'\beta - \alpha\beta'}$, dargestellt werden.

XXVIII.

Einige Beiträge zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen und der Secanten-Coefficienten.

Von

Herrn Doctor *G. F. Meyer*

in Hannover.

In seiner Abhandlung: „Zur Theorie der Euler'schen Integrale. Göttingen 1846" bemerkt Herr Professor Stern, dass man, wenn $f^{2n}(0)$ den $2n$ten Differentialquotienten von $f(z)=\frac{z}{e^z-1}$ für $z=0$, B_n die $n$te Bernoulli'sche Zahl bezeichnet, mit Hülfe der Gleichung

$$\text{I.} \qquad f^{2n}(0) = (-1)^{n-1} . B_n$$

nicht bloss die meisten bekannten, sondern auch neue Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen mit nur geringer Mühe ableiten könne. Da Herr Professor Stern in der genannten Schrift dieser Idee jedoch nur gelegentlich gedenkt und später nichts weiter über diesen Gegenstand veröffentlicht hat: so habe ich

*) Seite 108. in diesem Theile.

versucht, dieselbe weiter zu verfolgen. Und ich glaube, gestützt auf diese meine Betrachtungen, behaupten zu dürfen, dass von allen Methoden, welche man zur Herleitung von Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen benutzen mag, der Stern'schen der Vorzug gebührt. Ich darf daher wohl auf die Nachsicht der geehrten Leser dieses Archivs hoffen, wenn ich mir erlaube, in dem Folgenden die Resultate meiner Untersuchung mitzutheilen.

---

§. 1.

Beweis der Gleichung $f^{2n}(0) = (-1)^{n-1} . B_n$ nach Stern.

Wenngleich die Beziehung I. eine längst bekannte Wahrheit ausdrückt, so halten wir doch eine kurze Angabe des Stern-schen Beweises dieser Gleichung nicht für überflüssig. Geht man nämlich von der Beziehung

$$l\frac{\sin x}{x} = l[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \ldots.]$$
$$= -\frac{x^2}{\pi^2} S_2 - \frac{x^4}{2\pi^4} S_4 - \frac{x^6}{3\pi^6} S_6 - \ldots.$$

oder, falls wir der Bequemlichkeit wegen x^2 mit u vertauschen, von

1)

$$l[1 - \frac{u}{3!} + \frac{u^2}{5!} - \ldots.] = -\frac{u}{\pi^2} S_2 - \frac{u^2}{2\pi^4} S_4 - \ldots.$$

aus, und berücksichtigt man die Recursionsformel

2)

$$nA_n = na_n + (n-1)\, a_{n-1} A_1 + \ldots. + a_1 A_{n-1},$$

wenn

3)

$$l(1 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots. + A_n u^n + \ldots.) = a_1 u + a_2 u^2 + \ldots. + a_n u^n + \ldots;$$

so folgt durch Anwendung von 2) auf 1) die Gleichung:

4)

$$(-1)^n \frac{n}{2n+1!} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{S_{2n}}{\pi^{2n}} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{S_{2n-2}}{\pi^{2n-2}} - \frac{1}{5!} \cdot \frac{S_{2n-4}}{\pi^{2n-4}} + \ldots. \\ \quad + (-1)^n \cdot \frac{S_2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1.2.3 \ldots. 2n-1}. \end{array} \right.$$

Indem man nun jede Zahl B_n, welche eine Gleichung von der Form

$$B_n = \frac{1.2.3....2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left[1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+....\right] = \frac{1.2.3....2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\cdot S_{2n}\ ^*)$$

befriedigt, eine Bernoulli'sche Zahl nennt, gewinnt man aus 4) durch die Substitutionen

$$\frac{S_{2n}}{\pi^{2n}} = \frac{2^{2n-1}B_n}{2n!}, \quad \frac{S_{2n-2}}{\pi^{2n-2}} = \frac{2^{2n-3}B_{n-1}}{1.2.3....2n-2}....$$

die Relation:

5)

$$\frac{2^{2n-1}B_n}{2n!} - \frac{2^{2n-3}B_{n-1}}{2n-2!}\cdot\frac{1}{3!} + \frac{2^{2n-5}B_{n-2}}{2n-4!}\cdot\frac{1}{5!}$$
$$-.... + (-1)^{n-1}\frac{2B_1}{2n-1!}\cdot\frac{1}{1.2} + (-1)^n\cdot\frac{n}{2n+1!} = 0.$$

Dieselbe Relation aber findet sich auch auf folgendem Wege. Man vertausche nämlich in $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ die Veränderliche z mit $2z$, entwickele darauf die hierdurch gewonnene Gleichung

$$f(z) = \frac{e^z+1}{2}f(2z)$$

nach dem Maclaurin'schen Satze und berücksichtige, dass alle Coefficienten von der Form $f^{2m+1}(0)$, wo die ganze Zahl $m>0$ ist, verschwinden. Auf diese Weise erhält man:

6)

$$1-\frac{z}{1.2}+\frac{z^2}{1.2}f^2(0)+\frac{z^4}{1....4}f^4(0)+....+\frac{z^{2n}}{2n!}f^{2n}(0)+....$$
$$=\left[1+\frac{z}{2.1}+\frac{z^2}{2.1.2}+....\right]\left[1-z+\frac{(2z)^2}{1.2}f^2(0)+....+\frac{(2z)^{2n}}{2n!}f^{2n}(0)+...\right].$$

Hieraus aber ergiebt sich durch Zusammenstellung der mit dem Faktor z^{2n+1} behafteten Glieder die Gleichung:

7)

$$\frac{2^{2n-1}}{2n!}f^{2n}(0)+\frac{2^{2n-3}}{2n-2!}f^{2n-2}(0)\cdot\frac{1}{3!}+\frac{2^{2n-5}}{2n-4!}f^{2n-4}(0)\cdot\frac{1}{5!}$$
$$+....+\frac{2}{2n-1!}f^2(0)\cdot\frac{1}{1.2}-\frac{n}{1.2.3....2n+1}=0.$$

---

*) Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich bekanntlich ebenfalls mit Hülfe der Theorie der Logarithmen darthun. Man sehe: Cauchy, Analysis.

Und indem man die Formeln 5) und 7) mit einander vergleicht, erkennt man ohne Mühe die Richtigkeit der Gleichung 1.:

$$f^{2n}(0) = (-1)^{n-1} . B_n.$$

Anmerkung.

Obgleich die zu Gleichung 7) führenden Entwicklungen scheinbar ganz anderer Natur sind, als die zur Erzeugung der Relation 5) benutzten Betrachtungen: so können doch beide Wege als Entwicklungen einer und derselben Function betrachtet werden. Und zwar scheint uns dies zunächst darin zu liegen, dass beide Entwicklungsweisen dem gleichen Ziele, der Bestimmung von A_n oder nA_n zustreben. Da nämlich die Darstellung von nA_n durch eine Summe als Zweck der Untersuchung nach unserm Dafürhalten angesehen werden darf, so erhellt zuvörderst, dass zur Ermittelung der Gleichung 5) statt $\frac{\sin x}{x}$ auch $\frac{e^x - e^{-x}}{2x}$ hätte gewählt werden können. Und ebenso würde man ferner — wie sich sofort ergiebt — aus der Form $\frac{2x}{e^x - e^{-x}}$ dasselbe Resultat erzielen. Nimmt man aber diese Function, dann kommt augenblicklich:

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{2} f(2x),$$

die Gleichung also, welche A_n formell in sich begreift. Die Glieder aber, welche nA_n annulliren, können, wie wir sehen, nur die entsprechenden in 5) sein.

Das Unterscheidende beider Methoden dürfte hiernach nur in Folgendem bestehen. Während die eine der Methoden ihr Ziel dadurch zu erreichen sucht, dass sie die Function $\frac{e^x - e^{-x}}{2x}$ durch Gleichgeltendes, durch

$$e^{\log\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots\right)} = e^{\log\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1 + \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) + \ldots}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \text{etc. etc.}$$

ersetzt, darauf x in $x + u$ umwandelt, und schliesslich die mit u multiplicirten Glieder zusammenstellt; geht die andere Behandlungsweise darauf aus, eine solche Form aus der ursprünglichen Function $\frac{e^x - e^{-x}}{2x}$ zu erzielen, die bei gehöriger Behandlung so-

gleich zu erkennen giebt, dass ein Glied mit dem Nenner $2n+1!$ nicht vorkommen kann.

§. 2.

I. Recurrirende Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen.

Nach diesen vorläufigen Bemerkungen gehen wir zu dem uns gesteckten Ziele selbst über. Vereinigen wir zuvörderst die mit z^{2n} multiplicirten Glieder der Gleichung 6), so entspringt:

$$\frac{2^{2n}-1}{2n!}f^{2n}(0)+\frac{2^{2n-3}}{2n-2!}\frac{f^{2n-2}(0)}{1.2}+\frac{2^{2n-5}}{2n-4!}\frac{f^{2n-4}(0)}{1.2.3.4}+\ldots.$$

$$+\frac{2^5}{6!}\frac{f^6(0)}{2n-6!}+\frac{2^3}{4!}\frac{f^4(0)}{2n-4!}+\frac{2}{1.2}\cdot\frac{f^2(0)}{2n-2!}+\frac{1-2n}{2.1\ldots.2n}=0;$$

d. g. mit Rücksicht auf Gleichung I. und durch Division mit $(-1)^{n-1}$:

8)

$$\frac{2^{2n}-1}{2n!}B_n-\frac{2^{2n-3}}{2n-2!}\cdot\frac{B_{n-1}}{1.2}+\ldots.+(-1)^n\frac{n-\frac{1}{2}}{1.2\ldots.2n}=0.$$

Setzt man ferner $-z$ statt z in den Ausdruck:

$$f(z)=\frac{z}{e^z-1},$$

so erhält man:

$$f(-z)=e^z.f(z).$$

Und diese Werthe, nach den steigenden Potenzen von z entwickelt, geben die Beziehung:

9)

$$1+\frac{z}{1.2}+\frac{z^2}{1.2}f^2(0)+\frac{z^4}{1\ldots.4}f^4(0)+\ldots.+\frac{z^{2n}}{1\ldots.2n}f^{2n}(0)+\ldots.$$

$$=[1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\ldots.+\frac{z^{2n}}{1\ldots.2n}+\ldots.][1-\frac{z}{1.2}+\frac{z^2}{1.2}f^2(0)+\ldots+\frac{z^{2n}}{2n!}f^{2n}(0)+\ldots].$$

Stellt man jetzt alle Glieder zusammen, welche den Factor z^{2n} enthalten, so findet die Gleichung Statt:

$$B_{n-1}-\frac{2n-2.2n-3}{3.4}B_{n-2}+\frac{2n-2\ldots.2n-5}{3.4.5.6}B_{n-3}-\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}.\frac{2n.2n-1}{3.4}B_2-(-1)^n.B_1+(-1)^n.\frac{2n}{2n+1.2n+2}=0.$$

Hieraus aber folgt durch Vertauschung von n mit $n+1$:

10)

$$B_n - \frac{2n.2n-1}{3.4} B_{n-1} + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{3.4.5.6} B_{n-2} - \ldots.$$

$$+ (-1)^n . \frac{2n.2n-1}{3.4} B_2 - (-1)^n B_1 + (-1)^n . \frac{2n}{2n+1.2n+2} = 0.$$

Direct würde man zu dieser Gleichung gelangt sein, hätte man gleich die mit z^{2n+2} behafteten Glieder zusammengestellt, wodurch freilich die Uebereinstimmung mit dem früheren Gedankengange (formell) aufgehoben wäre.

Eine andere Relation fliesst aus 9), sofern die den Factor z^{2n+1} enthaltenden Glieder vereinigt werden. Man gewinnt dann die Beziehung:

11)

$$\frac{B_n}{2n!} - \frac{1}{2n-2!} \cdot \frac{1}{3!} B_{n-1} + \frac{1}{2n-4!} \cdot \frac{1}{5!} B_{n-2} - \ldots.$$

$$- (-1)^{n-1} . \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2n-3!} B_2 + (-1)^{n-1} . \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{2n-1!} B_1$$

$$+ (-1)^n . \frac{2n-1}{1.2.2n+1!} = 0,$$

eine Relation, welche Herr Professor Grunert in den Supplementen zu Klügel's mathematischem Wörterbuche seinen Betrachtungen über Bernoulli'sche Zahlen zu Grunde legt. Dieser Gleichung können wir eine andere Form geben, indem wir dieselbe mit $2n+1!$ multipliciren; wir erhalten so:

11a)

$$(2n+1) B_n - \frac{2n+1 \ldots 2n-1}{1.2.3} B_{n-1} + \frac{2n+1 \ldots 2n-3}{1.2.3.4.5} B_{n-2} - \ldots.$$

$$+ (-1)^{n-1} . \frac{2n+1.2n}{1.2} B_1 + (-1)^n . \frac{2n-1}{1.2} = 0.$$

Aus dieser nach Moivre benannten Formel und der Gleichung

$$(2n+1) f^{2n}(0) + \ldots. - \frac{2n-1}{1.2} = 0$$

hat Herr Professor Stern die in I. aufgestellte Beziehung gleichfalls abgeleitet *).

*) Zur Theorie der Euler'schen Integrale. S. 7.

Ersetzt man in der Gleichung $f(z)=\frac{e^z+1}{2}f(2z)$ die Function $f(z)$ durch $e^{-z}.f(-z)$ und entwickelt nun die verschiedenen Functionen von z in Reihen, so erhält man zwei neue Relationen, nämlich:

12)

$$\frac{2^{2n}-1}{1....2n}B_n-\frac{2^{2n-3}+1}{2n-2!}\frac{B_{n-1}}{1.2}+\frac{2^{2n-5}+1}{2n-4!}\frac{B_{n-2}}{1.2.3.4}-....+(-1)^n.\frac{4n-3}{2.2n!}=0$$

als Coefficienten von z^{2n}, und

13)

$$\frac{2^{2n-1}+1}{2n!}B_n-\frac{2^{2n-3}+1}{2n-2!}\frac{B_{n-1}}{1.2.3}+\frac{2^{2n-5}+1}{2n-4!}\frac{B_{n-2}}{5!}$$
$$-....+(-1)^n\cdot\frac{2n-\frac{1}{2}}{1.2.3....2n+1}=0$$

aus den Factoren von z^{2n+1}.

Ein Blick auf beide Relationen zeigt jedoch, dass sie respective aus den Formeln 8) und 10) und 5) und 11) ebenfalls resultiren.

Unterwirft man ferner die Gleichung

$$e^{-z}f(z)=\frac{e^{-z}+1}{2}f(2z)$$

einer ähnlichen Behandlung, so entspringen aus den Gliedern mit z^{2n} und z^{2n+1} die beiden Beziehungen:

14)

$$(2^{2n}-1)B_n-\frac{2n.2n-1}{1.2}(2^{2n-2}-2)B_{n-1}+\frac{2n....2n-3}{1.2.3.4}(2^{2n-4}-1)B_{n-2}$$
$$-....+(-1)^n.\tfrac{1}{2}=0$$

und

15)

$$(2^{2n-1}-1)B_n-\frac{2n.2n-1}{1.2.3}(2^{2n-2}-1)B_{n-1}+\frac{2n....2n-3}{1.2.3.4.5}(2^{2n-4}-1)B_{n-2}$$
$$-....+(-1)^n\cdot\frac{1}{2.2n+1}=0.$$

Auch diese Ausdrücke ergeben sich aus den vorhin genannten Ausdrücken *).

Zwei andere Relationen, die aus den Gleichungen 8) und 10) auf dem Wege der Addition oder Subtraction entspringen, sind:

16)

$$2(2^{2n}-1)B_n - \frac{2n.2n-1}{1.2}(2^{2n-2}-1)B_{n-1} + \ldots + (-1)^n.n = 0$$

und

17)

$$2(2^{2n}-1)B_n - \frac{2n.2n-1}{1.2}(2^{2n-2}+1)B_{n-1} \ldots + (-1)^n(3n-2) = 0.$$

Durch Vertauschung von z in $2z$ geht die früher betrachtete Gleichung

$$f(-z) = e^z f(z) \quad \text{über in:} \quad (e^z+1)f(-2z) = 2e^{2z}f(z).$$

Aus dieser Gleichung aber folgert man auf bekannte Weise, je nachdem man die Coefficienten von z^{2n} oder z^{2n+1} zusammenstellt, die Relationen:

18)

$$(2^{2n}-1)B_n - \frac{2n.2n-1}{1.2}2^2(2^{2n-5}-1)B^{n-1} + \frac{2n\ldots2n-3}{1.2.3.4}2^4(2^{2n-9}-1)B_{n-2}$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1}.\frac{2n.2n-1}{1.2}2^{2n-2}(2^{3-2n}-1)B_1$$

$$= (-1)^n.\{2^{2n-1}(n-2) + n + \tfrac{1}{2}\}$$

und

19)

$$2(2^{2n-2}-1)B_n - \frac{2n.2n-1}{1\ldots.3}2^3(2^{2n-6}-1)B_{n-1}$$

$$+ \frac{2n\ldots.2n-3}{1.2.3.4.5}2^5(2^{2n-10}-1)B_{n-2}$$

$$- \ldots = (-1)^n\left\{\frac{1}{2n+1}[\tfrac{1}{2} - 2^{2n+1}] + \tfrac{1}{2}[1+2^{2n}]\right\}.$$

---

*) Dass man die Formeln 12) und 13) auch aus den Entwicklungen der Gleichung

$$e^z f(z) = \frac{e^{-z}+1}{2}f(-2z)$$

und die Relationen 14) und 15) aus den entsprechenden Reihen der vier Functionen von z in

$$e^z f(-z) = \frac{e^z+1}{2}f(-2z)$$

wird erzielen können, ergiebt sich sofort. Eine ähnliche Bemerkung ist natürlich auch auf die übrigen Gleichungen auszudehnen.

Geht man ferner von der Gleichung

$$(e^{2z}+1)f(z)=\frac{e^z+1}{2}[f(2z)+f(-2z)]$$

aus, so führen die Coefficienten von z^{2n} zu der Formel:

20)

$$\frac{2^{2n}-1}{2n!}B_n-2\frac{2^{2n-4}-1}{2n-2!}\frac{B_{n-1}}{1.2}+2^3\cdot\frac{2^{2n-3}-1}{2n-4!}\frac{B_{n-2}}{4!}-\ldots.$$
$$+\ldots.=(-1)^n\cdot\frac{2^{2n-1}(n-2)+1}{2.1.2.3\ldots.2n}.$$

Die Coefficienten von z^{2n+1} hingegen liefern die Relation:

21)

$$\frac{2^{2n-1}-1}{2n!}B_n-2^2\frac{2^{2n-5}-1}{2n-2!}\frac{B_{n-1}}{3!}+2^4\frac{2^{2n-9}-1}{2n-4!}\frac{B_{n-2}}{5!}-\ldots.$$
$$=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{2n-1}(3-2n)-1}{1.2.1.2\ldots.2n+1}.$$

Auf ähnliche Weise entspringt aus den Factoren von z^{2n+2} (oder z^{2n}, sofern nach vollzogener Operation n in $n+1$ umgesetzt wird) der Gleichung

$$(e^{2z}-1)f(z)=\frac{e^z+1}{2}[f(-2z)-f(2z)]$$

die Beziehung:

22)

$$\frac{B_n}{2n!}-2^2\frac{B_{n-1}}{2n-2!}\cdot\frac{1}{3.4}+2^4\frac{B_{n-2}}{2n-4!}\cdot\frac{1}{3.4.5.6}-\ldots.$$
$$=(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}(n-1)+n+1}{1.2.3.4\ldots.2n+2}$$

oder auch:

$$B_n-2^2\frac{2n.2n-1}{3.4}B_{n-1}+2^4\frac{2n\ldots.2n-3}{3.4.5.6}B_{n-2}-\ldots.$$
$$=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+1+2^{2n}(n-1)}{2n+1.2n+2}.$$

Und die Coefficienten von z^{2n+1} geben:

23)

$$B_n-2^2\frac{2n.2n-1}{1.2.3}B_{n-1}+2^4\frac{2n\ldots.2n-3}{1.2.3.4.5}B_{n-2}-\ldots.$$
$$=(-1)^{n+1}.(2^{2n-2}-\frac{2^{2n}}{2n+1}+\tfrac{1}{2}).$$

Schon bei einer nur oberflächlichen Betrachtung erkennt man, dass Gleichung 20) durch Addition der Gleichungen 8) und 18) und die Relation 22) durch Subtraction der genannten Gleichungen entsteht. Ebenso sagt die Formel 23) offenbar mit andern Worten, dass sie auf dem Wege der Subtraction aus den Relationen 5) und 19) sich ergiebt.

Addirt man ferner zu Gleichung 22) Gleichung 10), so folgt:

24)

$$B_n - (2^2+1)\cdot\frac{2n.2n-1}{2.3.4}B_{n-1} + (2^4+1)\frac{2n....2n-3}{2....6}B_{n-2} - .... = (-1)^{n+1}.\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+2} + \frac{n+2^{2n}(n-1)}{2n+1.2n+2}\right).$$

Andererseits gewinnen wir durch Subtraction beider Gleichungen und nachherige Vertauschung von n mit $n+1$:

25)

$$(2^2-1)B_n - (2^4-1)\frac{2n.2n-1}{5.6}B_{n-1} + (2^6-1)\frac{2n....2n-3}{5.6.7.8}B_{n-2} - .... = (-1)^{n+1}.\frac{3.4.n(2^{2n+2}-1)}{2n+1.2n+2.2n+3.2n+4}.$$

Eine ähnliche Relation fliesst aus den Factoren von z^{2n+1} der Gleichung

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} f(-z) = \frac{e^{2z}-1}{2} f(z),$$

nämlich:

26)

$$\frac{2^2-1}{2n!}\frac{B_n}{2.3} - \frac{2^4-1}{2n-2!}\frac{B_{n-1}}{2....5} + \frac{2^6-1}{2n-4!}\frac{B_{n-2}}{2....7} - .... = (-1)^{n+1}\frac{1+2^{2n}(2n-1)}{2.3.4....2n+3}.$$

Die Zusammenstellung der mit z^{2n} multiplicirten Glieder würde wieder zu der Formel 22) führen.

Behandelt man die aus der analytischen Trigonometrie bekannten Entwicklungen von $\cos z$ auf dieselbe Weise wie $\frac{\sin z}{z}$, so kommt man, wie Herr Professor Stern gezeigt hat *), zu der Relation:

*) Crelle's Journal etc. Bd. 26. S 88. ff.

27)

$$2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n - \frac{2n.2n-1}{1.2}2^{2n-3}(2^{2n-2}-1)B_{n-1}$$

$$+\frac{2n....2n-3}{1.2.3.4}2^{2n-5}(2^{2n-4}-1)B_{n-2}-....$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{2n.2n-1}{1.2}2(2^2-1)B_n+(-1)^n.n=0.$$

Nach der von uns befolgten Methode dürfte die Rechnung so stehen. Da bekanntermaassen die Entwicklungen von $\frac{e^z+e^{-z}}{2}$ bis auf die Vorzeichen der einzelnen Glieder mit den entsprechenden Entwicklungen von $\cos z$ übereinstimmen, so wird auch hier unser Augenmerk darauf gerichtet sein, aus $\frac{e^z+e^{-z}}{2}$ eine solche Form zu erzielen, die als nothwendige Folge Gleichung 27) in sich schliesst. Nun aber führt $\frac{e^z+e^{-z}}{2}$ leicht auf die Gleichung

$$\frac{e^{-z}}{2}f(2z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2}.\tfrac{1}{2}f(4z);$$

mithin wird nach dem Taylor'schen Satze:

$$[\tfrac{1}{2}-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2.1.2}-\frac{z^3}{2.3!}+....-\frac{z^{2n-1}}{2.2n-1!}+\frac{z^{2n}}{2.2n!}-....]$$

$$\times[1-z+\frac{2^2z^2}{1.2}f^2(0)+....+\frac{2^{2n}z^{2n}}{2n!}f^{2n}(0)+....]$$

$$=[\tfrac{1}{2}+\frac{z^2}{2.1.2}+\frac{z^4}{2.4!}+....+\frac{z^{2n}}{2.2n!}+....][1-2z+\frac{2^2(2z)^2}{1.2}f^2(0)+....$$

$$....+\frac{2^{2n}(2z)^{2n}}{2n!}f^{2n}(0)+....].$$

Hieraus aber folgt durch Verbindung der Coefficienten von z^{2n} die Relation:

$$\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{1.2.3....2n}f^{2n}(0)+\frac{2^{2n-3}(2^{2n-2}-1)}{1.2.3....2n-2}\frac{f^{2n-2}(0)}{1.2}$$

$$+\frac{2^{2n-5}(2^{2n-4}-1)}{1.2.3....2n-4}\frac{f^{2n-4}(0)}{1....4}+....+\frac{2(2^2-1)}{1.2.2n-2!}f^2(0)-\frac{1}{2.2n-1!}=0,$$

d. g. mit Rücksicht auf Gleichung 1. und durch Multiplication mit $2n!$ die Beziehung 27).

Dem Früheren analog könnte man jetzt die Coefficienten von z^{2n+1} zusammenstellen. Wir unterlassen jedoch diese Operation, weil sie wieder auf Gleichung 5) zurückführt.

Substituirt man in der Gleichung

$$f(z) = \frac{e^z + 1}{2} f(2z)$$

für e^z den Werth $\frac{z + f(z)}{f(z)}$, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction die von Stern angeführte Gleichung:

$$zf(2z) = 2(fz)^2 - 2f(z).f(2z)\ ^*).$$

Und hieraus folgert man nach geschehener Entwicklung der Functionen in Reihen durch Vereinigung der mit z^{2n} behafteten Glieder die Relation:

28)

$$(2^{2n}-1)B_n = \frac{2n.2n-1}{1.2}(2^{2n-2}-1)B_{n-1}.B_1 + \frac{2n...2n-3}{1.2.3.4}(2^{2n-4}-1)B_{n-2}.B_2$$

$$+ .... + \frac{2n.2n-1}{1.2}(2^2-1)B_1.B_{n-1}.$$

Auch hier giebt die Zusammenstellung der Coefficienten von z^{2n+1} nichts Neues.

Was die von Euler §. 123. seiner Differentialrechnung gegebene Relation betrifft, so erkennt man leicht, dass sie nach der hier befolgten Methode aus verschiedenen Gleichungen abgeleitet werden kann. Wir wollen die Gleichung

$$f(z) = 1 - \frac{z}{1.2} + \frac{z^2}{1.2} f^2(0) + ... + \frac{z^{2n}}{1....2n} f^{2n}(0) + ...$$

wählen. Unterwerfen wir diese der Differentiation, so entspringt:

$$-\frac{1}{1.2} + \frac{2z}{1.2} f^2(0) + \frac{4z^3}{1....4} f^4(0) + ... + 2n\frac{z^{2n-1}}{2n!} f^{2n}(0) + ...$$

$$= \frac{1}{z} f(z) - \tfrac{1}{2} f(-z).f(z).$$

---

*) Zur Theorie der Euler'schen Integrale. S. 35.

Und werden jetzt die Glieder mit z^{2n-1} verbunden, so folgt weiter:

29)

$$(2n+1)f^{2n}(0) = -\left[\frac{2n.2n-1}{1.2}f^{2n-2}(0)f^{2}(0) + \frac{2n...2n-3}{1....4}f^{2n-4}(0).f^{4}(0)\right.$$
$$+ .... + \frac{2n.2n-1....5}{1....2n-4}f^{4}(0).f^{2n-4}(0)$$
$$\left. + \frac{2n....3}{1....2n-2}f^{2}(0).f^{2n-2}(0)\right].$$

Dies aber ist die verallgemeinerte Euler'sche Relation. Setzt man $n=1$, so wird die vorstehende Formel nicht anwendbar sein, weil sie das für diesen Fall Statt findende Glied

$$-\frac{1}{z}\cdot\frac{-z^2}{(1.2)^2} = \frac{3z}{1.2}f^{2}(0)$$

nicht in sich begreift. Alsdann nämlich hat man diese Gleichung:

$$\frac{2z}{1.2}f^{2}(0) = \frac{z}{1.2}f^{2}(0) - \frac{1}{z}\left[\frac{z^2}{1.2}f^{2}(0) - \frac{z^2}{(1.2)^2} + \frac{z^2}{1.2}f^{2}(0)\right],$$

$$\frac{2+1}{1.2}f^{2}(0) = \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2},$$

d. h.

$$3B_1 = \frac{2.1}{1.2}\cdot\frac{1}{2}.$$

Um endlich die von Herrn Professor Drobisch in seinen „Observationes analyticae, observ. II." mitgetheilte Formel zu erhalten, differentiiren wir die Gleichung:

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{f(z)}{z}.$$

Dadurch gewinnen wir:

$$-\frac{1}{e^z-1}\cdot\frac{f(-z)}{z} = \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{f(z)}{z} = Df(z),$$

d. h.

$$-\left[\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+....\right]\left[-\frac{1}{z^2}+\frac{f^{2}(0)}{1.2}+....+\frac{2n-1}{2n!}z^{2n-2}f^{2n}(0)+\text{etc.}\right]$$
$$= \frac{1}{z}+\frac{1}{1.2}+\frac{z}{1.2}f^{2}(0)+....+\frac{z^{2n-1}}{1....2n}f^{2n}(0)+....$$

Werden nun die Glieder mit z^{2n} vereinigt, so kommt schliesslich:

30)

$$B_n = \frac{1}{2n-1}\left[\frac{2n.2n-1}{3.4}(2n-3)B_{n-1} - \frac{2n....2n-3}{3.4.5.6}(2n-5)B_{n-2} + ... + (-1)^n B_1 + (-1)^{n+1}\frac{1.2}{2n+1.2n+2}\right],$$

welches die von Drobisch gegebene Relation ist.

Eine ähnliche Relation erhalten wir noch aus der angewendeten Gleichung durch Zusammenstellung der mit z^{2n-1} multiplicirten Glieder, nämlich:

31)

$$B_n = \frac{1}{2n.2n+1}\left[\frac{2n+1.2n.2n-1}{1.2.3}(2n-3)B_{n-1} - \frac{2n+1..2n-3}{1.2.3.4.5}(2n-5)B_{n-2} + ...+(-1)^n.\frac{2n+1.2n}{1.2}B_1 + (-1)^{n+1}.1\right].$$

Ausser diesen Formeln könnten wir nun noch mehrere andere aufzustellen suchen. Wir wollen indessen unsere Betrachtungen hier abbrechen; denn einerseits dürfte es von keinem grossen Belang sein, zu den in manchen Fällen gerade nicht durch grosse Einfachheit sich auszeichnenden Relationen neue hinzuzufügen; andererseits aber glauben wir, schon durch die vorliegenden Entwicklungen den Vorzug der Stern'schen Methode vor jeder andern zur Genüge dargethan zu haben. Wir wollen daher anderen Untersuchungen uns jetzt zuwenden, vorher aber noch erwähnen, dass die Formeln 16), 17), 23), 24) ebenfalls von Stern gefunden wurden. Gleichung 8) dagegen hat schon Herr Göpel im dritten Bande S. 66. dieser Zeitschrift als Supplementar-Formel zu der von Herrn Professor Grunert entwickelten Relation 5) angegeben. Endlich hat Herr Professor Schlömilch die Relationen 10), 11), 14), 15) mit Hülfe bestimmter Integrale bewiesen *); nur stellt Schlömilch die angeführten Gleichungen unter anderer Gestalt dar, in welche jedoch die von uns gewählte Schreibweise mit der grössten Leichtigkeit sich übertragen lässt.

II. Zur independenten Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen.

§. 3.

Wie schon aus dem Vorstehenden erhellt, so leistet die Theorie

*) Archiv. Thl. III. Abhandl. IV. S. 14. ff.

der Logarithmen bei Betrachtungen über Bernoulli'sche Zahlen oft sehr wesentliche Dienste. Die Erwägung dieser Thatsache, namentlich aber der Hinblick auf die zwischen den früher durch $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ bezeichneten Coefficienten Statt findende Recursionsformel:

$$1) \qquad nA_n = na_n + (n-1)a_{n-1}A_1 + \ldots + a_1 A_{n-1}$$

dürfte zu der Vermuthung hinführen, ob nicht auch hier, bei der Ermittelung unabhängiger Ausdrücke für die Bernoulli'schen Zahlen, eine ähnliche Hülfe von der Theorie der Logarithmen zu erwarten stände. Und in der That, hat man

$$2) \quad \log(1 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots) = a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_n u^n + \ldots,$$

so bestimmt sich der Coefficient a_n durch die Formel:

$$3) \qquad a_n = \sum_{1,n}^{h} (-1)^{h-1} \frac{1}{h} p^n C'^h,$$

wo $p^n C'^h$ die Combinationen mit Wiederholungen der Klasse h zur Summe n aus den Grössen (Elementen) $A_1, A_2, \ldots A_n \ldots$, jede Gruppe mit der entsprechenden Permutationszahl multiplicirt, ausdrückt. Stellt somit irgend eine der in dem Vorhergehenden aufgefundenen Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen einen Ausdruck von der Form der obigen Recursionsformel dar, so kann man offenbar eine derartige Relation aus einer mit 2) analogen Gleichung entstanden denken *). Dann aber würde — wie sogleich erhellt — in 3) ein Mittel zur independenten Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen geboten. Prüfen wir daher in dieser Hinsicht die früher entwickelten Gleichungen, so folgt zunächst aus der Beziehung 5) §. 1. wegen

$$A_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1!}, \quad a_n = -\frac{1}{n} \frac{2^{2n-1} B_n}{1.2.3.\ldots.2n};$$

*) Bekanntlich setzt die Bildung der Formel 1) aus 2) voraus, dass 2) zu den convergirenden, stetigen Functionen gehöre. Um daher jedem Einwande zu entgehen, der in Bezug auf Strenge der obigen Ansicht etwa gemacht werden könnte, muss nachgewiesen werden, dass die in Anwendung kommenden Reihen

$1 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots$ eine Summe $= e^{log(1 + A_1 u + A_2 u^2 + etc.)}$

besitzen. Ohne Mühe aber erkennt man die Convergenz dieser Reihen. Und ebenso leicht ersieht man bei etwaigem Zweifel mit Hülfe von 1), dass wirklich die a durch die angeführten Grössen ersetzt werden.

32)

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{2n-1}}{2n!}B_n=\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{3!},\ \frac{1}{5!},\ -\frac{1}{7!},\ \ldots.\right].$$

Weil ferner nach Gleichung 10) die Relation gilt:

$$(-1)^n\cdot\frac{2n}{2.3\ldots.2n+2}=-\frac{B_n}{2n!}+\frac{B_{n-1}}{2n-2!}\cdot\frac{1}{3.4}-\ldots.,$$

also

$$A_n=(-1)^n\frac{1}{3.4\ldots.2n+2},\quad a_n=-\frac{1}{n}\cdot\frac{B_n}{2.3\ldots.2n}$$

ist, so ergiebt sich:

33)

$$\frac{1}{n}\frac{B_n}{2n!}=\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{3.4},\ \frac{1}{3\ldots.6},\ -\frac{1}{3\ldots.8},\ldots.\right]$$

$$=\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2},\ \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{3},\ -\frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{4},\ldots.\right].$$

Eine andere unabhängige Bildungsformel findet sich aus Gleichung 16), nämlich:

34)

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{2n}-1}{1\ldots.2n}B_n=\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!},\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4!},\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6!},\ \ldots.\right],$$

da die Beziehungen gelten:

$$A_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n!},\quad a_n=-\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{2n}-1}{2n!}B_n.$$

Und ein Blick auf 27) zeigt, dass

$$A_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{2n!},\quad a_n=-\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{1.2.3\ldots.2n};$$

folglich

35)

$$\frac{1}{n}\cdot 2^{2n-1}\frac{2^{2n}-1}{2n!}B_n=\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{2!},\ \frac{1}{4!},\ -\frac{1}{6!},\ldots.\right]$$

ist.

Endlich schliesst sich an Gleichung 26), diese in der Form

$$-\frac{2B_n}{2n!}+\frac{(2^4-1)2B_{n-1}}{2n-2!}\cdot\frac{1}{3.5.6}-\frac{(2^6-1)2B_{n-2}}{2n-4!}\cdot\frac{1}{3.5\ldots.8}+\text{etc.}$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{4n(2^{2n+2}-1)}{3.4.5\ldots.2n+4}=(-1)^n\cdot\frac{n.(2^{2n+2}-1)}{3.5.6\ldots.2n+4}$$

betrachtet, die unabhängige Bildungsformel:

36)

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2B_n}{2n!}=\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{2^4-1}{3.5.6},\ +\frac{2^6-1}{3.5.6....8},\ -\frac{2^8-1}{3.5.6.7....10},\cdots\right]$$

§. 4.

Combinatorische Resultate.

Bei einer nur flüchtigen Betrachtung lassen schon die eben erwähnten combinatorischen Formeln noch einige interessante Resultate erkennen. So findet sich sogleich durch Vergleichung der Gleichungen 32) und 33):

37)

$$2^{2n-1}=\frac{\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{3!},\frac{1}{5!},\cdots\right]}{\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3!},\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5!},\cdots\right]}.$$

Aus 34) und 35) dagegen entspringt:

38)

$$2^{2n-1}=\frac{\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{2!},\frac{1}{4!},-\frac{1}{6!},\cdots\right]}{\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!},\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4!},-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6!},\cdots\right]}.$$

Und werden 32) und 35) mit einander verglichen, so folgt die von Stern mitgetheilte Formel *):

39)

$$2^{2n}-1=\frac{\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{2!},\frac{1}{4!},-\frac{1}{6!},\cdots\right]}{\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{3!},\frac{1}{5!},-\frac{1}{7!},\cdots\right]}.$$

Hingegen geben 33) und 34) den Satz:

40)

$$2^{2n}-1=\frac{\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!},\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4!},-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6!},\cdots\right]}{\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}p^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3!},\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5!},-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7!},\cdots\right]}.$$

*) Crelle's Journal Bd. 26. S. 88 ff.

Setzt man ferner die Ausdrücke in 37) und 38) oder in 39) und 40) einander gleich, so gewinnt man die neue Beziehung:

41)

$$\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}\mathfrak{p}^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{3!},\ \frac{1}{5!},\ldots.\right]\cdot\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}\mathfrak{p}^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!},\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4!},\ldots.\right]$$
$$=\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}\mathfrak{p}^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{2!},\ \frac{1}{4!},\ldots.\right]\cdot\sum_{1,n}^{h}(-1)^h\cdot\frac{1}{h}\mathfrak{p}^n\overset{h}{C}'\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3!},\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5!},\ldots.\right].$$

Anmerkung.

Aus den vorstehenden Bemerkungen dürfte man noch den Schluss ziehen, dass die Theorie der Logarithmen, so vorzügliche Mittel sie auch bei der Behandlung der Bernoulli'schen Zahlen darbietet, doch nicht zur Herleitung sämmtlicher Recursionsformeln zwischen diesen Zahlen geeignet scheint.

§. 5.

III. Analogie in der recurrenten Entwicklung der Bernoulli'schen Zahlen und der Secanten-Coefficienten.

In dem Umstande, dass die beiden Functionen $\frac{\sin x}{x}$ und $\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$ in ihren Entwicklungen in unendliche Reihen und Producte nur durch das Vorzeichen der einzelnen Glieder sich unterscheiden, erblickten wir den Grund für das Erscheinen der Relation 5) aus $l\frac{\sin x}{x}$ und $f(x)=\frac{e^x+1}{2}f(2x)$. Und hieraus schlossen wir dann das Statthaben der so wichtigen Beziehung I. Aus ähnlichem Grunde gelang es uns ferner, die von Stern aus $l\cos x$ gefundene Relation 27) mit Hülfe der Gleichung l. zu beweisen. Da nun

$$\frac{1}{\cos x}=\sec x=1+\frac{b_1}{1.2}x^2+\frac{b_2}{4!}x^4+\text{etc.},$$

wo die Coefficienten b_1, b_2,...., die sogenannten Secanten-Coefficienten, bekanntlich den Gleichungen genügen:

42)

$$b_0=1,$$
$$b_1=\frac{2.2-1}{1.2}b_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$b_n=\frac{2n.2n-1}{1.2}b_{n-1}-\frac{2n....2n-3}{1....4}b_{n-2}+....+(-1)^{n+1}.\frac{2n.2n-1....1}{1.2.3....2n}b_0;$$

so dürfte die Vermuthung sehr nahe liegen, dass auch hier eine ähnliche Gleichung, wie bei den Bernoulli'schen Zahlen

$$f^{2n}(0) = (-1)^{n-1} . B_n$$

darstellt, Statt findet. Und in der That, bezeichnen wir $\frac{2}{e^x + e^{-x}}$ mit $\varphi(x)$, so erhellt augenblicklich, dass $\varphi(x)$ für den Zahlenwerth $x < \frac{\pi}{2}$ mit $1 + \frac{\varphi^2 0}{1.2} x^2 + \frac{\varphi^4(0)}{1....4} x^4 +$ etc. gleichbedeutend ist. Andererseits aber hat man

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1...4} + \frac{x^6}{6!} + ...},$$

daher

$$1 = [1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...][1 + \frac{x^2}{1.2}\varphi^2(0) + \frac{x^4}{1.2.3.4}\varphi^4(0) + ...].$$

Aus dieser Gleichung aber folgert man nach bekannten Principien die neue:

$$\frac{\varphi^{2n}(0)}{2n!} + \frac{\varphi^{2n-2}(0)}{2n-2!} \cdot \frac{1}{1.2} + \frac{\varphi^{2n-4}(0)}{2n-4!} \cdot \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{2n!} = 0,$$

d. h.

43)

$$\varphi^{2n}(0) + \frac{2n.2n-1}{1.2}\varphi^{2n-2}(0) + \frac{2n....2n-3}{1.2.3.4}\varphi^{2n-4}(0) + \frac{2n...2n-5}{1.2.3.4.5.6}\varphi^{2n-6}(0)$$
$$+ .... + \frac{2n.2n-1....1}{1.2.3....2n} = 0.$$

Und diese Gleichung, verglichen mit der Relation 42), zeigt, dass allgemein

II. $$\varphi^{2n}(0) = (-1)^n . b_n$$

ist, eine Gleichung, die man unmittelbar durch Einführung imaginärer Argumente in

$$\sec x = 1 + \frac{b_1}{1.2} x^2 + \frac{b_2}{1.2.3.4} x^4 + ...$$

würde erzielt haben.

§. 6.

Fortsetzung.

Die so eben aufgefundene Beziehung bildet fast überall das

Analogon zu Gleichung I. §. 1. Zur Rechtfertigung dieser Behauptung wollen wir die von Herrn Professor Scherk gegebenen Formeln 2)—7) seiner mathematischen Abhandlungen mit Hülfe des obigen Ausdruckes zu beweisen suchen. Dabei werden wir Gleichungen erhalten, die in dem einen Falle zur Kenntniss der Secanten-Coefficienten führen, in dem andern nur Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen liefern.

Gehen wir zunächst von der Gleichung

$$e^x = \frac{e^{2x}+1}{2}\,\varphi(x)$$

aus, so kommt:

$$1+x+\frac{x^2}{1.2}+\ldots.+\frac{x^{2n-1}}{2n-1!}+\frac{x^{2n}}{2n!}+\text{etc.}$$

$$=\left[1+x+\frac{2x^2}{1.2}+\ldots.+\frac{2^{2n-2}}{2n-1!}x^{2n-1}+\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{2n!}+\ldots.\right]$$

$$\times\left[1+\frac{x^2}{1.2}\varphi^2(0)+\ldots.+\frac{x^{2n}}{2n!}\varphi^{2n}(0)+\ldots.\right].$$

Und stellt man jetzt die Glieder mit x^{2n} zusammen, so entspringt:

44)

$$\varphi^{2n}(0)+\frac{2n.2n-1}{1.2}2\varphi^{2n-2}(0)+\frac{2n\ldots.2n-3}{1\ldots.4}2^3\varphi^{2n-4}(0)+\ldots.$$

$$+\frac{2n.2n-1}{1.2}2^{2n-3}\varphi^2(0)+(2^{2n-1}-1)=0,$$

d. h.

$$b_n-\frac{2n.2n-1}{1.2}2b_{n-1}+\frac{2n\ldots.2n-3}{1.2.3.4}2^3b_{n-2}-\ldots.$$

$$-(-1)^n.\frac{2n.2n-1}{1.2}2^{2n-3}b_1+(-1)^n.(2^{2n-1}-1)=0.$$

Die Coefficienten von x^{2n+1} dagegen liefern die Relation:

45)

$$(2n+1)b_n-\frac{2n+1\ldots.2n-1}{1.2.3}2^2b_{n-1}+\frac{2n+1\ldots.2n-3}{1.2.3.4.5}2^4b_{n-2}$$

$$-\ldots.+(-1)^{n-1}\frac{2n+1.2n}{1.2}2^{2n-2}b_1+(-1)^n(2^{2n}-1)=0.$$

Behandelt man auf gleiche Weise die Gleichung

$$\varphi(x)=\frac{e^x}{x}[f(2x)-f(4x)],$$

so erhält man aus den mit x^{2n} multiplicirten Gliedern die Formel:

46)

$$-(2n+1)\varphi^{2n}(0)=\frac{2n+1}{1}2^{2n}(2^{2n}-1)f^{2n}(0)$$

$$+\frac{2n+1....2n-1}{1.2.3}2^{2n-2}(2^{2n-2}-1)f^{2n-2}(0)$$

$$+\frac{2n+1....2n-3}{1.2.3.4.5}2^{2n-4}(2^{2n-4}-1)f^{2n-4}(0)+....+\frac{2n+1.2n}{1.2}2^2(2^2-1)f^2(0)$$

$$-(2n+1),$$

d. h. die zweite der von Scherk entwickelten Gleichungen. Man kann derselben auch folgende Form geben:

$$\frac{2^2(2^2-1)}{2}\frac{2n}{1}f^2(0)+\frac{2n....2n-2}{1.2.3}\frac{2^4(2^4-1)}{4}f^4(0)+...$$

$$+\frac{2n....2}{1....2n-1}\cdot\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}f^{2n}(0)+1=-\varphi^{2n}(0),$$

in welcher Form diese Gleichung von Schlömilch S. 17. dieses Archivs (Bd. 3.) mittelst bestimmter Integrale bewiesen wurde.

Die Factoren von x^{2n-1} würden wieder zu der Relation 27) führen.

Nimmt man andererseits die Gleichung

$$-xe^{-x}\varphi(x)=f(4x)-f(2x)$$

und entwickelt jede der Functionen nach aufsteigenden Potenzen von x, so gewinnt man aus den Coefficienten von x^{2n} die Beziehung:

47)

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_n=\frac{2n-1}{1}b_{n-1}-\frac{2n-1....2n-3}{1.2.3}b_{n-2}+\frac{2n-1....2n-5}{1.2.3.4.5}b_{n-3}$$

$$-....+(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n-1....1}{1....2n-1},$$

welches die von Scherk gefundene Relation 4) ist. Auch diese Gleichung hat Schlömilch mittelst bestimmter Integrale bewiesen. Man sehe dieses Archiv. Bd. I. S. 363.

Aus den Gliedern mit x^{2n+1} folgt wieder Gleichung 43), d. h. 42) oder Gleichung 1) bei Scherk. Dieselbe Relation würde aus den Factoren von x^{2n+1} der Gleichung

$$xe^{-x}\varphi(x) = \frac{e^{2x}-1}{2} f(4x)$$

entspringen. Und die Coefficienten von x^{2n} dieser Beziehung würden auf Gleichung 47) führen. Hier hätte man sich der Recursionsformel 8) §. 2., dort der Gleichung 5) §. 1. zu erinnern.

Die dritte der von Scherk mitgetheilten Gleichungen findet sich aus der Gleichung

$$f(2x).\varphi(x) = e^x.f(4x)$$

und der Relation 7) §. 1. Man erhält bei bekannter Behandlung der vorliegenden Gleichung aus den Factoren von x^{2n+1} die Beziehung:

$$-(2n+1)\varphi^{2n}(0) = \frac{2n+1}{1} 2^{2n+1}.2^{2n-1} f^{2n}(0)$$
$$+ \frac{2n+1....2n-1}{1.2.3} 2^{2n-1}.2^{2n-3} f^{2n-2}(0)$$
$$+ \frac{2n+1....2n-3}{1....5} 2^{2n-3}.2^{2n-5} f^{2n-4}(0) + ... - (4n+1).$$

Vereinigt man aber hiermit Gleichung 7) §. 1., so kommt:

48)

$$-(2n+1)\varphi^{2n}(0) = \frac{2n+1}{1} 2^{2n+1}(2^{2n-1}-1) f^{2n}(0)$$
$$+ \frac{2n+1....2n-1}{1.2.3} 2^{2n-1}(2^{2n-3}-1) f^{2n+2}(0)$$
$$+ \frac{2n+1....2n-3}{1.2.3.4.5} 2^{2n-3}(2^{2n-5}-1) f^{2n-4}(0) + ... - 1,$$

welches die erwähnte Scherk'sche Gleichung ist.

Diese ergiebt sich mithin aus den mit x^{2n+1} behafteten Gliedern der Gleichung

$$f(2x).\varphi(x) - 4f(x) = \frac{2.e^x}{2} f(4x) - \frac{2^2(e^x+1)}{2} f(2x).$$

Verbindet man ferner die Factoren von x^{2n}, so folgt nach gehöriger Reduction eine neue Relation, welcher man nach Gleichung 27) die Form 49) geben kann:

49)

$$\frac{2(2^{2n}-1)}{2n!} B_n = \frac{b_n}{2n!} - \frac{2^2}{1.2} B_1 \frac{b_{n-1}}{2n-2!} - \frac{2^4 B_2}{4!} \frac{b_{n-2}}{2n-4!} - ....$$
$$.... - \frac{2^{2n-2} B_{n-1}}{2n-2!} \cdot \frac{b_1}{1.2}.$$

Man könnte jetzt $f(4x)$ durch $e^{-4x}f(-4x)$ ersetzen und die dann folgende Gleichung

$$f(2x).\varphi x = e^{-3x}f(-4x)$$

auf bekannte Weise behandeln. Die Factoren von x^{2n} würden schliesslich zu einer noch nicht angeführten Relation zwischen den Bernoulli'schen Zahlen führen. Da jedoch diese Relation sich nicht durch grosse Einfachheit auszeichnet, so unterlassen wir ihre Angabe. Aus gleichem Grunde übergehen wir die Zusammenstellung der mit x^{2n+1} multiplicirten Glieder.

Um Scherk's fünfte Gleichung zu erhalten, bedenken wir Folgendes. Es ist:

$$-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}-1}{2x}[f(4x)-f(2x)];$$

gleichzeitig aber gilt die Beziehung:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{\partial\varphi x}{\partial x} = -\frac{2x}{e^{2x}+1}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x},$$

daher:

$$\frac{e^{2x}-1}{2x}[f(4x)-f(2x)] = \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{\partial\varphi x}{\partial x}.$$

Stellt man nun in bekannter Weise die Glieder mit x^{2n-1} zusammen und berücksichtigt die Gleichung 16), also

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}f^{2n}(0)+\frac{2n-1}{1.2}2^{2n-1}(2^{2n-2}-1)f^{2n-2}(0)+\ldots+\frac{2^{2n-2}.2n}{2n} = 0,$$

so kommt:

50)

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}f^{2n}(0) = \varphi^{2n}(0)+\frac{2n-1.2n-2}{1.2}\varphi^{2n-2}(0)+\ldots+\frac{2n-1\ldots2}{1\ldots2n-2}\varphi^2(0);$$

d. i. die verlangte Gleichung.

Aus den Coefficienten von x^{2n} würde man die Gleichung

51)

$$\frac{2^{2n}-1}{2n!}B_n-\frac{2^{2n-2}-1}{2n-2!}\cdot\frac{1}{1.2.3}B_{n-1}+\frac{2^{2n-4}-1}{2n-4!}\cdot\frac{1}{5!}B_{n-2}-\ldots + (-1)^n.\frac{1}{2}.\frac{1}{2n!} = 0$$

erzielen.

Giebt man der vorhergehenden Gleichung die Form:

$$\frac{f(4x)-f(2x)}{2}\varphi(x)=\tfrac{1}{2}.f(2x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x},$$

so erhält man aus den Coefficienten von x^{2n} die Relation:

52)

$$n\frac{b_n}{2n!}=\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{1.2....2n}B_n+\frac{2^{2n-3}(2^{2n-2}-1)}{1....2n-2}B_{n-1}\frac{b_1}{1.2}$$
$$+\frac{2^{2n-5}(2^{2n-4}-1)}{1....2n-4}B_{n-2}\frac{b_2}{4!}+....+\frac{2(2^2-1)}{1.2}B_1\frac{b_{n-1}}{1....2n-2},$$

eine Gleichung, die von Stern durch Betrachtungen anderer Art gefunden wurde *).

Vereinigt man hingegen die mit x^{2n+1} begabten Glieder, so entsteht:

53)

$$-\frac{\varphi^{2n}(0)}{1.2.2n!}=\frac{n+1}{2n+2!}\varphi^{2n+2}(0)+\frac{n}{2n!}2^2\varphi^{2n}(0)\frac{f^2(0)}{1.2}+...+\frac{2^{2n}f^{2n}(0)}{2n!}\frac{\varphi^2(0)}{1.2},$$

oder nach einigen leichten Reductionen:

$$\frac{b_{n+1}}{2n+1!}=\frac{b_n}{2n!}+\frac{2^2b_n}{2n-1!}\frac{B_1}{1.2}+....+\frac{2^{2n}b_1}{1}\frac{B_n}{2n!}.$$

Aehnliche Relationen gewinnt man aus der früher erwähnten Gleichung

$$\varphi(x)=\frac{e^x}{x}[f(2x)-f(4x)],$$

wenn man diese mit $f(x)$ multiplicirt und e^xfx durch $f(-x)$ ersetzt. Entwickelt man darauf die einzelnen Glieder von

$$f(x).\varphi(x)=\frac{f(-x)}{x}[f(2x)-f(4x)]$$

nach steigenden Potenzen von x, so erhält man die Relationen:

54)

$$-\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{1....2n}f^{2n}(0)=\frac{\varphi^{2n}(0)}{2n!}+\frac{\varphi^{2n-2}(0)}{2n-2!}\frac{f^2(0)}{1.2}$$
$$+\frac{\varphi^{2n-4}(0)}{2n-4!}\frac{f^4(0)}{4!}+....+\frac{f^{2n-2}(0)}{2n-2!}.\frac{\varphi^2(0)}{1.2}$$

oder

$$\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{1.2.3....2n}B_n=\frac{b_n}{2n!}-\frac{b_{n-1}}{2n-2!}\frac{B_1}{1.2}-\frac{b_{n-2}}{2n-4!}\frac{B_2}{4!}-...-\frac{b_1}{1.2}\frac{B_{n-1}}{2n-2!}$$

*) Crelle's Journal. Bd. 26. S. 8.

aus den Coefficienten von x^{2n}, und

55)

$$\frac{\varphi^{2n}(0)}{2n!}\cdot\frac{1}{1.2}=\frac{2^{2n+2}(2^{2n+2}-1)}{2n+2!}f^{2n+2}(0)+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n!}f^{2n}(0)\frac{f^2(0)}{1.2}$$

$$+\frac{2^{2n-2}(2^{2n-2}-1)}{2n-2!}f^{2n-2}(0).\frac{f^4(0)}{4!}+\ldots.+\frac{2^2(2^2-1)}{1.2}f^2(0)\frac{f^{2n}(0)}{2n!}$$

aus den Factoren von x^{2n+1}. Man kann diese Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{b_n}{2n!}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^{2n+2}(2^{2n+2}-1)}{1.2.3\ldots.2n+1}B_{n+1}-\frac{1}{n}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{1\ldots.2n-1}B_n\frac{B_1}{1.2}$$

$$-\ldots.-\frac{2^2(2^2-1)}{1.1}B_1\frac{B_n}{2n!}.$$

An diese Relation schliesst sich Scherk's sechste Gleichung, nämlich:

56)

$$\frac{b_n}{8.2n!}=\frac{(2^{2n-2}+1)(2^2-1)(2^{2n}-1)}{1.2.1.2.3.4\ldots.2n}B_1B_n$$

$$+\frac{2^2(2^{2n-6}+1)(2^4-1)(2^{2n-2}-1)}{1.2.1.2.3.4\ldots.2n-2}B_2B_{n-1}+\text{etc.},$$

welche man aus der Gleichung

$$\varphi(x)=1-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

erzielen wird, wenn man nach 50) $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, $\frac{e^x-1}{e^x+1}$ durch die entsprechenden Reihen ausdrückt und nun die Coefficienten von x^{2n} verbindet.

Um endlich die siebente der Scherk'schen Gleichungen, d. h.:

57)

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_n=2b_{n-1}+\frac{2n-2.2n-3}{1.2}b_1b_{n-2}+\frac{2n-2\ldots2n-5}{1.2.3.4}b_2.b_{n-3}+\ldots.,$$

zu gewinnen, führen wir auch hier in die von Scherk angegebene Quelle imaginäre Argumente ein. Dadurch wird:

$$D.\frac{e^x-e^{-x}}{2}.\varphi(x)=(\varphi x)^2.$$

In dieser Gleichung ersetze man nun die Functionen $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, φx durch die bekannten Reihen, entwickele alsdann die Producte, differentiire darauf und beachte endlich die Relation 47) *)

Anmerkung.

Wenn wir schliesslich einen Blick auf unsere Methode im Vergleich zu der Scherk'schen werfen, so lässt sich gar nicht leugnen, dass diese, weil sie, dem Princip nach, auf der Möglichkeit beruht, die Secante durch Tangenten und Cosecanten und umgekehrt auszudrücken, oft schneller zum Ziele führt. Dadurch aber scheint die Aehnlichkeit der Beweisart dieser Relationen mit den bei den Bernoulli'schen Zahlen üblichen Methoden — im Allgemeinen — verloren zu gehen **). Bei unserem Gedankengange dagegen beruhen die Beweise (im Wesentlichen) auf zwei analogen Gleichungen, auf:

$$f^{2n}(0) = (-1)^{n-1} . B_n$$

und auf

$$\varphi^{2n}(0) = (-1)^n . b_n .$$

Und dann liefern die hier vorkommenden Gleichungen fast durchweg zwei Relationen, was bei der von Scherk gebrauchten Methode nicht der Fall sein dürfte.

---

*) Die letzten Glieder der beiden Gleichungen 56) und 57) sind für ein gerades n und für ein ungerades n respective:

$$\frac{2^{n-2}(2^2+1)(2^n-1)(2^{n+2}-1)}{1.2.3....n.1.2.3....n+2} B_{\frac{n}{2}} . B_{\frac{n}{2}+1} \; ; \quad 2 . \frac{2n-2....n+2.n+1}{1.2.3....n-2} b_{\frac{n}{2}} . b_{\frac{n}{2}-1}$$

(n gerade)

und

$$2^{n-1} \left\{ \frac{2^{n+1}-1}{n+1!} . B_{\frac{n+1}{2}} \right\}^2 \; ; \quad \frac{2n-2....n}{1.2.3....n-2} . b_{\frac{n-1}{2}} . b_{\frac{n-1}{2}}$$

(n ungerade).

**) Ich erinnere z. B. an Klügel's mathematisches Wörterbuch. Suppl. von A—D. Art.: Bernoulli'sche Zahlen.

XXIX.

Integralia quaedam definita.

Auctore

D^re^. *Christiano Fr. Lindman,*

Lect. Strengnesensi.

I.

Tom. XVI. praec. pag. 97. seqq. proposui formulas

(1)

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}(1-x^2)}{1-x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{2n}\left\{\operatorname{Cot}\frac{a\pi}{2n} - \operatorname{Cot}\frac{(a+2)\pi}{2n}\right\}, \quad 2(n-1) > a > 0,$$

(2)

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}(1+x^2)}{1+x^{2(2n+1)}}\,dx = \frac{\pi}{2(2n+1)}\left\{\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{a\pi}{2(2n+1)}} + \frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{(a+2)\pi}{2(2n+1)}}\right\},$$

$$4n > a > 0.$$

Multiplicatione per da facta et integratione intra limites $a=\alpha$, $a=\beta$ suscepta, invenimus

$$\int_0^\infty \frac{(x^{\beta-1}-x^{\alpha-1})(1-x^2)}{1-x^{2n}} \cdot \frac{dx}{lx} = l\,\frac{\operatorname{Sin}\frac{\beta\pi}{2n}\operatorname{Sin}\frac{(\alpha+2)\pi}{2n}}{\operatorname{Sin}\frac{\alpha\pi}{2n}\operatorname{Sin}\frac{(\beta+2)\pi}{2n}}, \quad (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{(x^{\beta-1}-x^{\alpha-1})(1+x^2)}{1+x^{2(2n+1)}} \cdot \frac{dx}{lx} = l\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta\pi}{4(2n+1)}\cdot\operatorname{tg}\frac{(\beta+2)\pi}{4(2n+1)}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{4(2n+1)}\cdot\operatorname{tg}\frac{(\alpha+2)\pi}{4(2n+1)}}, \quad (4)$$

ubi est $\beta > \alpha$ et utraque intra limites, qui antea quantitati a sunt positi.

Si in formula (3) posuerimus $n=2$ atque ideo $2>\beta>\alpha>0$, habebimus

$$\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}-x^{\alpha-1}}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{lx} = l\operatorname{tg}\frac{\beta\pi}{4}\operatorname{Cot}\frac{\alpha\pi}{4}, \qquad (5)$$

unde dissolutione prodit

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}-x^{\alpha-1}-x^{-(\beta-1)}+x^{-(\alpha-1)}}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{lx} = l\operatorname{tg}\frac{\beta\pi}{4}\operatorname{Cot}\frac{\alpha\pi}{4}. \qquad (6)$$

Posita jam $\alpha=1$, invenitur

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}-x^{-(\beta-1)}}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{lx} = l\operatorname{tg}\frac{\beta\pi}{4}, \quad (2>\beta>1), \qquad (7)$$

quod cum formula ab Eulero data consentit.

Quaeri jam potest, num quae integralia formulis (3) et (4) similia, sed intra limites 0 et 1 sumta, reperiri possint. Si igitur

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x^2)}{1-x^{2n}}dx$$

prius tractamus, substituendo x pro x^{2n} formulaque cognita utenda

$$Z'(p) = -C+\int_0^1 \frac{1-x^{p-1}}{1-x}\,dx$$

invenimus

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x^2)}{1-x^{2n}}dx = \frac{1}{2n}\left\{Z'\left(\frac{a+2}{2n}\right)-Z'\left(\frac{a}{2n}\right)\right\}, \quad a>0, \qquad (8)$$

unde, multiplicando per da et integrando intra limites $a=\alpha$, $a=\beta$ prodit

$$\int_0^1 \frac{(x^{\beta-1}-x^{\alpha-1})(1-x^2)}{1-x^{2n}}\cdot\frac{dx}{lx}$$
$$= \frac{1}{2n}\left\{\int_\alpha^\beta da Z'\left(\frac{a+2}{2n}\right)-\int_\alpha^\beta da Z'\left(\frac{a}{2n}\right)\right\}.$$

Quum vero sit

$$\int_\alpha^\beta da Z'\left(\frac{k+a}{q}\right) = ql\frac{\Gamma\left(\frac{k+\beta}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+\alpha}{q}\right)},$$

invenitur

$$\int_0^1 \frac{(x^{\beta-1}-x^{\alpha-1})(1-x^2)}{1-x^{2n}} \cdot \frac{dx}{lx} = l\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+2}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2n}\right)}, \quad (9)$$

unde, posito $n=2$, prodit:

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}-x^{\alpha-1}}{1+x^2} \cdot \frac{dx}{lx} = l\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+2}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{4}\right)}, \quad (10)$$

quae formula itidem invenitur, si in formula

$$\int_0^1 \frac{y^r(1-y^{s-r})}{1+2y\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{n}+y^2} \cdot \frac{dy}{l\frac{1}{y}}$$

$$= \operatorname{Cosec}\frac{m\pi}{n} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} \operatorname{Sin}\frac{m\pi i}{n} l\frac{\Gamma\left(\frac{s+n+i}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{r+i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+n+i}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{s+i}{2n}\right)}$$

a Cel° Malmsten data (Theoremata nova cett. Upsaliae 1842. pag. 8. n°. 11.) ponuntur $m=1$, $n=2$, $s=\beta-1$, $r=\alpha-1$.

Si in integrali

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1+x^2)}{1+x^{2(2n+1)}}dx$$

substituitur $x^{\frac{1}{2n+1}}$ pro x et formula cognita a Legendre data

$$\int_0^1 \frac{y^p dy}{1+y^2} = \tfrac{1}{4}\left\{Z'\left(\frac{p+3}{4}\right) - Z'\left(\frac{p+1}{4}\right)\right\}$$

adhibetur, obtinemus

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1+x^2)}{1+x^{2(2n+1)}}dx = \frac{1}{4(2n+1)}\left\{Z'\left(\frac{a+4n+4}{4(2n+1)}\right) - Z'\left(\frac{a+2}{4(2n+1)}\right)\right.$$
$$\left. + Z'\left(\frac{a+4n+2}{4(2n+1)}\right) - Z'\left(\frac{a}{4(2n+1)}\right)\right\}. \quad (11)$$

Multiplicatione per da et integratione ut in formula (8) invenitur

$$\int_0^1 \frac{(x^{\beta-1}-x^{\alpha-1})(1+x^2)}{1+x^{2(2n+1)}}\cdot\frac{dx}{lx}$$

$$= l\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+4n+4}{4(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{4(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+4n+2}{4(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{4(2n+1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+4n+4}{4(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+2}{4(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+4n+2}{4(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{4(2n+1)}\right)} \quad (12)$$

unde, $n=0$ posito, prodit

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}-x^{\alpha-1}}{lx}dx = l\frac{\beta}{\alpha}, \quad (13)$$

quae formula invenitur apud Moigno (Calc. integr. pag. 77.) et jam ab Eulero reperta est. Illud integrale invenitur quoque, si in formula a me data

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x^{m+1}}dx = \frac{\Gamma(1-m)}{m}\{\beta^m-\alpha^m\}, \quad (m<1)$$

$m=0$ ponitur et x pro e^{-x} substituitur.

II.

Sinistrum membrum formulae a Legendre datae

$$\int_0^\infty \frac{x^a dx}{1+2x\operatorname{Cos}\varphi+x^2} = \frac{\pi \operatorname{Sin} a\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin} a\pi}, \quad \begin{matrix}\pi>\varphi>0\\ 1>a>-1\end{matrix}$$

si dissolvitur, transit in

$$\int_0^1 \frac{x^a dx}{1+2x\operatorname{Cos}\varphi+x^2} + \int_1^\infty \frac{x^a dx}{1+2x\operatorname{Cos}\varphi+x^2}.$$

Hoc integrale, posito $\frac{1}{x}$ pro x, mutatur in

$$\int_0^1 \frac{x^{-a}dx}{1+2x\operatorname{Cos}\varphi+x^2}$$

atque ideo est

$$\int_0^1 \frac{x^a+x^{-a}}{1+2x\operatorname{Cos}\varphi+x^2}dx = \frac{\pi\operatorname{Sin}a\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}a\pi}, \quad \left(\begin{matrix}\pi>\varphi>0\\ 1>a>-1\end{matrix}\right). \quad (14)$$

Quod si est $\varphi=\frac{m\pi}{n}$ (m et n = numeris integris et $m<n$), hae formulae a Legendre datae valent

$$m+n = \text{num. imp.}$$

$$\int_0^1 \frac{x^a dx}{1+2x\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{n}+x^2}$$

$$= \frac{1}{2n\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{n}} \sum_{p=1}^{p=n-1} (-1)^{p-1} \operatorname{Sin}\frac{pm\pi}{n} \left\{ Z'\left(\frac{n+p+a}{2n}\right) - Z'\left(\frac{p+a}{2n}\right)\right\}, \text{ *)}$$

$$m+n = \text{num. par.}$$

$$\int_0^1 \frac{x^a dx}{1+2x\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{n}+x^2}$$

$$= \frac{1}{n\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{n}} \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^{p-1} \operatorname{Sin}\frac{pm\pi}{n} \left\{ Z'\left(\frac{n+a-p}{n}\right) - Z'\left(\frac{p+a}{n}\right)\right\} \text{ *)}.$$

(Quando est $m+n = $ num. par., necesse est, sint m et n numeri impares, quia aliter fractio $\frac{m}{n}$ simplicior reddi potest).

Hae formulae cum (14) conjunctae suppeditant

$$m+n = \text{num. imp.}$$

$$\frac{2n\pi \operatorname{Sin}\frac{am\pi}{n}}{\operatorname{Sin} a\pi} = \sum_{p=1}^{p=n-1} (-1)^{p-1} \operatorname{Sin}\frac{pm\pi}{n} \left\{ Z'\left(\frac{n+p+a}{2n}\right) + Z'\left(\frac{n+p-a}{2n}\right) - Z'\left(\frac{p+a}{2n}\right) - Z'\left(\frac{p-a}{2n}\right)\right\}. \quad (15)$$

$$m+n = \text{num. par.}$$

$$\frac{n\pi \operatorname{Sin}\frac{am\pi}{n}}{\operatorname{Sin} a\pi} = \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^{p-1} \operatorname{Sin}\frac{pm\pi}{n} \left\{ Z'\left(\frac{n-p+a}{n}\right) + Z'\left(\frac{n-p-a}{n}\right) - Z'\left(\frac{p+a}{n}\right) - Z'\left(\frac{p-a}{n}\right)\right\}, \quad (16)$$

e quibus formulis, multiplicatione per da et integratione intra limites $a=\alpha$, $a=\beta$ facta, emergunt

---

*) Hae formulae in tabulis Celi Bierens de Haan inveniuntur, sed factor dextri membri $\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n}$ resp. deest.

$$m+n = \text{num. imp.}$$

$$2n\pi\int_\alpha^\beta \frac{\operatorname{Sin}\frac{am\pi}{n}}{\operatorname{Sin}a\pi}da = \sum_{p=1}^{p=n-1}(-1)^{p-1}\operatorname{Sin}\frac{pm\pi}{n}\int_\alpha^\beta da\{Z'\left(\frac{n+p+a}{2n}\right) + Z'\left(\frac{n+p-a}{2n}\right) - Z'\left(\frac{p+a}{2n}\right) - Z'\left(\frac{p-a}{2n}\right)\},$$

$$m+n = \text{num. par.}$$

$$n\pi\int_\alpha^\beta \frac{\operatorname{Sin}\frac{am\pi}{n}}{\operatorname{Sin}a\pi}da = \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}(-1)^{p-1}\operatorname{Sin}\frac{pm\pi}{n}\int_\alpha^\beta da\{Z'\left(\frac{n-p+a}{n}\right) + Z'\left(\frac{n-p-a}{n}\right) - Z'\left(\frac{p+a}{n}\right) - Z'\left(\frac{p-a}{n}\right)\}.$$

Si in sinistro membro ponitur $a=\frac{ny}{\pi}$, beneficio formularum

$$\int_\alpha^\beta da Z'\left(\frac{k+a}{q}\right) = q\,l\frac{\Gamma\left(\frac{k+\beta}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+\alpha}{q}\right)},$$

$$\int_\alpha^\beta da Z'\left(\frac{k-a}{q}\right) = q\,l\frac{\Gamma\left(\frac{k-\alpha}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{q}\right)}$$

reperiuntur

$$m+n = \text{num. imp.}$$

$$\int_{\frac{\pi\alpha}{n}}^{\frac{\pi\beta}{n}} \frac{\operatorname{Sin}my}{\operatorname{Sin}ny}dy \qquad (17)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=n-1}(-1)^{p-1}\operatorname{Sin}\frac{pm\pi}{n}\,l\frac{\Gamma\left(\frac{n+p+\beta}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{n+p-\alpha}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{p+\alpha}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{p-\beta}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+p+\alpha}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{n+p-\beta}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{p+\beta}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{p-\alpha}{2n}\right)},$$

$$m+n = \text{num. par.}$$

$$\int_{\frac{\pi\alpha}{n}}^{\frac{\pi\beta}{n}} \frac{\operatorname{Sin}my}{\operatorname{Sin}ny}dy \qquad (18)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}(-1)^{p-1}\operatorname{Sin}\frac{pm\pi}{n}\,l\frac{\Gamma\left(\frac{n-p+\beta}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-p-\alpha}{n}\right)\Gamma\left(\frac{p+\alpha}{n}\right)\Gamma\left(\frac{p-\beta}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-p+\alpha}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-p-\beta}{n}\right)\Gamma\left(\frac{p+\beta}{n}\right)\Gamma\left(\frac{p-\alpha}{n}\right)},$$

$$(1 > \beta > \alpha > -1).$$

XXX.

Solutio problematis geometrici.

Auctore

D^re. *Christiano Fr. Lindman*,

Lect. Strengnesensi.

Probl. Triangulorum omnium, quae ejusdem sint perimetri ($=2p$) et in eodem circulo (rad. $=r$) descripta sint, maximum et minimum invenire.

Duobus angulis Δ^i quaesiti $= \varphi$, ψ positis, tertius est $= \pi - (\varphi + \psi)$ et latera opposita $2r \operatorname{Sin}\varphi$, $2r \operatorname{Sin}\psi$, $2r \operatorname{Sin}(\varphi+\psi)$ resp. Posita igitur superficie $= T$, habebimus

$$T = 2r^2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Sin}(\varphi+\psi), \quad r(\operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Sin}\psi + \operatorname{Sin}(\varphi+\psi)) = p$$

vel, positis

$$\frac{T}{2r^2} = u, \quad \frac{p}{r} = a:$$

$$u = \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Sin}(\varphi+\psi), \tag{1}$$

$$\operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Sin}\psi + \operatorname{Sin}(\varphi+\psi) = a. \tag{2}$$

Ut calculus facilior fiat, ponamus

$\varphi + \psi = 2x$, $\varphi - \psi = 2y$, atque ideo $\varphi = x + y$, $\psi = x - y$,

quo facto aequationes (1) et (2) mutantur in

$$u = \operatorname{Sin}(x+y)\operatorname{Sin}(x-y)\operatorname{Sin}2x, \quad \operatorname{Sin}(x+y) + \operatorname{Sin}(x-y) + \operatorname{Sin}2x = a,$$

vel, cognitis formulis utendis, in

$$u = (\operatorname{Cos}^2 y - \operatorname{Cos}^2 x)\operatorname{Sin}2x, \tag{3}$$

$$2\operatorname{Sin}x(\operatorname{Cos}y + \operatorname{Cos}x) = a. \tag{4}$$

Ex aequat. (4) invenitur

$$\operatorname{Cos} y = \frac{a}{2\operatorname{Sin} x} - \operatorname{Cos} x, \tag{5}$$

quod in (3) ductum suppeditat

$$u = \frac{a^2}{2}\operatorname{Cot} x - 2a\operatorname{Cos}^2 x, \tag{6}$$

unde patet, quantitatem a esse $> 2\operatorname{Sin} 2x$, quoniam necesse est, sit $u > 0$. Differentiando invenitur:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -\frac{a^2}{2\operatorname{Sin}^2 x} + 4a\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{a^2\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin}^3 x} + 8a\operatorname{Cos}^2 x - 4a. \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Posito $\frac{du}{dx} = 0$, invenimus aequationem

$$8\operatorname{Sin}^3 x \operatorname{Cos} x = a \tag{7}$$

ex qua valores maximo et minimo respondentes determinandi sunt. Quia est $x < \frac{\pi}{2}$ et maximum quantitatis $\operatorname{Sin}^3 x \operatorname{Cos} x$ est $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$, necesse est, sit $a \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Posito $\operatorname{Sin}^2 x = \frac{z}{4}$, aequ. (7) transit in

$$z^4 - 4z^3 + 4a^2 = 0, \tag{8}$$

cujus radices ope theorematis Cel^{i} Sturmii excutiamus. Itaque est $f(z) = z^4 - 4z^3 + 4a^2$, prima derivata $= f'(z) = 4z^3 - 12z^2$, et residua, mutatis signis, $f_2(z) = 3z^2 - 4a^2$, $f_3(z) = 3 - z$, $f_4(z) = 4a^2 - 27$. Duae igitur radices aequationis (8) sunt $= 3$, si est $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, et duae imaginariae. Si est $z = 3$, Δ^{um} est aequilaterum, quo majus in circulo describi non potest. Itaque jam ponamus $a < \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Quoniam est $z = 4\operatorname{Sin}^2 x$, necesse est, sit $4 > z > 0$, et exquirendum est, num quae radices aequationis (8) intra hos limites cadant, quamobrem ponatur $z = 0$, 4, ∞, itemque $= 3$, qui valor maximo quantitatis $\operatorname{Sin}^3 x \operatorname{Cos} x$ respondet. Ita oriuntur hae series signorum:

si $z = 0$	$+$	$\pm$	$-$	$+$	$-$
„ $z = 3$	$-$	$\pm$	$+$	$\pm$	$-$
„ $z = 4$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
„ $z = \infty$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$

unde apparet, duas esse radices positivas, quarum utraque intra limites 0 et 4 cadit, altera intra 0 et 3, altera intra 3 et 4 h. e. $\frac{\pi}{3} > x > 0$, $\frac{\pi}{2} > x > \frac{\pi}{3}$. Quoniam est $a > 2\operatorname{Sin} 2x$, ex aequatione (7) colligitur esse $2\operatorname{Sin}^2 x > 1$ vel $x > \frac{\pi}{4}$.

Aequatio (c) cum (7) conjuncta demonstrabit, quando sit u maximum aut minimum. Aequatio (7) dat $\frac{1}{\operatorname{Sin}^3 x} = \frac{8\operatorname{Cos} x}{a}$, quod in (c) substitutum suppeditat

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 4a(4\operatorname{Cos}^2 x - 1),$$

unde intelligitur, u esse maximum, si est $x > \frac{\pi}{3}$, minimum, si est $\frac{\pi}{3} > x > \frac{\pi}{4}$.

Postremo quaeri potest, quomodo x, y, φ, ψ inter se cohaereant. Posito in (5) $8\operatorname{Sin}^3 x \operatorname{Cos} x$ pro a, evadit

$$\operatorname{Cos} y = 4\operatorname{Sin}^2 x \operatorname{Cos} x - \operatorname{Cos} x = 3\operatorname{Cos} x - 4\operatorname{Cos}^3 x = -\operatorname{Cos} 3x.$$

Sequitur, ut sit

$$y = \pi - 3x, \text{ si est } \frac{\pi}{3} > x > \frac{\pi}{4},$$

$$y = 3x - \pi, \text{ „ „ } \frac{\pi}{2} > x > \frac{\pi}{3}.$$

Posito igitur $x = \frac{\pi}{3} - w$ $(w < \frac{\pi}{12})$, evadit $y = 3w$, $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2w$, $\psi = \frac{\pi}{3} - 4w$, $\pi - (\varphi + \psi) = \frac{\pi}{3} + 2w$;

Δ^{um} est aequicrurum et latus > latere Δ^i aequilateri.

Posito denique $x = \frac{\pi}{3} + w$, invenitur $y = 3w$, $\varphi = \frac{\pi}{3} + 4w$, $\psi = \frac{\pi}{3} - 2w$, $\pi - (\varphi + \psi) = \frac{\pi}{3} - 2w$;

Δ^{um} est aequicrurum et latus < latere Δ^i aequilateri.

XXXI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Dr. Christian Fr. Lindman in Strengnäs in Schweden.

I. Dato latere ($=a$) trianguli aequicruri, variantibus vero basi angulisque, invenire locum geometricum

1) punctorum, ubi altitudines intersecantes conveniant;

(si latus a est axis abscissarum et punctum, ubi latera conveniunt, origo coordinatarum orthog., aequatio loci quaesiti est

$$y^2 = \frac{x^2(a-x)}{a+x});$$

2) centrorum circuli inscripti.

(Origine in altero lateris puncto extremo collocata abscissisque positivis sinistrorsum sumtis, idem atque in priore problemate locus invenitur.)

Cfr. Françoeur, Cours complet. Brux. 1838. Tom. II. pag. 382.

II. Curvam modo inventam rectificare et quadrare.

(Superficies intra curvam et axem abscissarum est $= a^2 - \frac{a^2\pi}{4}$).

III. Quadratum in curva illa describere.

(Latus quadrati $= \frac{a}{5}\sqrt{b}$.)

IV. Radio circuli dato, duas rectas inter se verticales per datum punctum sic ducere, ut superficies, iis circuloque contenta, maximum aut minimum evadat.

V. Si recta quaedam circulum secat in punctis A et B et altera recta priori verticalis illam secat in E et circulum in C et D, semper est

$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = \text{quadrato diametri.}$$

(Theorema illud in Lexico Klügeliano reperitur (Kreis, art. 48.), sed demonstratio simplicior fieri potest. Praeterea theorema demonstrari potest utenda Eucl. II. 9. aut 10., prout E intra aut extra circulum jacet.)

XXXII.

Miscellen.

Um, in Anschluss an meine frühere Mittheilung im ersten Hefte dieses Theils S. 115. fernerhin zu zeigen, wie eifrig jetzt in der herrlichen Adria Beobachtungen über Ebbe und Fluth angestellt werden, theile ich folgenden Aufsatz aus der Triester Zeitung. 1860. No. 54. mit. Möge dieser Eifer in anderen Meeren Nachahmung finden. G.

Ueber Fluthpegel im adriatischen Meere.

Ueber die Ebbe und Fluth im Mittelmeer herrscht noch völlige Ungewissheit. Die bisher vollständigste Sammlung physikalischer Daten über das Mittelmeer*) ist zugleich eine Sammlung der widersprechendsten Notizen und Behauptungen über die Ebbe und Fluth, ein beinahe widerliches Durcheinander von Angaben ohne einen leitenden Faden. Der Verfasser gab, was er vorfand, und er fand leider vom ganzen Mittelmeere keine einzige längere Beobachtungsreihe über diesen Gegenstand; alles bisher zugängliche Material beschränkt sich auf Notate einiger englischer und französischer Schiffscommandanten, welche aber jedesmal nur einige Wochen umfassen, und unter einander weder örtlich, noch zeitlich im Zusammenhange stehen. Da finden wir es vor Allem sogar noch streitig, ob täglich zweimal Ebbe und Fluth eintrete, wie die Schulbücher lehren, oder nur einmal, wie viele erfahrene Seeleute behaupten. Bald hören wir, das Maximum der Fluthhöhe betrage nur einen Zoll, bald einige Zolle, bald sogar einige Ellen, ohne dass die Lage der Oertlichkeiten, für welche jene Angaben gelten sollen, irgend einen Erklärungsgrund dieser grossen Verschiedenheiten darböte. Einige Referenten haben Newton's Fluth-Theorie so unauslöschlich inne, dass sie mit übermässiger Voreingenommenheit nach Syzygial- und Quadratur-Fluthen spähen,

*) Das Mittelmeer, von Dr. C. Böttger. Leipzig, G. Mayr. 1859.

und z. B. für Venedig behaupten, die Springfluthen gingen bisweilen auch 3—4 Tage dem Voll- oder Neumonde voraus! Das ist doch etwas stark, die Wirkung noch vor der Ursache zu bemerken; das ist viel geheimnissvoller, als der Schatten, welchen gewisse Ereignisse voraus werfen sollen! Sir Francis Beaufort hingegen bricht resolut mit allem Geschriebenen und versichert, dass der Mond nicht den geringsten Einfluss auf die mediterranen Gezeiten habe. Von der Adria erfahren wir nur, dass im Ganzen nichts zu erfahren, indem nicht einmal von Venedig regelmässige Flnthregister je bekannt geworden seien. Es existirt zwar, wie ich gehört habe, eine sogenannte berechnete Hafenzeit für Venedig, aber kein Schiffer kann sich rühmen, jemals nach jener Vorberechnung eine Untiefe passirt zu haben. Diese im Gebiete der physikalischen Oceanographie wohl einzig dastehende Resultatlosigkeit rührt offenbar davon her, dass bei der geringen Differenz der mittelländischen Gezeiten von ihrer genaueren Kenntniss für die Schifffahrt sehr wenig Gewinn zu erwarten ist, und man sich desshalb nirgends die Mühe stetiger Beobachtungen auferlegen wollte. Allein aus dem geringen Interesse der praktischen Schifffahrt (welches übrigens auch mehr angenommene Manier als Berechtigung ist .... Stapellaufen, ... versandete Kanäle, ... Barren u. s. w.) folgt nicht, dass der Gegenstand für immer unerledigt bleiben solle.

Abgesehen von dem praktischen Interesse für Salinen, mehrere Arten des Fischfanges u. s. w. muss doch auch die Wissenschaft nach der Kenntniss der Gesetze verlangen, von denen die Bewegungen eines so bedeutenden Meeresabschnittes regiert werden. Dies sollte um so mehr der Fall sein, da das Mittelmeer, wie man schon a priori sagen kann, jedenfalls eine ganz eigene Ebbe und Fluth, unabhängig von jener des atlantischen Meeres, haben muss. Die Fluth dieses letzteren nämlich erstreckt sich nur bis gegen Malaga *); von dort an folgt das Mittelmeer eigenen Gesetzen; und eben desswegen ist es noch fraglich, ob sich überhaupt die bekannten Grundsätze, nach denen man die Gezeiten des offenen Oceans beurtheilt, auch auf das davon abgeschlossene Becken des Mittelmeeres anwenden lassen.

Ein Umstand ist es besonders, auf welchen die Physik bisher nicht geachtet zu haben scheint. Die Newton-Laplacesche Theorie setzt bei der Erklärung der zweimaligen Ebbe und Fluth wesentlich ein über mehr als 180 Längengrade ausgedehntes Meer voraus. Daraus folgt sogleich, dass nach derselben

*) Dr. Jilek, Oceanographie. k. k. Staatsdruckerei. Wien 1857.

Theorie das kleine Mittelmeer nur einmal täglich Ebbe und Fluth haben könne, indem es von der zweimaligen Fluth des Oceans, wie oben erwähnt, abgeschlossen ist, in sich selbst aber nicht die Bedingungen eines sechsstündigen Gezeitenwechsels besitzt. Dieser meines Wissens trotz seiner Folgerichtigkeit bisher ignorirte Folgesatz der gangbaren Theorie verlangt vor Allem Bestätigung durch regelmässige, verlässliche, jahrelang fortgesetzte Beobachtungen. Uebrigens ist es auch noch nicht überflüssig, die Newton'sche Erklärungsweise auf ihre Giltigkeit zu prüfen, da Herr V. v. Streffleur in einer schon vor 13 Jahren veröffentlichten Abhandlung *) mit guten Gründen nachweiset, dass bisher nur die Höhen und Zeiten, nicht aber die Richtungen der Fluthwellen erklärt waren, aus seiner eigenen originellen Erklärungsweise aber (durch die Fliehkraft) sich sowohl die Uebereinstimmung mit den Mondesphasen und Culminationen, als auch alle andern noch controversen Eigenthümlichkeiten folgerichtig ergeben. Diese zwar wenig beachtete, aber nie widerlegte Ansicht verdient ebenfalls eine eingehende Prüfung am Mittelmeere.

Aus all' diesen Gründen habe ich meinestheils seit drei Jahren im Quarnero Fluthbeobachtungen mit gleichzeitiger Berücksichtigung des Luftdruckes, des Windes und selbstverständlich der Mondesphasen angestellt, und bin daran, meine Resultate zu veröffentlichen.

So sicher aber dieselben für den Quarnero gelten, so wenig können sie ausreichen, um daraus auch nur über die Gezeiten der Adria mit Sicherheit abzusprechen, noch weniger über jene des Mittelmeers. Auch ergibt sich zwar ein ganz bestimmtes Gesetz daraus, und die Art der Beeinflussung durch verschiedene Modificatoren des Grundphänomens: aber es ergibt sich noch keine stichhaltige Erklärung dieses letzteren selbst. Ich muss es demnach als eine sehr grosse und dankenswerthe Förderung der Wissenschaft betrachten, dass Herr Ritter Smaich von Svet Ivan, k. k. See-Sanitäts- und Hafen-Inspector in Fiume, welcher schon wiederholt für die naturwissenschaftliche Erforschung dieser Gegenden in liberalster Weise sich bethätigte, nun auf meine Bitte auch regelmässige Fluthbeobachtungen durch das Personal des k. k. Sanitäts- und Hafenamtes eingeführt hat. Das Sanitäts-Wachlocal liegt unmittelbar am Meerbusen, so dass der Sanitätswächter den angebrachten Pegel stets vor Augen hat. Der Nullpunkt (der mittlere Stand des Meeres) ist von mir durch mehrjährige

*) Die Erscheinungen der Ebbe und Fluth unter dem Einflusse der Rotation. Wien 1847.

Beobachtungen festgestellt. Die Windrichtung wird bei jeder Beobachtung (in Zwischenräumen von 1—2 Stunden zwischen Aufgang und Untergang der Sonne) bemerkt. Der Barometerstand wird an der meteorologischen Station unseres Gymnasiums beobachtet. Für die Nachtstunden wird ein Apparat angebracht werden, aus welchem man wenigstens das Maximum oder Minimum des Meeresstandes wird entnehmen können. Für Fiume also wäre gesorgt. Aber das ist noch gar wenig. Lussin, Pola, Triest, Venedig, Zengg, Zara, Lissa, Ragusa wären innerhalb unserer Küsten noch sehr wichtige Stationen, um den Gang der Fluth zu verfolgen und zu erklären. Das Mittelmeer verlangt ebenfalls seine Stationen. Möchten die betreffenden hochlöblichen Hafen-Inspectorate, Hafenämter, die Herren Hafen-Commandanten u. s. w. wo möglichst im Einvernehmen mit Professoren der Physik und mit Barometer-Stationen ähnliche Beobachtungen veranlassen und sie consequent überwachen! Eine Latte, welche für viele Jahre ausreicht und zwölf Bogen Papier jährlich, sind die einzigen speciellen Auslagen für diesen Zweck. Eine Methode, den Nullpunkt ohne lang vorhergehende Beobachtungen ausfindig zu machen, bin ich erbötig, auf Anfrage allen jenen mitzutheilen, welche sich zu regelmässigen Beobachtungen verpflichten wollen. Ueber den Ort, wohin die Beobachtungen am zweckmässigsten einzusenden wären, lässt sich später verhandeln. Vorläufig erkläre ich mich bereit zu allen Auskünften und zur Bearbeitung der Daten.

Fiume, den 1. März 1860.

Dr. J. R. Lorenz.

Berichtigungen.

Thl. XXIX. S. 262. Z. 15. statt „K“ setze man „$\mathfrak{K}$“.

Thl. XXXV. S. 47. Z. 12. und 11. v. u. muss es statt: „im Allgemeinen zusammenfallen“ heissen: „im Allgemeinen nicht zusammenfallen“.

Im Literarisch. Berichte Nr. CXXXIX. S. 9. Z. 11. statt „occassion“ s. m. „occasion“.

Thl. XXXII. S. 462. Z. 6. muss es in dem Ausdrucke von B am Ende der Zeile statt $\frac{0}{0}$ heissen: $-\frac{(c^2-b^2)\mathfrak{D}}{0}$.

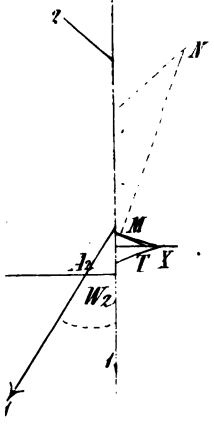


Fig. 6.

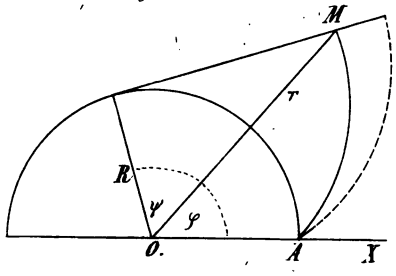
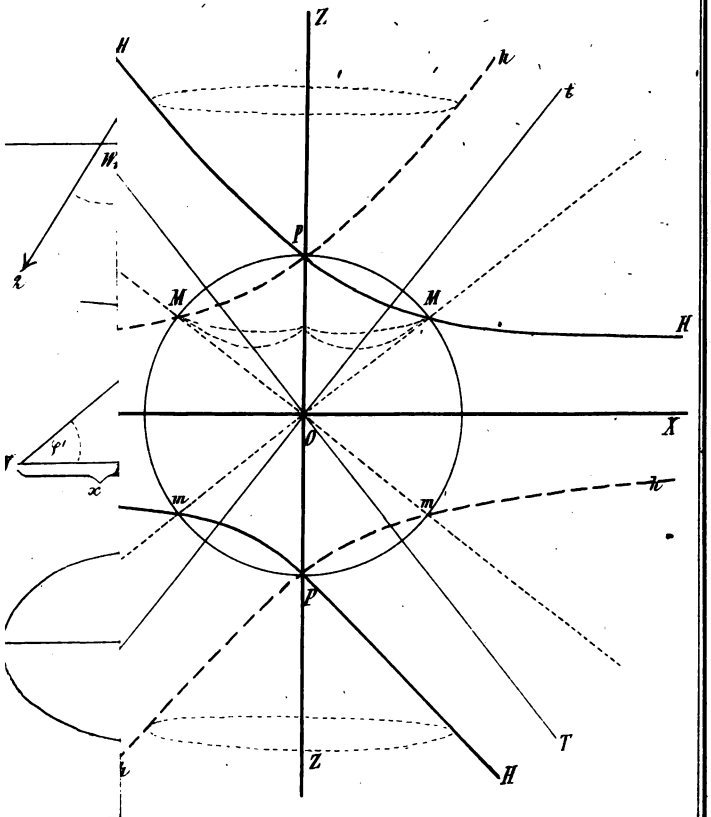
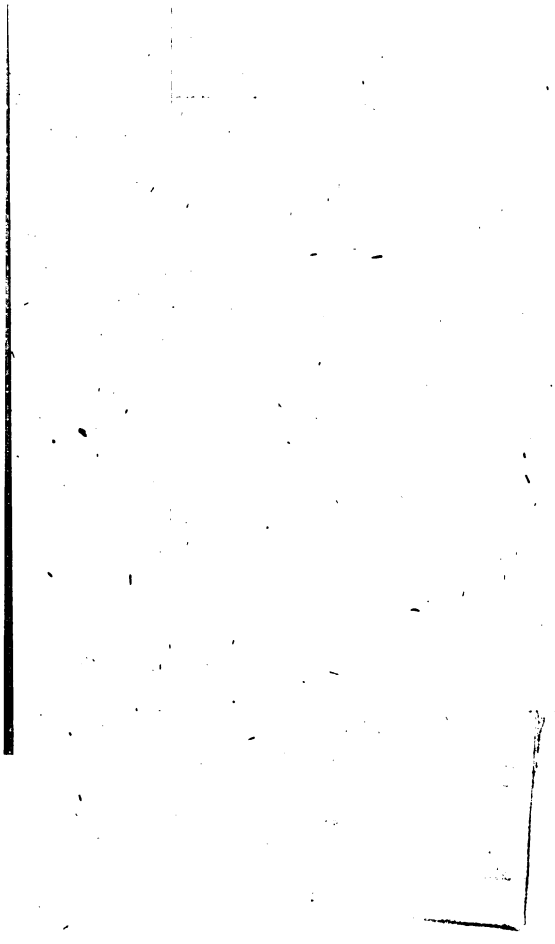


Fig. 7.





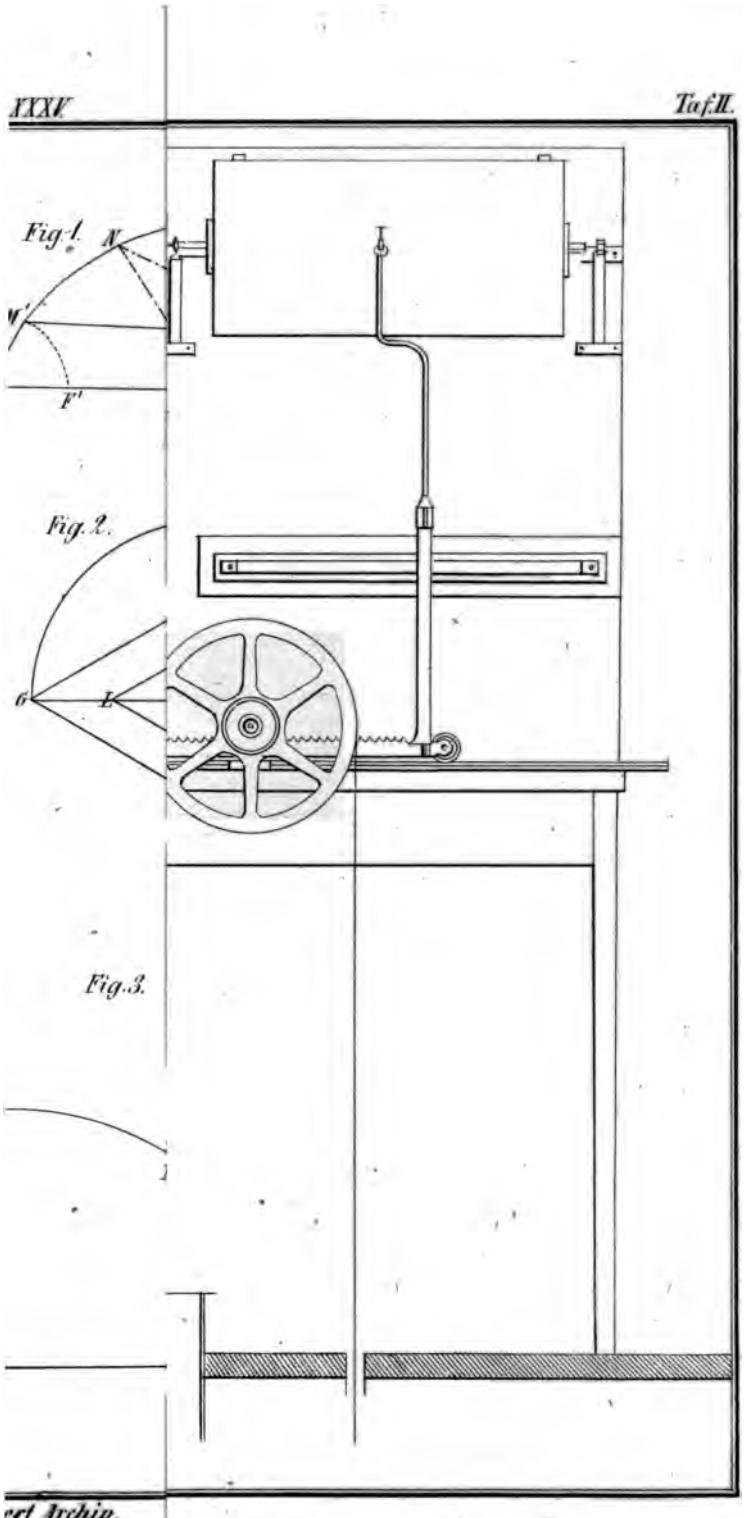
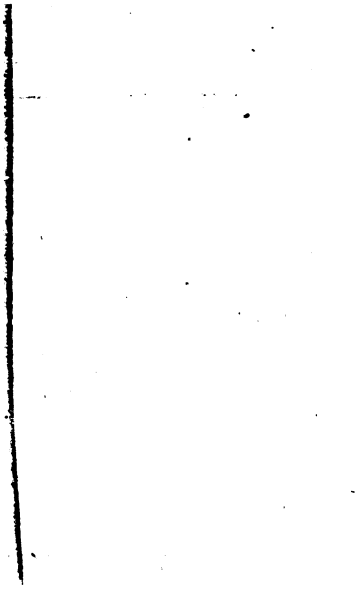
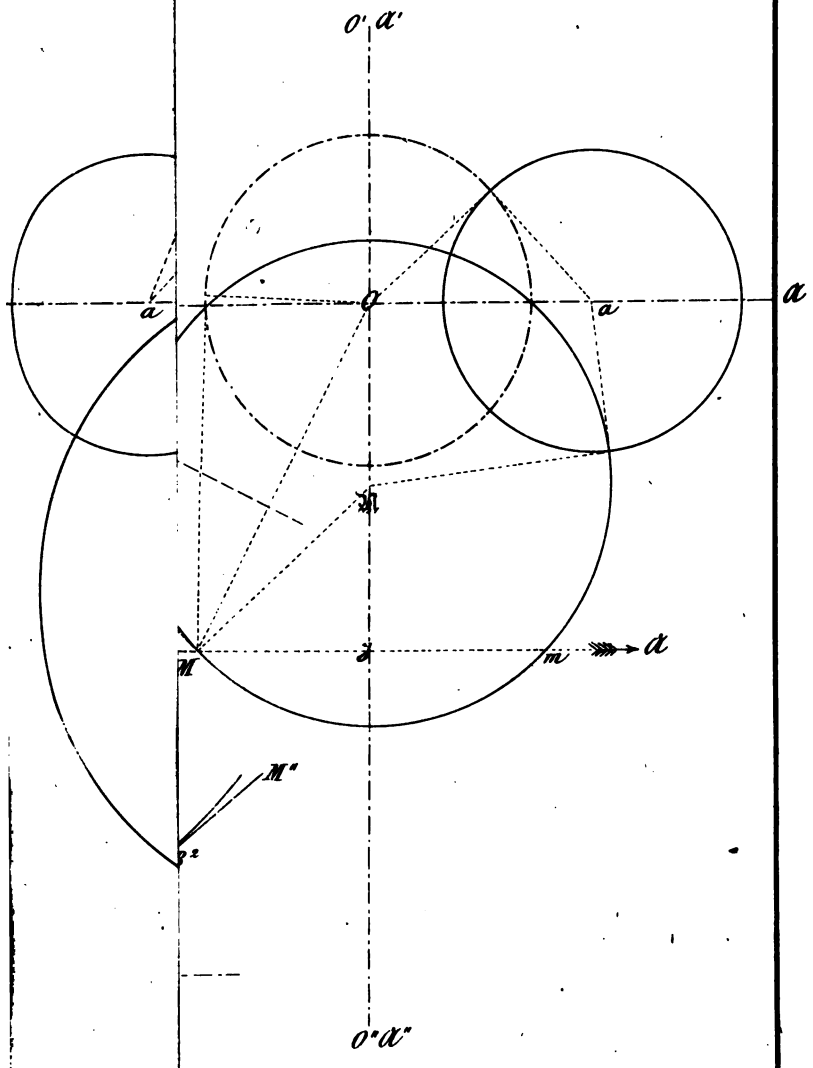


Fig. 1.
N
N'
F'
Fig. 2.
6
L
Fig. 3.

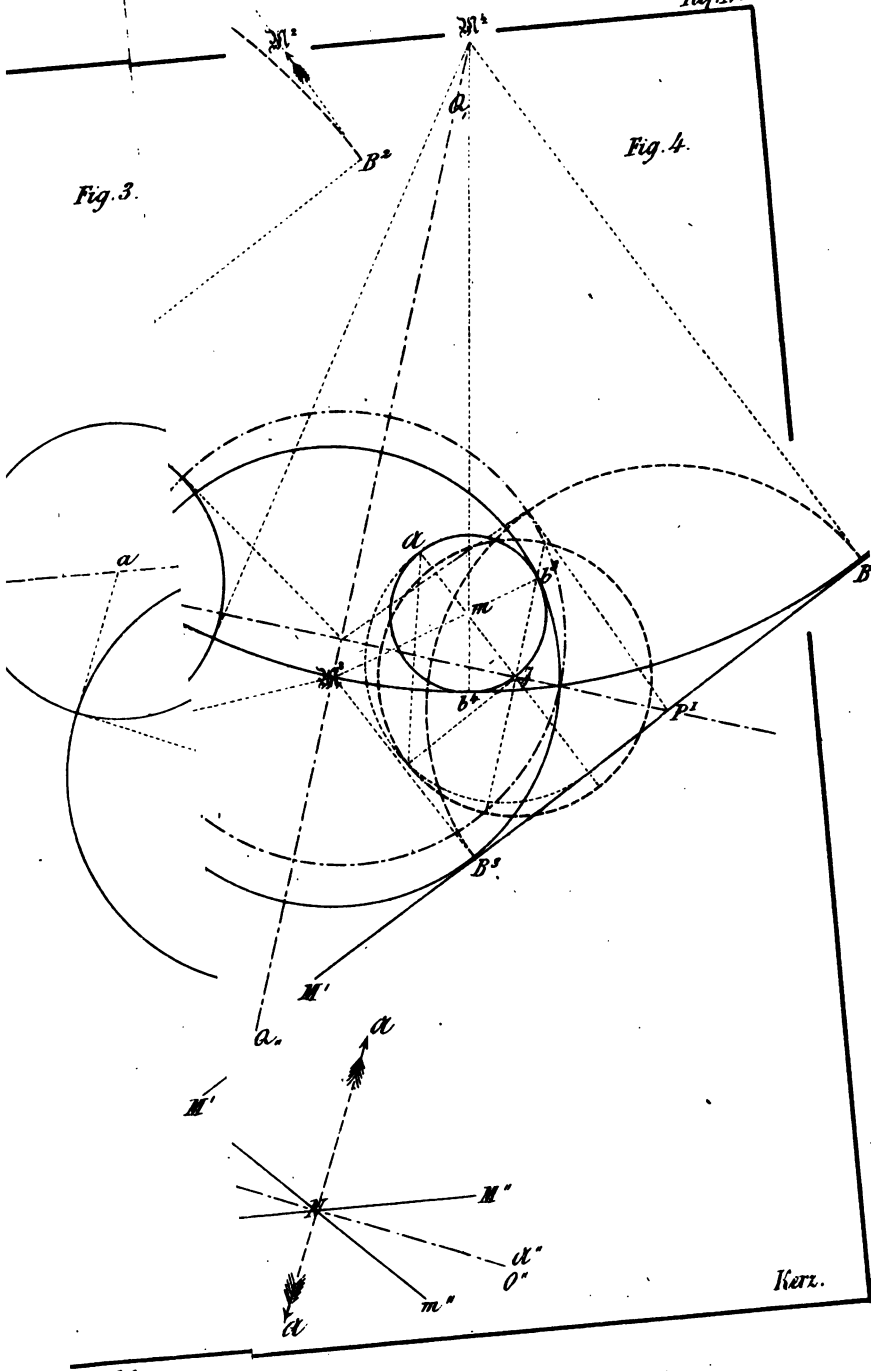




Kerz.

Fig. 3.

Fig. 4.



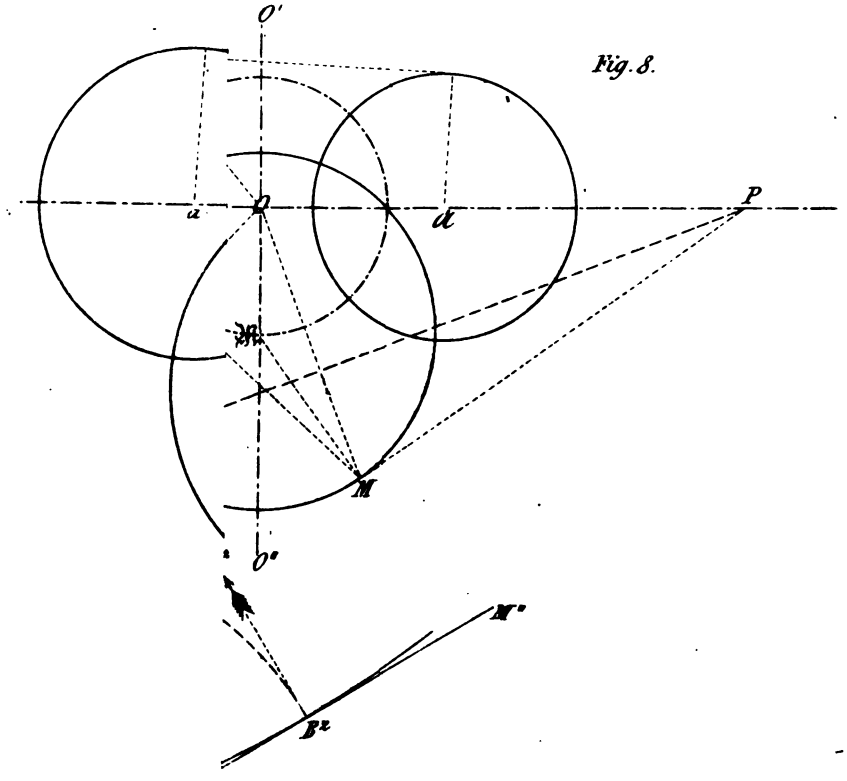


Fig. 8.

Fig. 9.

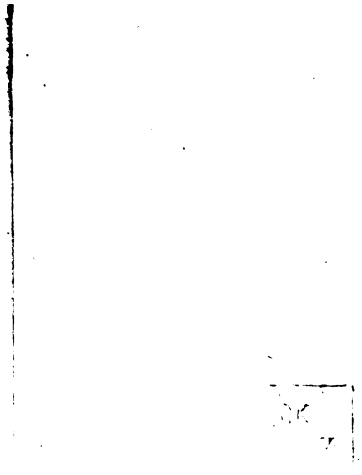
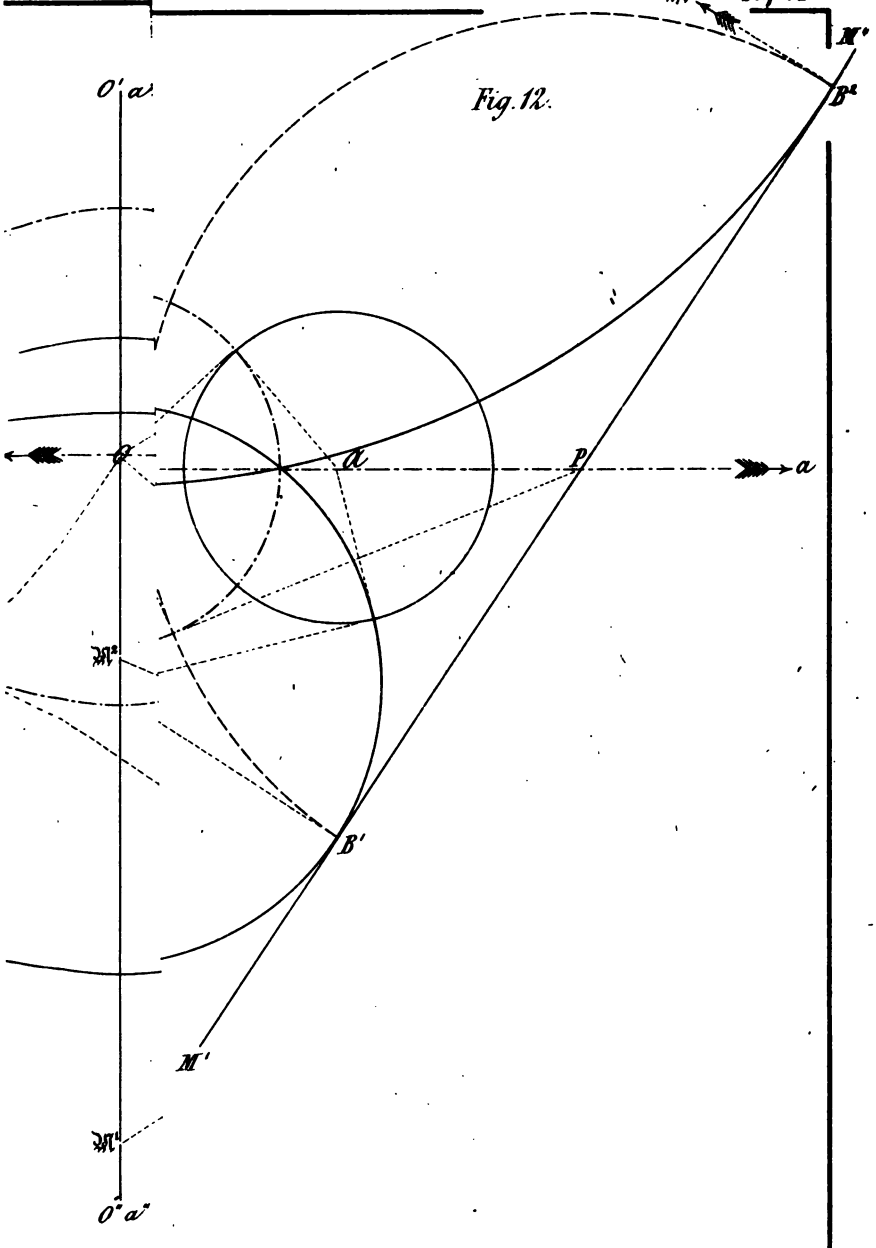


Fig. 12.



Kiers.

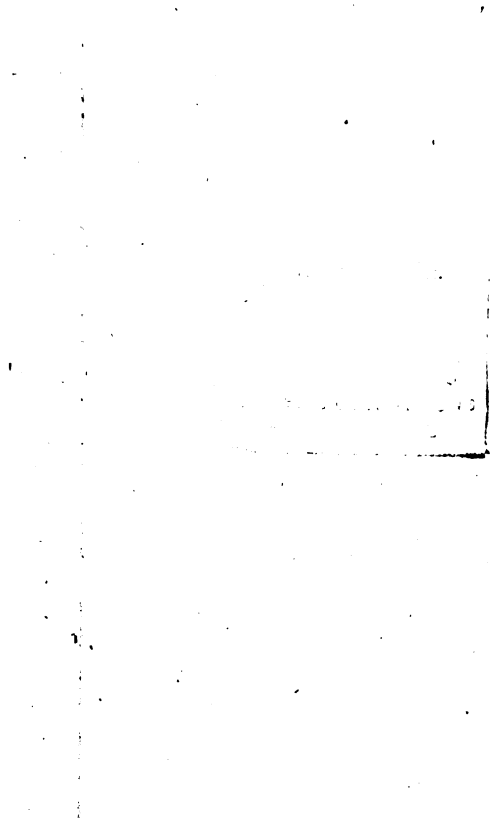


Fig. 1.

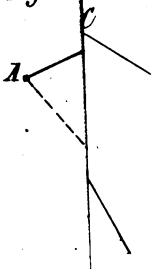


Fig. 9.

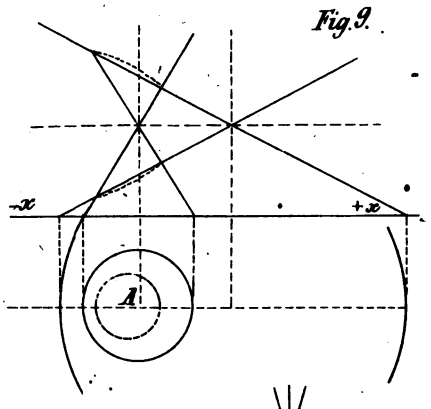
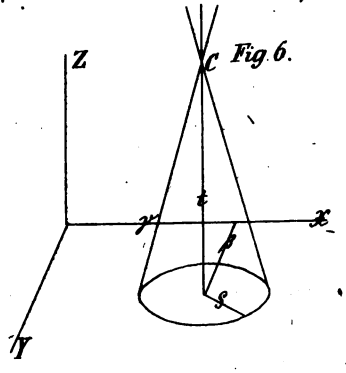
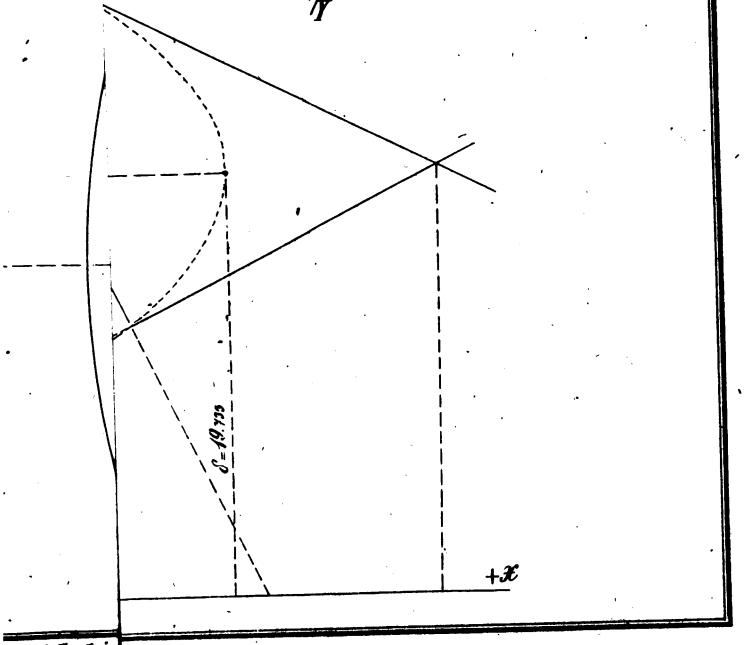
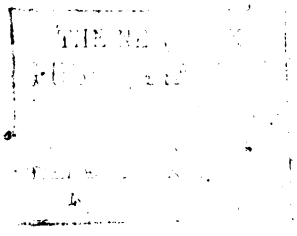


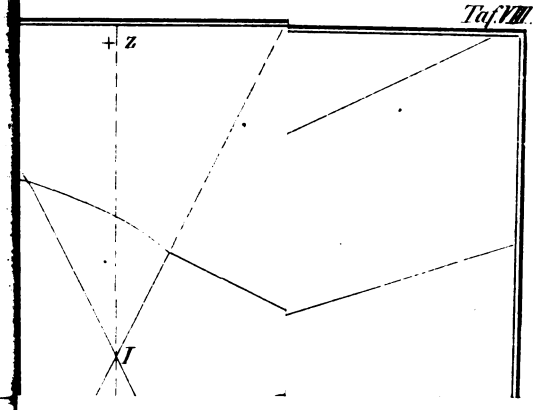
Fig. 6.

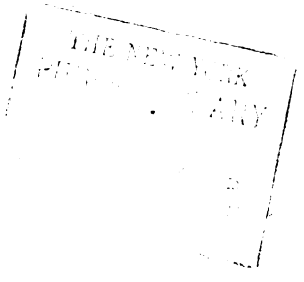


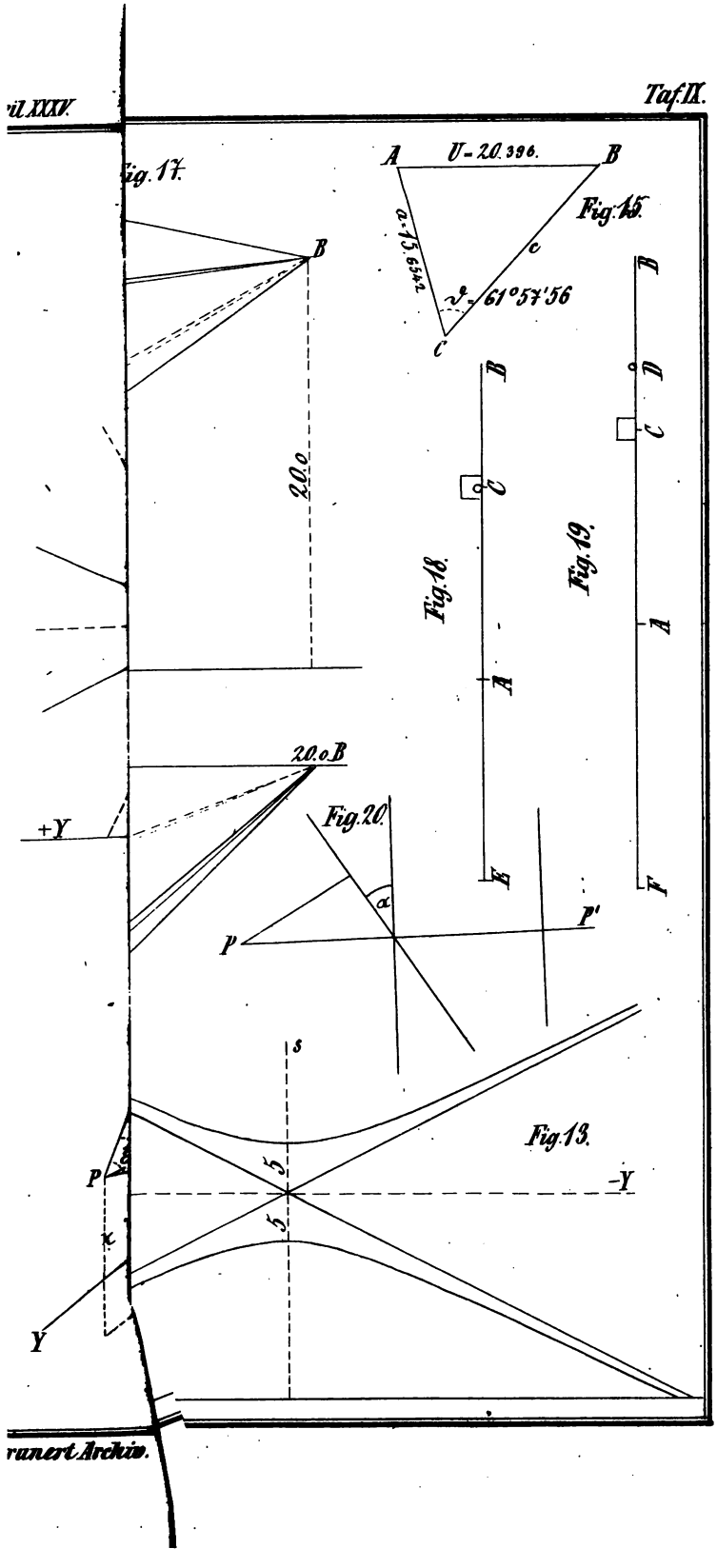


nert Archiv




z
J





runert Archiv.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Literarischer Bericht

CXXXVII.

In der Nacht vom 26sten zum 27sten März 1860 starb zu Pavia

Anton Bordoni,

nachdem er eben erst zum Senator ernannt worden war. Derselbe war Ehren-Director der mathematischen Facultät und emeritirter Professor der Geodäsie und Hydrometrie an der Universität zu Pavia, durch verschiedene treffliche wissenschaftliche Arbeiten vielfach verdient. Er war geboren am 20sten Juli 1789.

Einen mir mitgetheilten ausführlichern Necrolog des trefflichen Mannes würde ich mit besonderem Danke in das Archiv aufnehmen. G.

Preisaufgaben der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien.

1. Aus der Chemie.

Unter sämmtlichen bis jetzt bekannten Säuren gibt es keine, deren Verhalten zu den Basen sich so mannigfaltig und zugleich von den übrigen Säuren so abweichend zeigt als das der Phosphorsäure.

Viele Chemiker haben sich mit der Erforschung der Eigenthümlichkeiten der Phosphorsäuren beschäftigt und ebenso merkwürdige als lehrreiche Thatsachen sind dadurch bekannt geworden

Unsere chemischen Kenntnisse von diesen Säuren sind aber noch nicht vollständig und es gibt noch viele unklare Partien und sogar Lücken in denselben. Bei den gegenwärtigen Hilfsmitteln ist gegründete Hoffnung vorhanden, dass eine wiederholte und specielle Untersuchung der Reactionen und der Salze der Phosphorsäuren dazu führen würde, die erwünschte Aufklärung und Vollständigkeit in diesen wichtigen Theil der Wissenschaft zu bringen.

Die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie hat daher beschlossen, folgende Preisaufgabe zu stellen:

„Es wird eine genaue und umfassende Untersuchung der phosphorsauren Salze mit besonderer Berücksichtigung ihres Verhaltens bei Steigerung der Temperatur, namentlich eine genaue Bestimmung des dabei stattfindenden Wasserverlustes gewünscht."

Die Untersuchung der Salze, welche sich auch auf die mit Basen von zusammengesetzten Radicalen zu erstrecken hätte, müsste somit nicht bloss eine elementare sein, sondern es wäre dabei vorzüglich der Wassergehalt und die Temperatur, bei welcher die einzelnen Aequivalente des Wassers entweichen, zu berücksichtigen. Zur besonderen Empfehlung würde es dienen, wenn die Beantwortung auch eine genaue Untersuchung der Krystallgestalten so wie der optischen und anderen physikalischen Eigenschaften in sich schlösse. Es wären endlich die Varietäten der einbasischen Phosphorsäure besonders in's Auge zu fassen. Theoretische Gesichtspunkte sind nicht ausgeschlossen, es wird aber besonderer Nachdruck auf die Ermittlung sicherer Thatsachen gelegt.

Der Einsendungstermin ist der 31. December 1861. Die Ertheilung des Preises von 150 k. k. österr. Münz-Ducaten erfolgt bei der feierlichen Sitzung am 30. Mai 1862.

2. Aus der Mechanik.

Bei der Bestimmung des Nutzeffectes eines Wasserrades, einer Turbine oder eines hydraulischen Motors überhaupt kommt es wesentlich darauf an, die in einer gewissen Zeit dabei verwendete, d. i. die vom Motor consumirte Wassermenge zu finden, indem sich nur aus der Vergleichung dieses bei einem gegebenen Gefälle verbrauchten Wasserquantums mit der gleichzeitigen Leistung des Motors oder der Kraftmaschine dieser Nutzeffect angeben lässt.

Unter allen Mitteln aber, diese Wassermenge zu finden, ist das bisher dabei befolgte Verfahren: entweder in den Ober- oder in den Unter-Canal, durch welchen das Wasser dem hydraulischen Motor zugeleitet wird oder davon abfliesst, einen Querschweller oder Ueberfall einzubauen und das Wasser, welches über diesen abfliesst oder überfällt, zu messen, noch das einfachste und ausführbarste. Bekanntlich findet man die per Secunde über einen solchen Ueberfall oder Schweller fliessende Wassermenge aus der Formel:

$$M = mbh\sqrt{2gh},$$

in welcher b die lichte (horizontale) Breite der Oeffnung, wenn man nämlich auf den Schweller zu beiden Seiten Bretter oder sogenannte Flügelwände aufsetzt, oder wenn dies nicht der Fall, die lichte Breite des Canales; h die Höhe des noch ungesenkten Wasserspiegels über der obersten Kante des nach vorne zu abgeschrägten Schwellers, endlich m einen Erfahrungs-Coëfficienten bezeichnet, welcher sich jedoch mit der Höhe des Schwellers über dem Grundbrett, der Höhe des Wasserspiegels über dem Schweller oder Ueberfall, mit der Geschwindigkeit mit welcher das Wasser an diesen ankömmt, sowie auch noch mehr oder weniger ändert, je nachdem der Schweller an der vorderen Seite trocken liegt oder ebenfals vom Wasser benetzt wird.

Es bedarf übrigens kaum der Erwähnung, dass das Vorhanden- oder Nichtvorhandensein von Flügelwänden auf diesen Coëfficienten den bedeutendsten Einfluss hat und diese beiden Fälle gleich von vorne herein getrennt werden müssen.

Da es sich nun vorzüglich um die möglichst genaue Bestimmung dieses Erfahrungs-Coëfficienten aus Versuchen im grossen oder natürlichen Maassstabe, nämlich unter solchen Umständen handelt, wie solche eben in der Anwendung oder Praxis für den angedeuteten Zweck am häufigsten vorkommen, indem ein Fehler selbst erst in der dritten Decimalstelle dieses Coëfficienten den gesuchten Nutzeffect schon um 5 bis 10 Procent unrichtig machen kann; da ferner die in dieser Richtung vorgenommenen Bestimmungen von Eytelwein, Bidone, Castel, Lebros, Weissbach u. A. nicht alle eben genannten Umstände berücksichtigen und selbst die in der neuesten und vollständigsten Abhandlung von Boileau (Traité de la Mesure des eaux courantes, Paris 1854) gegebenen Coëfficienten eine Vergleichung und Bestätigung wünschenswerth machen, so schreibt die kaiserliche Akademie der Wissenschaften einen Preis von 200 Stück k. k. österr. Münz-Ducaten für die beste preiswürdige Abhandlung:

über die Bestimmung der per Secunde über

einen Schweller oder Ueberfall mit und ohne Flügelwände fliessenden oder stürzenden Wassermenge, unter Berücksichtigung aller (oben erwähnten) in der Ausführung im Grossen vorkommenden Fälle

aus, wozu selbstverständlich nur Versuche im Grossen oder natürlichen Maasstabe führen können.

Der Einsendungstermin ist der 31. December 1862. Die Ertheilung des Preises findet in der feierlichen Sitzung am 30. Mai 1863 Statt.

Die um einen Preis werbenden Abhandlungen dürfen den Namen des Verfassers nicht enthalten, sind aber, wie allgemein üblich, mit einem Wahlspruche zu versehen. Jeder Abhandlung hat ein versiegelter, mit demselben Motto versehener Zettel beizuliegen, der den Namen des Verfassers enthält. In der betreffenden feierlichen Sitzung eröffnet der Vorsitzende den versiegelten Zettel jener Abhandlung, welcher der Preis zuerkannt wurde, und verkündet den Namen des Verfassers. Die übrigen Zettel werden uneröffnet verbrannt, die Abhandlungen aber aufbewahrt, bis deren Verfasser sie zurück verlangen.

Theilung eines Preises unter mehrere Bewerber findet nicht Statt.

Jede gekrönte Preisschrift bleibt Eigenthum des Verfassers. Wünscht es derselbe, so wird die Schrift von der Akademie als abgesondertes Werk in Druck gelegt. In diesem Falle erhält der Verfasser fünfzig Exemplare und verzichtet auf das Eigenthumsrecht.

Abhandlungen, welche der Veröffentlichung würdig sind, ohne jedoch den Preis erhalten zu haben, können mit Einwilligung des Verfassers entweder in den Schriften der Akademie oder auch als abgesondertes Werk herausgegeben werden.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Neunter Jahrgang. 1859.

Auch dieser Jahrgang des Almanachs der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, dessen achten Jahrgang wir

im Literarischen Bericht Nr. CXXI. S. 6. anzuzeigen das Vergnügen hatten, giebt wieder ein sehr erfreuliches Bild von der grossen Thätigkeit dieser hohen gelehrten Körperschaft in allen Theilen der in ihr Gebiet gehörenden Wissenschaften, von der Wichtigkeit ihrer Arbeiten, und von dem grossen Aufschwung, welchen die Wissenschaften dadurch in Oesterreich schon gewonnen haben und fortwährend immer mehr nehmen, wobei namentlich auch das Hervortreten einer nicht geringen Anzahl jüngerer Talente, deren Arbeiten in den Sitzungsberichten veröffentlicht werden, einen Jeden, der an den Fortschritten der Wissenschaften wahrhaft Theil nimmt, mit Freude erfüllen muss. Dies ist auch der beste Beweis, wie trefflich und mit welchem grossen Erfolge die kaiserliche Akademie der Wissenschaften, neben ihren anderen auf die Weiterführung der Wissenschaften an sich Bezug habenden grossen Obliegenheiten, auch den Theil ihres Berufs, welchen wir keineswegs als den unwichtigsten zu betrachten geneigt sind, nämlich eben die möglichst grosse Verbreitung der Wissenschaften und Heranziehung und Ermunterung jüngerer Talente zur tüchtigen und kräftigen Arbeit auf deren weitem Felde, zu erfüllen bemühet ist.

Der vorliegende Jahrgang ist stärker wie die sämmtlichen früheren, indem derselbe sich diesmal auf zwei feierliche Sitzungen: die vom 31. Mai 1858 und die vom 30. Mai 1859, bezieht, also auch zwei Berichte der Sekretäre über die Arbeiten der Akademie in dem Zeitraume von zwei Jahren enthält, wo namentlich für die Leser des Archivs die beiden Berichte des General-Sekretärs, — des Herrn Professor Schrötter, — welche ein höchst anziehendes Bild von der Thätigkeit der Akademie auf dem Gebiete der mathematischen und Natur-Wissenschaften liefern, von grossem Interesse sein werden. Aber auch ausser diesen Berichten über die ungemein vielseitigen und weit ausgedehnten Leistungen der Akademie enthält dieser Jahrgang zwei Reden, welche wir wegen ihres lehrreichen und interessanten Inhalts der Aufmerksamkeit unserer Leser besonders empfehlen, nämlich:

1. Vortrag des Präsidenten der kaiserlichen Akademie, Herrn Dr. Andreas Freiherrn von Baumgartner: **Ueber den Geist der Naturforschung unserer Zeit und ihre Resultate;**

2. Vortrag des wirklichen Mitgliedes der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Herrn Director K. von Littrow: **Privatleistungen auf astronomischem Gebiete*).**

---

*) M. s. Archiv Theil XXXIV. Nr. XII.

Ueber den interessanten Inhalt der zweiten dieser beiden Reden haben wir uns schon früher ausgesprochen. Was die erste betrifft, so ist dieselbe ein neues Zeugniss von dem tiefen geistigen Gehalt ihres berühmten, von uns auch persönlich hochverehrten Verfassers. Wir halten es in diesem Falle für ganz überflüssig, etwas Weiteres über diese Rede zu sagen, möchten jedoch diejenigen Naturforscher, welche einem krassen Materialismus huldigen und in dem Irrthume befangen sind, auch die geistigen Processe auf Bewegung der Materie zurückführen zu wollen, auf den Schluss dieser schönen Rede dringend hinweisen und aufmerksam machen. Wenn der geehrte Herr Verfasser auf S. 32. sagt: „Eine Behauptung, welche die mehr als 1000jährige Ueberzeugung der überwiegenden Mehrzahl der Menschen erschüttert, die den moralischen Werth unserer Handlungen in Frage stellt und selbst für den Bestand der bürgerlichen Gesellschaft keineswegs ohne Bedeutung ist, sollte füglich nicht ausgesprochen werden, wenn man sie nicht auf sehr überzeugende Gründe stützen, alle Schwierigkeiten beseitigen und die Widersprüche zu beheben vermag, in denen sie mit anderen ausgemachten Wahrheiten steht", so unterschreiben wir diese Worte aus dem Grunde unserer Seele. Auf einer wie schwachen und unsicheren Basis aber die Ansichten der materialistischen Naturforscher unserer Zeit ruhen, haben wir in der Kürze, und zugleich allgemein verständlich, nirgends so schlagend nachgewiesen gefunden, als in dieser schönen Rede. — Schon deshalb möchten wir namentlich auch alle Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten, welche am meisten dahin zu trachten haben, ihre Schüler vor solchem krassen Materialismus zeitig zu bewahren, dringend bitten, sich mit derselben in eingehender Weise bekannt zu machen.

Worauf wir schon bei den früheren Jahrgängen mehrfach hingewiesen haben, dass dieser Almanach wegen der vielen darin enthaltenen literarischen Notizen auch als ein wichtiges Hülfsmittel zur Geschichte der Literatur zu betrachten ist, gilt natürlich auch von diesem Jahrgange ganz in derselben Weise.

Arithmetik.

Ueber Kapitalien- und Rentenversicherungen. Von Carl Hessler, Lehrer der Elementar-Mathematik an der

Kommunal-Oberrealschule auf der Wieden in Wien. (Abgedruckt aus dem Programme der Wiedener-Oberrealschule und durch Zusätze, Beispiele und Tabellen vermehrt). Wien. Sallmayer und Komp. 1860. 8.

Diese kleine Schrift enthält eine sehr deutliche und gründliche, zugleich in mehrfacher Weise eigenthümliche Darstellung des auf dem Titel genannten Gegenstandes, wobei der Herr Verfasser sich zugleich bemüht hat, alles das zu erläutern, was zum Verständniss, ohne auf andere Schriften über politische Arithmetik zurückgehen zu müssen, erforderlich ist, eine Behandlungsweise, welche dem Zwecke einer Schulschrift jedenfalls sehr wohl entspricht. Er entwickelt deshalb zuerst die allgemeinen Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, giebt dann die allgemeinen Begriffe über Sterblichkeit, erläutert die Principien der verschiedenen Sterblichkeitstafeln, und zeigt hierauf die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Leben der Menschen. Nach diesen allgemeinen wissenschaftlichen Grundlagen geht er sodann zu den Lebensversicherungen und deren Berechnung nach den verschiedenen Modificationen über, erläutert die Berechnung durch zweckmässig gewählte Beispiele, und fügt am Ende sieben Tafeln bei, worunter die Sterblichkeitstafeln nach Süssmilch und Deparcieux. Mit der einschlagenden Literatur zeigt er sich überall vollkommen bekannt, und giebt seiner Schrift auch dadurch noch einen besonderen Werth, dass er, was anderwärts noch nicht geschehen sein dürfte, die Berechnung der von der Gesellschaft „der Anker" in Wien eröffneten Ueberlebens-Associationen in eingehender Weise erläutert. Wir glauben daher diese hier in einem besonderen, vermehrten und vervollkommneten Abdrucke vorliegende Schulschrift unseren Lesern zur Beachtung um so mehr empfehlen zu dürfen, weil das weitere Eingehen auf den betreffenden Gegenstand namentlich bei dem mathematischen Unterrichte auf Realschulen aus einem doppelten Gesichtspunkte als sehr wünschenswerth erscheint: einmal nämlich wegen dessen grosser Wichtigkeit für das sociale Leben, und zweitens weil jedenfalls alle hierher gehörenden Aufgaben in theoretischer Rücksicht als treffliche Uebungsmittel bei'm mathematischen Unterrichte sch schon längst geltend gemacht haben.

Teorica e Pratica del regolo calcolatore per Quintino Sella. Torino. Stamperia Reale. 1859. (Taschenbuchformat).

Wir besitzen, besonders auch in Deutschland, schon mehrere Anleitungen zum Gebrauch des sogenannten Rechenschiebers

(Sliding-rule. — Règle à calcul.), namentlich eine sehr vorzügliche von dem der Wissenschaft leider zu früh entrissenen trefflichen Schulz von Strassnicki. Die vorliegende Schrift des Herrn Professor Quintino Sella in Turin tritt diesen Schriften nicht nur in der würdigsten Weise zur Seite, sondern zeichnet sich auch in mehreren Beziehungen vortheilhaft aus. Wir heben in dieser Rücksicht zunächst im Allgemeinen hervor: die grosse Deutlichkeit, mit welcher dieselbe verfasst ist, und die grosse Vollständigkeit, mit welcher sie sich über alle Theile der Arithmetik, der rechnenden Geometrie und Trigonometrie verbreitet; ferner die grosse Umsicht, mit welcher die Theorie des Instruments entwickelt und dasselbe rücksichtlich der Genauigkeit, welche es zu gewähren im Stande ist, in seine gehörigen Gränzen gewiesen worden ist; aber eben so trefflich ist die äusserst übersichtliche praktische Anordnung, welche es möglich macht, jederzeit für den betreffenden Fall die praktische Regel mit grosser Leichtigkeit aufzufinden; endlich ist auch noch die in allen Beziehungen treffliche und überaus elegante äussere Ausstattung hervorzuheben, welche das Büchlein zu einem wahren Taschenbuche für jeden Praktiker macht. Dass eine bildliche Darstellung des Rechenschiebers auf einer besonderen Tafel in sieben Figuren nicht fehlt, brauchen wir kaum besonders zu erwähnen. Endlich sind in der Parte quinta noch verschiedene andere mechanische Hülfsmittel zur Ausführung von Rechnungen unter den Namen Regolo calcolatore di o^m, 5l; Regolo calcolatore a scale ripiegate; Regolo in cartone del Lalanne; Aritmografi; Tavola calcolatrice del Lalanne beschrieben worden. Eine Nota sul numero di casi che si possono presentare nell' esecuzione di un calcolo col regolo und des in praktischer Rücksicht besonders instructiven Quadro del regolo calcolatore beschliesst das in allen Beziehungen zur Beachtung zu empfehlende Werkchen.

Wir würden einer mit Unternehmungen dieser Art sich beschäftigenden deutschen Buchhandlung die Veranstaltung einer Uebersetzung ganz in derselben äusseren Form und trefflichen Ausstattung, wie das Original aus der Stamperia Reale in Turin hervorgegangen ist, empfehlen. G.

Geometrie.

Analytische Entwickelung der Sätze über die Transversalen und merkwürdigen Punkte des Dreiecks aus

allgemeinen Principien. Von **Niegemann**, ordentlichem Lehrer am katholischen Gymnasium (zu **Köln**). (Schulprogramm)*).

Der Herr Verfasser dieses lesenswerthen Programms hat, wie schon dessen Titel besagt, die Lehre von den Transversalen und merkwürdigen Punkten des Dreiecks aus allgemeineren Principien wie bisher abzuleiten, überhaupt zu verallgemeinern gesucht, wobei er sich einer gemischten geometrisch-trigonometrischen Methode bedient. Dabei geht er nach Vorausschickung einiger weniger bekannten goniometrischen Formeln und der Auflösung von vier Aufgaben über die Maxima und Minima mit Hülfe der Differentialrechnung hauptsächlich von der Aufgabe: Das Dreieck, welches durch die drei Durchschnittspunkte dreier Transversalen, deren jede die drei Seiten eines Dreiecks durchschneidet, bestimmt wird, mittels der Bestimmungstücke des Dreiecks auszudrücken, welche auf zwei verschiedene Arten aufgelöst wird, aus, und schliesst dann an diese allgemeine Aufgabe die specielleren Betrachtungen unter den folgenden Rubriken an: **Transversalen, die durch die Ecken des Dreiecks gehen.** A. Im Allgemeinen. B. Im Besonderen. — **Transversalen, welche durch die Mitten der Seiten des Dreiecks gehen.** A. Im Allgemeinen. B. Im Besonderen. — Dass die Abhandlung neben bekannten Sätzen und Relationen auch manche bisher noch unbekannte enthält, ist bei dieser verallgemeinerten Behandlungsweise natürlich, und dieselbe kann jedenfalls als ein guter Beitrag zur Theorie des ebenen Dreiecks betrachtet werden, weshalb wir auch wünschen, dass es der Herr Verfasser nicht an dem hier Mitgetheilten bewenden lassen möge, wozu er nach der Schlussbemerkung durch die Beschränktheit des Raumes für jetzt gezwungen wurde.

Astronomie.

In dem Lections-Verzeichnisse der theologisch-philosophischen Akademie zu Münster für das Wintersemester $18\frac{59}{60}$ hat Herr Professor Dr. Heis seine Beobachtungen über den Glanz des veränderlichen Sterns Mira Ceti aus den Jahren 1840 bis

*) Das uns gütigst mitgetheilte Exemplar hat keinen Haupttitel, weshalb wir die Jahreszahl anzugeben ausser Stande sind.

1859 in instructiver Weise zusammengestellt und daraus allgemeine Resultate gezogen, weshalb dieses Programm solchen, die sich mit ähnlichen Beobachtungen beschäftigen oder zu beschäftigen beabsichtigen, zur Beachtung zu empfehlen ist. Eine graphische Darstellung der Beobachtungen ist ebenfalls beigefügt.

Nautik.

Nautical Monographs. No. I. Observatory, Washington. October, 1859. 4.

Mit dieser ersten Nummer beginnt das National-Observatorium zu Washington unter der Direction des hochverdienten Herrn Maury eine Reihe nautischer Monographien, auf die wir ihrer Wichtigkeit für die Schifffahrt wegen dringend aufmerksam machen. Natürlich kann hier nicht der Ort sein, auf Einzelnheiten einzugehen, indem wir uns damit begnügen müssen, den Inhalt im Allgemeinen anzugeben. Die vorliegende Nummer hat die Ueberschrift:

The winds at sea; their mean direction and annual average duration from each of the four quarters;

mit folgenden Unterabtheilungen:

Winds and calms in the Atlantic Ocean. — Winds and calms in the Pacific Ocean. — Winds and calms in the Indian Ocean. — Winds and calms in the West India and China Seas.

Graphische Darstellungen sind auf vier Tafeln überall in instructiver Weise beigefügt.

Physik.

Anfangsgründe der Physik. Von Andreas Ritter von Ettingshausen, k. k. Regierungsrath und Professor. Vierte Auflage. Mit 150 Holzschnitten. Wien. C. Gerold's Sohn. 1860. 8*).

Dieses so eben in einer vierten Auflage erschienene Lehr-

*) Frühere Aufl. s. Literar. Ber. Nr. XV. S. 237. — Nr. XXVII. S. 404.

buch der Physik, dessen erste Auflage im Jahre 1844 erschien, gehört zu der im Ganzen leider nur sehr geringen Anzahl trefflicher Bücher, welche die Physik vom strengen elementar-mathematischen Standpunkte aus behandeln, und nimmt unter denselben jedenfalls eine der ersten Stellen ein. Was man von sehr wenigen physikalischen Lehrbüchern sagen kann, lässt sich von diesem sagen: dass nämlich in demselben kein Satz vorkommt, welcher nicht innerhalb der Gränzen, die sich das Buch gesteckt hat, streng bewiesen wäre. Und dass in dieser Beziehung alle Partien der Physik möglichst gleichmässige Berücksichtigung gefunden haben, können wir unsere Leser versichern. Was die mathematische Behandlung an sich betrifft, so ist dieselbe — ganz mit Recht in einem solchen Buche, — weniger eine analytische, als geometrische, und erinnert in dieser Beziehung rücksichtlich ihrer Eleganz und Strenge lebhaft an verschiedene treffliche Muster aus älterer Zeit, wie wir dieselben namentlich von einigen englischen und holländischen Mathematikern und Physikern, die ja in dieser Darstellungsweise bekanntlich immer vorzugsweise Meister gewesen sind, besitzen*). Zunächst wegen dieser ganz strengen mathematischen Haltung ist das Buch ein überaus werthvolles und lehrreiches und muss namentlich allen Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten dringend zur Beachtung empfohlen werden, so wie wir von uns selbst freudig bekennen, dass wir dasselbe, eben so wie schon in seinen früheren Auflagen, auch in dieser vierten Auflage von Neuem mit grossem Interesse gelesen und uns an der dem verehrten Herrn Verfasser eigenen geometrischen Strenge und Eleganz wahrhaft erfreut haben. In der That wüssten wir in demselben keine Partie, welcher wir den Vorzug geben sollten, wollen jedoch die elementare Darstellung der Theorie der schwingenden Bewegungen als eine ganz besonders zu beachtende hervorzuheben uns erlauben. Ausser diesen grossen Vorzügen rücksichtlich der mathematischen Behandlung zeichnet sich dieses Buch aber auch durch Vollständigkeit, grosse Bestimmtheit und Klarheit in der Darlegung der Naturgesetze aus, und lässt da, wo das Experiment in sein Recht tritt, auch keineswegs die experi-

*) Ohne auf Newton's unsterbliches Werk hinzuweisen, worin bekanntlich die geometrische Behandlungsweise in ihrer höchsten Potenz auftritt; ohne der in dieser Beziehung unübertroffenen Werke von Huygens zu gedenken: will ich unter vielen anderen nur etwa an die Introductio ad veram Physicam von Keil erinnern, wenn dieselbe auch mit den so eben genannten Meisterwerken natürlich gar nicht zu vergleichen ist.

mentelle Seite der Wissenschaft unberücksichtigt, so dass dasselbe auch in dieser Beziehung alle Empfehlung verdient. Abbildungen und ausführlichere Beschreibungen von Instrumenten enthält dagegen das Buch nicht, was wir bei seiner vorherrschend streng theoretischen und mathematischen Natur nur vollkommen billigen können. Wenn auf den österreichischen Lehranstalten dem physikalischen Unterrichte solche streng mathematisch gehaltene Lehrbücher, wie das vorliegende, und einige andere, gleichfalls von österreichischen Gelehrten verfasste treffliche Werke von derselben Tendenz zu Grunde gelegt werden können, so muss es auf diesen Lehranstalten mit dem physikalischen Unterrichte jedenfalls sehr gut bestellt sein, namentlich gegenüber den physikalischen Vorträgen auf manchen sonstigen deutschen Universitäten, in denen häufig von nichts weniger als von Mathematik die Rede ist. Mehr in's Einzelne über dieses in vierter Auflage vorliegende Werk einzugehen, würde unnütz sein, da es aus seinen früheren Auflagen gewiss schon in einem grösseren Kreise bekannt ist. Aber nochmals wollen wir dasselbe allen unseren Lesern dringend zur Beachtung empfehlen, und zwar, — wir wiederholen es, — hauptsächlich wegen der in ihm befolgten überaus eleganten mathematischen, vorzugsweise geometrischen Darstellung, welche auch für jeden Mathematiker, welcher Sinn für mathematische Strenge hat und dieselbe namentlich aus dem Studium der griechischen Geometer und neuerer Mathematiker aus der strengen Schule kennt, im höchsten Grade lehrreich ist. Wir halten dieses Werk für eine wirkliche Bereicherung der physikalischen Literatur und wünschen dem Herrn Verfasser, noch recht viele Auflagen desselben zu erleben.

Die Thermoelektricität. Erster Theil. Von Dr. Wilhelm Rollmann. Programm des Gymnasiums zu Stralsund von Michaelis 1859. 4.

Der Herr Verfasser giebt den Zweck seiner Abhandlung selbst auf folgende Art an: „Thermoströme können entstehen 1) zwischen Metallen, 2) zwischen Metallen und Elektrolyten und 3) zwischen Elektrolyten. — In vorliegender Abhandlung findet man eine geschichtliche Darstellung der Thermoelektricität der Metalle (Elektromotoren erster Klasse). Die Thermoketten aus einem Metall und einem Elektrolyten und aus zwei Elektrolyten (Elektromotoren zweiter Klasse), so wie die Maassbestimmungen aller drei Arten von Thermoströmen bleiben einer späteren Mittheilung vorbehalten, da die gegebene Zeit zur Bearbeitung des Ganzen nicht ausreichte.“ — Jedenfalls enthält diese Abhandlung inner-

halb der Gränzen, welche der Herr Verfasser sich zu stecken genöthigt gewesen ist, eine fleissige Zusammenstellung der bisherigen Arbeiten über den fraglichen Gegenstand, und verdient der Beachtung empfohlen zu werden, weil man schwerlich an einem anderen Orte alles Bekannte so vollständig beisammen finden wird wie hier. Wir wünschen deshalb auch, dass sich ihm bald Gelegenheit zu einer Fortsetzung seiner Arbeit darbieten möge.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. (S. Literar. Ber. Nr. CXXXIII. S. 9.)

Band XXXV. 1859.

Nr. 10. Rohrer: Ueber Regentropfen und Schneeflocken. (Mit 2 Tafeln). S. 211. — Murmann: Ueber die Bahn der Europa. S. 230.

Nr. 11. Haidinger: Der Meteorsteinfall von Hraschina bei Agram am 26. Mai 1751. (Mit 1 Tafel). S. 361. — Burg, Ritter v.: Untersuchungen über die Festigkeit von Stahlblechen, welche in dem Eisenwerke des Herrn Franz Mayr in Leoben für Dampfkessel erzeugt werden. S. 452.

Nr. 12. Jeitteles: Bericht über das Erdbeben am 15. Jänner 1858 in den Karpathen und Sudeten. (Mit 1 Karte). S. 511.

Band XXXVI. 1859.

Nr. 13. Sachs: Ueber einige neue mikroskopisch-chemische Reactionsmethoden. (Mit 2 Tafeln). S. 5. — Stefan: Über das Dulong-Petit'sche Gesetz. S. 85.

Nr. 14. Haidinger: Zwei Mittheilungen (1. Commodore v. Wüllersdorf: Zur Vertheilung der Winde auf der Oberfläche der Erde. S. 145. — Maury: Schreiben an Herrn Commodore v. Wüllersdorf-Urbair. S. 173.). — Blaserna: Ueber den inducirten Strom der Nebenbatterie. S. 209.

Nr. 16. Kreil: Magnetische und geographische Ortsbestimmungen im südlichen Europa und auf einigen Küstenpunkten Asiens. S. 323. — Prestel: Beobachtungen über die mit der Höhe zunehmende Temperatur in der unmittelbar auf der Erdoberfläche ruhenden Region der Atmosphäre. (Mit 2 Tafeln).

S. 384. — Reslhuber: Bericht über die am 21. und 29. April 1859 zu Kremsmünster beobachteten Nordlichter. S. 419. — Knochenhauer: Ueber die Theilung des elektrischen Stroms. S. 427. — Winkler: Auszug aus der für die Denkschriften bestimmten Abhandlung: Allgemeine Transformation der bestimmten Doppelintegrale. S. 454.

Nr. 17. Haidinger: Das zweite Jahr der Erdumsegelung Sr. Majestät Fregatte Novara. S. 5.

Nr. 18. v. Lang: Bestimmung der Hauptbrechungsexponenten von Galmei und unterschwefelsaurem Natron. S. 379. — Stefan: Ueber ein neues Gesetz der lebendigen Kräfte in bewegten Flüssigkeiten. S. 420.

Nr. 20. Blaserna, Mach und Peterin: Ueber elektrische Entladung und Induction. S. 477. — J. J. v. Tschudi: Ueber einige elektrische Erscheinungen in den Cordilleras der Westküste Süd-Amerika's. S. 575. — Fritsch: Instruction für phänologische Beobachtungen aus dem Pflanzen- und Thierreiche. S. 591.

Nr. 22. J. J. v. Tschudi: Ueber ein meteorisches Phänomen. S. 787. — Haidinger: Mittheilungen von Herrn J. F. Julius Schmidt über Feuermeteore. S. 803.

Nr. 23. Schnidaritsch: Untersuchungen über die specifische Wärme des Alkohols von verschiedenen Concentrationsgraden. (Mit 2 Tafeln). S. 39. — Unger: Botanische Streifzüge auf dem Gebiete der Culturgeschichte. IV. Die Pflanzen des alten Aegyptens. (Mit 9 Tafeln). S. 69.

Nr. 24. Niemtschik: Ueber die directe Constructions-Methode der vertikalaxigen Krystallgestalten aus Krystallwinkeln. (Mit 3 Tafeln). S. 231. — Reitlinger: Note über eine Beobachtung bei Elektrisir-Maschinen mit zwei Glasscheiben. S. 360. — Weiss: Ueber die Bahn der Ariadne. S. 365.

Nr. 25. Freiherr v. Baumgartner: Ueber den Grund der scheinbaren Abweichung des mechanischen Wärme-Aequivalentes bei verschiedenen Gasen. S. 397. - Simerka: Die trinären Zahlformen und Zahlwerthe. S. 390.

Sitzungsberichte der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrgang 1859. Juli—December. Vergl. Literar. Ber. Nr. CXXXIV. S. 15.

S. 62. Herr Pierre sprach über die von Herrn Dr. M. Roh-

rer in Lemberg eingesandten und in der Sitzung vorgelegten Autographien von verschiedenen Regentropfen und Schneeflocken, welche vom October 1858 bis April 1859 beobachtet worden sind. (Die Mittheilung eines betreffenden Aufsatzes wäre gewiss wünschenswerth). — S. 62. Mittheilungen des Herrn Matzka über die verallgemeinerte Sinusboussole, worüber wir hier nichts weiter sagen, da die betreffende Abhandlung im XXXIV. Theile des Archivs Nr. VI. S. 33. vollständig abgedruckt worden ist. — S. 86. Herr Pierre besprach das Bourdon'sche Metallbarometer und stellte dasselbe namentlich vom mathematischen Standpunkte ausführlicher dar, die physikalische Würdigung desselben einer weiteren Mittheilung vorbehaltend. Auch über diesen Gegenstand dürfte eine ausführlichere Mittheilung wünschenswerth sein.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1859. Nr. 424—539. Mit 2 Tafen. Bern 1859. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CXXXI. S. 10).

L. R. v. Fellenberg: Ueber ein Aräometer für Dichtigkeiten, welche nur um weniges die des Wassers übertreffen. Nr. 424—426.

H. Wild: Notiz über ein neues Photometer und Polarimeter. Nr. 427—429.

H. Wild und G. Sidler: Bestimmung der Elemente der erdmagnetischen Kraft in Bern. Nr. 430—434.

Em. Schinz: Die durch Blasen erzeugten Aspirations-Erscheinungen. Nr. 437—439.

H. H. Denzler: Ueber den Einfluss der Achsendrehung der Erde auf die strömenden Gewässer. Nr. 437—439.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CXXXV. S. 13.).

No. 6. (Novembre e Dicembre 1859).

Fondamenti di una Teorica generale delle funzioni di una variabile complessa di B. Riemann, Traduzione dal Tedesco. (Continuazione e fine). p. 337. — Addizione alla Nota: Sopra alcune proprietà della propagazione della corrente elettrica nei fili

telegrafici, dedotte dalla Teoria di Ohm del Sig. Filippo Keller. p. 357. — Note sur l'équation des differences pour une équation donnée de dégré quelconque par Mr. A. Cayley. p. 365.

Rivista bibliographica. Serie ordinate per fattoriali inversi. Articolo del Prof. A. Genocchi. p. 367. — Pubblicazioni recenti. p. 385. — Errata Corrige del tom. 1°. p. 386. — Indice generale. p. 387.

Anzeige.

Von Herrn Dr. W. Lehmann wird eine ausführlichere Besprechung der Schrift des Herrn Professor Mossbrugger in Aarau über die „Auflösung der algebraischen Gleichungen aller Grade. Aarau. 1859" deren Existenz ich in der vorigen Nummer des Literar. Ber. — jedes Urtheils über dieselbe mich übrigens damals **ausdrücklich** enthaltend*) — vorläufig anzuzeigen mich für verpflichtet hielt, in der nächsten Nummer des Literar. Ber. erscheinen. Dieselbe noch in die vorliegende Nummer aufzunehmen, war bei ihrem Eingang nicht mehr möglich. G.

*) S. Literar. Ber. Nr. CXXXVI. S. 4.

Literarischer Bericht
CXXXVIII.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker von Dr. J. H. T. Müller, Oberschulrath und Director des Real-Gymnasiums zu Wiesbaden. Leipzig. Teubner. 1860. 8°.

Der Herr Verfasser täuscht sich gewiss nicht, wenn er auf S. 5. dieser kleinen Schrift sagt: „es werde vielleicht manchem Philologen wie Mathematiker nicht unwillkommen sein, die technischen Ausdrücke, welche in den mathematischen Werken der Griechen vorkommen, nach einem wissenschaftlichen Plane geordnet und wo nöthig selbst durch Figuren erläutert, als ein Ganzes vor sich zu haben.“ Auch kann man dem Plane, nach welchem er eine solche Terminologie mit einstweiliger Uebergehung der Arithmetik, welche durch Nesselmann's ausgezeichnete Geschichte der Algebra bei den Griechen schon eine sichere Grundlage erhalten habe, zu bearbeiten gedenkt, nur Beifall geben, besonders auch nach der in diesen „Beiträgen“ vorliegenden Probe, in welchen er sich auf die Behandlung der Kugel, des Kegels und Cylinders, des parabolischen und hyperbolischen Konoids und der Sphäroide, unter Einschaltung des lediglich hierfür Erforderlichen aus der Lehre von den Kegelschnitten, beschränkt hat.

Arithmetik.

Auflösung der algebraischen Gleichungen aller Grade, von L. Mossbrugger, Lehrer der Mathematik

an der Kantonsschule zu Aarau. Aarau bei H. R. Sauerländer. 1859. 4°.

Der Verfasser glaubt die allgemeine Auflösung der algebraischen Gleichungen gefunden zu haben. Er hat nicht direct versucht, die Schwäche des Abel'schen Beweises der Unmöglichkeit der gedachten Auflösung nachzuweisen, sondern glaubte sich darauf beschränken zu dürfen, jenen Beweis durch die That zu widerlegen. Er ward durch die Resolvente der allgemeinen kubischen Gleichung auf folgende Induction geführt:

Die gegebene Gleichung des $n$ten Grades, nach Wegschaffung des mit der $n-1$sten Potenz der Unbekannten multiplicirten Gliedes, sei

$$x^n = A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \ldots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n, \quad (1)$$

die Hülfsgleichung aber (welche der Verfasser für die Resolvente hält):

$$\left.\begin{aligned} y^{(n-1)n} = {} & A_n y^{(n-2)n} + Q_{n+1} y^{(n-2)n-1} + Q_{n+2} y^{(n-2)n-2} + \ldots \\ & + Q_{2n} y^{(n-3)n} + Q_{2n+1} y^{(n-3)n-1} + Q_{2n+2} y^{(n-3)n-2} + \ldots \\ & + Q_{3n} y^{(n-4)n} + Q_{3n+1} y^{(n-4)n-1} + Q_{3n+2} y^{(n-4)n-2} + \ldots \\ & + Q_{4n} y^{(n-5)n} + Q_{4n+1} y^{(n-5)n-1} + Q_{4n+2} y^{(n-5)n-2} + \ldots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + Q_{(n-2)n} y^n + Q_{(n-2)n+1} y^{n-1} + Q_{(n-2)n+2} y^{n-2} + \ldots \\ & + Q_{(n-1)n}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wo

$$Q_{n+1} = \frac{A_n A_3}{A_2} + A_2 P_{n-1},$$

$$Q_{n+2} = \frac{A_n A_4}{A_2} + A_3 P_{n-1} + A_2 P_n,$$

$$Q_{n+3} = \frac{A_n A_5}{A_2} + A_4 P_{n-1} + A_3 P_n + A_2 P_{n+1},$$

$$Q_{n+4} = \frac{A_n A_6}{A_2} + A_5 P_{n-1} + A_4 P_n + A_3 P_{n+1} + A_2 P_{n+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_{(n-1)n-2} = A_n P_{(n-2)n-2} + A_{n-1} P_{(n-2)n-1} + A_{n-2} P_{(n-2)n},$$

$$Q_{(n-1)n-1} = A_n P_{(n-2)n-1} + A_{n-1} P_{(n-2)n},$$

$$Q_{(n-1)n} = A_n P_{(n-2)n}$$

gesetzt ist, und P_{n-1}, P_n, $P_{n+1}, \ldots, P_{(n-2)n}$ noch zu bestimmen sind. Soll der Zweck erreicht werden, dass die Resolvente eine Gleichung des n—1sten Grades sei, so sind die $(n-1)(n-2)$ Grössen P_{n-1}, P_n, $P_{n+1}, \ldots, P_{(n-2)n}$ durch die $(n-1)(n-2)$ linearen Gleichungen:

$$Q_{n+1}=0, \quad Q_{n+2}=0, \ldots, Q_{2n-1}=0,$$
$$Q_{2n+1}=0, \quad Q_{2n+2}=0, \ldots, Q_{3n-1}=0,$$
$$Q_{3n+1}=0, \quad Q_{3n+2}=0, \ldots, Q_{4n-1}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Q_{(n-2)n+1}=0, \quad Q_{(n-2)n+2}=0, \ldots, Q_{(n-1)n-1}=0$$

zu bestimmen. Dadurch gehe die Gleichung (2) in die Gleichung

$$y^{(n-1)n} = A_n y^{(n-2)n} - B_{2n} y^{(n-3)n} + B_{3n} y^{(n-4)n} - \ldots.$$
$$\ldots. \pm B_{(n-3)n} y^{2n} \mp B_{(n-2)n} y^n \pm B_{(n-1)n} \qquad (3)$$

über, welche in Beziehung auf y^n vom n—1sten Grade ist. Wird nun die allgemeine Auflösung der Gleichungen des n—1sten Grades vorausgesetzt, so können die n—1 Werthe der Unbekannten y^n der Gleichung (3) als bekannte Grössen angesehen werden, welche in allgemeinen Ausdrücken als Functionen von $A_2, A_3, \ldots, A_n$ dargestellt werden können. Zieht man aus diesen n—1 Werthen die $n$ten Wurzeln, und multiplicirt man alle diese $n$ten Wurzeln mit einer und derselben $n$ten Wurzel aus 1 (z. B., wenn $n=3$ ist, entweder alle mit 1, oder alle mit $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, oder alle mit $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$), so werden dadurch von den $(n-1)n$ Werthen der Unbekannten y der Gleichung (3) $n-1$ Werthe herausgehoben. Diese seien

$$y_1 = \mathfrak{F}_1(A_2, A_3, \ldots, A_n), \quad y_2 = \mathfrak{F}_2(A_2, A_3, \ldots, A_n), \ldots,$$
$$y_{n-1} = \mathfrak{F}_{n-1}(A_2, A_3, \ldots, A_n),$$

und ihre Summe werde mit Sy_1 bezeichnet. Der Verfasser leitet nun aus der Theorie der symmetrischen Functionen eine identische Gleichung

$$(Sy_1)^n = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})(Sy_1)^{n-2} - \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})(Sy_1)^{n-3}$$
$$+ \varphi_3(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})(Sy_1)^{n-4} - \ldots.$$
$$\pm \varphi_{n-2}(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) Sy_1 \mp \varphi_{n-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \quad (4)$$

ab, welche für $n=3$ in

$$(y_1+y_2)^3=3y_1y_2(y_1+y_2)+y_1^3+y_2^3 \qquad (5)$$

und für $n=4$ in

$$(y_1+y_2+y_3)^4=2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)(y_1+y_2+y_3)^2+8y_1y_2y_3(y_1+y_2+y_3)$$
$$+(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^2-2(y_1^4+y_2^4+y_3^4) \qquad (6)$$

übergeht. Aus dem Umstande, dass für $n=3$ die Coefficienten der Gleichung (1) sich aus den Coefficienten der ihr conformen Gleichung (4) auf dieselbe Art ableiten lassen, wie die Coefficienten der Gleichung (4) aus den Coefficienten der Gleichung (1), folgert nun der Verfasser durch Induction, dass auch für $n=4, 5, 6, \ldots$ die Coefficienten der Gleichung (1) sich aus den Coefficienten der Gleichung (4) auf dieselbe Art ableiten lassen, wie die Coefficienten der Gleichung (4) aus den Coefficienten der Gleichung (1), und dass daher

$$S\mathfrak{S}_1(\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}), \quad -\varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}),$$
$$\varphi_3(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}), \ldots, \mp\varphi_{n-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}))$$

eine Wurzel der Gleichung (1) sei; ja er folgert die Identität der Gleichung (1) mit derjenigen Gleichung, welche sich aus (4) so ableiten lässt wie (4) aus (1), aus der Conformität der Gleichung (1) mit der aus (4) abgeleiteten.

Auf das Uebereilte dieser Folgerungen machte mich zuerst Herr Dr. Stader in Berlin aufmerksam (dem ich das Mossbruggersche Werk lieh, gleich nachdem ich es aus dem Buchhandel empfangen), indem er die erwähnte Induction für eine unvollkommene und irrige, den Schluss von der Conformität zweier Gleichungen auf ihre Identität aber für einen solchen erklärte, welchen der Verfasser selbst als trügerisch anerkennen müsse, da er selbst (der Verfasser) die Nicht-Identität der unter sich conformen Gleichungen (1) und (4) wenigstens für $n=3$ (wo er selbst den in der Gleichung (5) vorkommenden Coefficienten $3y_1y_2$ nicht $=A_2$, sondern $=-\frac{3A_3\sqrt[3]{A_3}}{A_2}$ fand, so dass also die numerischen Werthe von A_2 und $3y_1y_2$ entgegengesetzte Zeichen haben) herausshob. Herr Dr. Stader fürchtet jedoch, dass diese Bemerkungen den Verfasser höchstens von der Ungewissheit, nicht aber von der entschiedenen Falschheit seines Resultats und davon überzeugen möchten, dass seine vermeinte Erfindung eine Täuschung sei.

Dass letzterer Zweck erreicht werde, dazu giebt es nach meiner unmaassgeblichen Meinung kein leichteres Mittel als ein von Herrn Dr. Stader nicht vorgeschlagenes, nämlich, für $n, A_2, A_3, \ldots, A_n$ bestimmte numerische, möglichst einfache Werthe zu substituiren. Ich setze $n=4$ (wodurch die Gleichung (2) in

$$y^{12}=A_4y^8-A_4\cdot\frac{2(A_2A_4-A_3^2)^2-A_3^4}{A_2^4}y^4+\frac{A_4^5}{A_2^4} \qquad (7)$$

übergeht). Für A_2, A_3, A_4 wähle ich Werthe, welche den Gleichungen

$$y_1^4=1,\quad y_2^4=1,\quad y_3^4=1 \qquad (8)$$

Genüge thun; ich setze mir nämlich vor, die Gleichung

$$x^4=3\sqrt[4]{3}.x^2+3\sqrt{2\sqrt[4]{3}+\sqrt{2\sqrt{3}+3}}.x+3 \qquad (9)$$

zu lösen. Die Gleichungen (8) geben vier Werthe von y_1, vier Werthe von y_2 und vier Werthe von y_3; unter diesen hebe ich, damit sie alle mit einer und derselben vierten Wurzel aus 1 multiplicirt erscheinen, die Werthe

$$y_1=1,\quad y_2=1,\quad y_3=1$$

heraus. Diese, in die Gleichung (6) substituirt, verwandeln die letztere in

$$(y_1+y_2+y_3)^4=6(y_1+y_2+y_3)^2+8(y_1+y_2+y_3)+3. \qquad (10)$$

Auf ähnliche Art, wie die Gleichung (7) aus (1) gebildet ist, lässt sich aus (10) die Gleichung

$$z^{12}=3z^8-3.\frac{2(6.3-8^2)^2-8^4}{6^4}z^4+\frac{3^5}{6^4},$$

d. i.

$$z^{12}=3z^8-\frac{17}{54}z^4+\frac{3}{16}$$

bilden, welche

$$z_1^4z_2^4z_3^4=\frac{3}{16} \qquad (11)$$

giebt. Entstände nun die Gleichung (9) aus (10) ebenso wie (10) aus (9), so müsste, wie man aus der Gleichung (6) erkennt,

$$A_3=8z_1z_2z_3,\quad \text{also}\quad A_3^4=4096z_1^4z_2^4z_3^4$$

sein, welche letztere Gleichung durch Substitution der (aus (9) und (11) zu entnehmenden) numerischen Werthe in

$$(3\sqrt{2\sqrt[4]{3}+\sqrt{2\sqrt{3}+3}})^4=4096.\frac{3}{16} \qquad (12)$$

und dann (indem man beide Seiten der Gleichung (12) durch 3 dividirt, und nachher beiderseits $81(2\sqrt{3}+1)$ subtrahirt) in

$$108\sqrt[4]{3}\sqrt{2\sqrt{3}+3}=175-162\sqrt{3} \qquad (13)$$

übergeht. Da nun $175=\sqrt{30625}$ und $162\sqrt{3}=\sqrt{78732}$ ist, so ist die rechte Seite der Gleichung (13) negativ, während die linke positiv ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Gleichung, welche aus (10) auf dieselbe Art entsteht, wie (10) aus (9), nicht mit (9) identisch ist, dass also Herrn Mossbrugger's Methode nicht einmal biquadratische Gleichungen richtig löst.

Diese wohlgemeinten Weisungen glaubte ich dem vorliegenden Werkchen zum Abschiede nicht vorenthalten zu dürfen.

Spandow, den 2. Juni 1860.

Dr. Jacob Wilhelm Heinrich Lehmann.

Nachtrag zu der vorstehenden Recension.

Direkter und allgemeiner Beweis, dass der Mossbrugger'sche Algorithmus zur Auflösung der algebraischen Gleichungen aller Grade nicht einmal die Gleichungen des vierten Grades richtig löst.

Von Herrn Doctor Stader in Berlin

Die zu lösende Gleichung hat die Form:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ x^4=Bx^2+Cx+D,$$

die erste Hülfsgleichung lautet:

$$(2) \quad \ldots\ y^{12}=Dy^8-\frac{D}{B^4}[2(BD-C^2)^2-C^4].y^4+\frac{D^5}{B^4},$$

woraus, wenn y_1^4, y_2^4, y_3^4 die Wurzeln dieser in Ansehung von y^4 cubischen Gleichung bedeuten, sich die Relationen:

$$(3) \quad \begin{cases} D=y_1^4+y_2^4+y_3^4, \\ \frac{D}{B^4}[2(BD-C^2)^2-C^4]=y_1^4y_2^4+y_1^4y_3^4+y_2^4y_3^4, \\ \frac{D^5}{B^4}=y_1^4y_2^4y_3^4 \end{cases}$$

ergeben. Die zweite Gleichung vierten Grades ist:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad x^4 = B_1 x^2 + C_1 x + D_1,$$

worin:

$$(5) \quad \begin{cases} B_1 = 2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \\ C_1 = 8 y_1 y_2 y_3, \\ D_1 = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2 - 2(y_1^4 + y_2^4 + y_3^4) \end{cases}$$

gesetzt worden, damit sie durch $x = y_1 + y_2 + y_3$ befriedigt wird.

Die zweite Hülfsgleichung heisst:

$$(6) \quad z^{12} = D_1 z^8 - \frac{D_1}{B_1^4}[2(B_1 D_1 - C_1^2)^2 - C_1^4] . z^4 + \frac{D_1^5}{B_1^4},$$

worin, wenn z_1^4, z_2^4, z_3^4 die drei Wurzeln dieser nach z_1^4 cubischen Gleichung bezeichnen, die Beziehungen:

$$(7) \quad \begin{cases} D_1 = z_1^4 + z_2^4 + z_3^4, \\ \frac{D_1}{B_1^4}[2(B_1 D_1 - C_1^2)^2 - C_1^4] = z_1^4 z_2^4 + z_1^4 z_3^4 + z_2^4 z_3^4, \\ \frac{D_1^5}{B_1^4} = z_1^4 z_2^4 z_3^4 \end{cases}$$

gelten. Endlich heisst die dritte Gleichung vierten Grades:

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad x^4 = B_{II} x^2 + C_{II} x + D_{II},$$

worin

$$(9) \quad \begin{cases} B_{II} = 2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2), \\ C_{II} = 8 z_1 z_2 z_3, \\ D_{II} = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^2 - 2(z_1^4 + z_2^4 + z_3^4) \end{cases}$$

gesetzt worden, damit ihr durch $x = z_1 + z_2 + z_3$ Genüge geschieht.

Nun geht des Verfassers Behauptung dahin, dass

$$B_{II} = B, \quad C_{II} = C, \quad D_{II} = D$$

sei. Zur Widerlegung dieser Behauptung wird der Nachweis genügen, dass C_{II} nicht gleich C sein kann; und zwar gelingt dies einfach dadurch, dass man C und C_{II} explicite als Funktionen der Coefficienten B_1, C_1, D_1 darstellt und den Beweis liefert, dass diese Funktionen von einander verschieden sind. Am raschesten findet sich der fragliche Ausdruck für C_{II}.

Nach (7) und (9) ist:

$$\frac{D_1^5}{B_1^4} = z_1^4 z_2^4 z_3^4 \quad \text{und} \quad C_{''} = 8 z_1 z_2 z_3,$$

daher findet man:

$$(A) \quad \ldots \ldots \quad C_{''}^4 = 8^4 . \frac{D_1^5}{B_1^4}.$$

Dies ist die erste der gesuchten Relationen. Die andere ergiebt sich auf folgende Weise.

Aus der ersten und dritten Gleichung in (5) folgt:

$$(10) \ldots \ldots y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 = \frac{B_1^2 - 4D_1}{8},$$

daher ist nach (3):

$$(11) \ldots \ldots D = \frac{B_1^2 - 4D_1}{8}.$$

Die letzte Gleichung in (3) verbunden mit der zweiten Gleichung in (5) giebt:

$$C_1^4 = 8^4 . \frac{D^5}{B^4}.$$

Wird aus dieser Gleichung vermöge (11) das D eliminirt, so liefert sie, nach B aufgelöst, die Relation:

$$(12) \ldots \ldots B = \frac{B_1^2 - 4D_1}{2C_1} \sqrt[4]{2B_1^2 - 8D_1}.$$

Da nach der ersten Gleichung in (5):

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{B_1}{2},$$

so erhält man durch Quadriren:

$$y_1^2 y_2^2 + y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_3^2 = \frac{B_1^2 - 4(y_1^4 + y_2^4 + y_3^4)}{8}$$

oder vermöge (10):

$$y_1^2 y_2^2 + y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_3^2 = \frac{B_1^2 + 4D_1}{16}.$$

Durch abermaliges Quadriren folgt hieraus:

$$y_1^4 y_2^4 + y_1^4 y_3^4 + y_2^4 y_3^4 = \left(\frac{B_1^2 + 4D_1}{16}\right)^2 - 2y_1^2 y_2^2 y_3^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

oder, wenn man rechts die beziehlichen Werthe aus (5) einträgt und gleichzeitig auf die mittlere Gleichung in (3) achtet:

$$\frac{D}{B^4}[2(BD - C^2)^2 - C^4] = \frac{(B_1^2 + 4D_1)^2 - 4B_1 C_1^2}{4^4}.$$

Werden hierin die in (11) und (12) für D und B gefundenen Werthe eingetragen, so führt die nach C aufgelöste Gleichung auf die nachstehende:

$$(B) \quad \ldots\ldots \quad C^4 = \left(\frac{B_1^2 - 4D_1}{4C_1}\right)^4$$

$$\times \{2C_1\sqrt[4]{2B_1^2 - 8D_1} \pm \sqrt{(B_1^2+4D_1)^2 - 4B_1C_1^2 + 2C_1^2\sqrt{2B_1^2-8D_1}}\}^2,$$

und dies ist die zweite der gesuchten beiden Relationen. Hält man nun beide Resultate in (A) und (B) neben einander, so überzeugt man sich augenblicklich, dass $C_{''}$ nicht $= C$ sein kann; denn während C von allen drei Coefficienten B_1, C_1 und D_1 abhängig ist, erscheint $C_{''}$ gänzlich unabhängig von C_1. Besässe der Ausdruck für C dieselbe Eigenschaft, so müsste sich C_1 durch irgend eine Transformation daraus von selbst entfernen oder wenigstens müsste der Ausdruck für C so beschaffen sein, dass er für $C_1 = 0$ sich entweder unmittelbar in den für $C_{''}$ gefundenen verwandelte oder die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annähme, wofür aber gleichfalls als wahrer Werth sich der von $C_{''}$ zu ergeben hätte. Allein nichts von dem findet Statt, indem C für $C_1 = 0$ unendlich gross wird.

Hieraus ist klar, dass das Mossbrugger'sche Verfahren, welches zwar die Lösung der cubischen Gleichungen richtig finden lässt, schon bei Lösung der Gleichungen vom nächst höheren Grade seine Dienste kündigt.

Berlin, den 12. Juni 1860. Dr. Stader.

Mathematische Lehrstunden von K. H. Schellbach, Professor der Mathematik am Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasium und an der Königl. Kriegs-Akademie zu Berlin. Aufgaben aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten. Bearbeitet und herausgegeben von A. Bode und E. Fischer, Dr. phil. Mit 6 Figurentafeln. Berlin. Reimer. 1860. 8°.

Wir beeilen uns, die Leser des Archivs so bald als möglich auf dieses so eben erschienene Buch aufmerksam zu machen, welches wir für ein treffliches Hülfsmittel zur Förderung des mathematischen und physikalischen Unterrichts halten. Gewiss werden die Leser sich erinnern, dass wir schon oft die Ansicht ausgesprochen haben, dass Lehrsätze und Aufgaben, welche man sonst durch die Hülfsmittel der sogenannten höheren Analysis zu

beweisen und aufzulösen pflegt, mittelst elementarer Methoden bewiesen und aufgelöst, ein treffliches Hülfsmittel zur Belebung des Unterrichts und zur Bildung des mathematischen Geistes und Scharfsinns der Schüler sind; auch haben wir selbst ja schon einige, diese Tendenz habende Aufsätze und Beiträge im Archiv geliefert. Deshalb haben wir uns sehr gefreut, dass wir in dieser ausgezeichneten Schrift eine gleiche Ansicht vertreten finden, indem dieselbe eine reiche Sammlung interessanter Aufgaben über die Maxima und Minima enthält, welche sämmtlich durch elementare Methoden zunächst für die Zwecke des Unterrichts gelöst werden, und auch schon mit Glück und Erfolg bei dem Unterrichte wirklich benutzt worden sind. Natürlich können wir hier diese Aufgaben nicht einzeln angeben, und müssen uns begnügen, zu bemerken, dass dieselben aus den Gebieten der Geometrie mit Einschluss der Stereometrie und beider Trigonometrien, der Mechanik, der Physik mit Einschluss der Astronomie, und, — unter der Ueberschrift: Vermischte Aufgaben, — aus der Theorie der kürzesten Linien und der Isoperimetrie mit sehr umsichtiger und kenntnissreicher Auswahl entnommen sind. Die elementaren Methoden selbst, welche bei der Lösung dieser Aufgaben in Anwendung gekommen sind, haben die Herren Verfasser sehr zweckmässig den Aufgaben selbst jederzeit vorangestellt und überall sehr deutlich erläutert. Demnach sind zuerst Functionen betrachtet worden, aus deren Gestalt sich durch blosse Umformung ihre grössten und kleinsten Werthe ergeben, und hierauf Functionen, deren grösste und kleinste Werthe in bekannter Weise durch Auflösung quadratischer Gleichungen gefunden werden. Sodann wird eine allgemeine Methode, die grössten und kleinsten Werthe beliebiger Functionen mit einer Veränderlichen zu finden, gelehrt. Man weiss, dass vor der Erfindung der Differentialrechnung verschiedene bedeutende Mathematiker Methoden zur Bestimmung der Maxima und Minima auf elementarem, d. h. von der noch nicht erfundenen Differentialrechnung unabhängigem Wege, angegeben haben. Dahin gehört zunächst die Methode von Fermat, welche, nur auf ganze rationale Functionen sich erstreckend, zwischen dem Maximum und Minimum nicht zu unterscheiden vermochte. Diesen Uebelständen suchte Hudde durch eine allgemeinere Methode abzuhelfen, und Huygens, der bekanntlich sich nie recht mit der Differentialrechnung befreunden konnte, gab die schärfere Begründung der genannten Methoden. Tschirnhausen führte die Aufgabe über die Maxima und Minima auf die Bestimmung des Punktes einer Curve zurück, in welchem die Berührende der Abscissenaxe parallel ist. Herrn Professor Schellbach's erwähnte allgemeine Methode dürfte nach unserer Meinung mit Fermat's

Methode die meiste Aehnlichkeit haben, natürlich bei völlig selbstständiger und immer sehr instructiver Anwendung auf die vielen einzelnen interessanten hier gelösten Aufgaben, wobei auch noch Das besonders lobend hervorgehoben werden muss, dass überall zwischen dem Maximum und Minimum gehörig unterschieden wird, und dass auch eine grössere Anzahl von Aufgaben mit mehreren Veränderlichen nicht fehlt. Die Natur unserer literarischen Berichte gestattet uns nicht, auf weiteres Detail einzugehen, und wir müssen uns daher begnügen, alle Lehrer nochmals auf diese sehr ausgezeichnete Schrift dringend aufmerksam zu machen, und Herrn Professor Schellbach zu danken, dass er die Veröffentlichung dieser Resultate seiner Studien gestattete. Ja wir wüssten, um endlich auch noch dies zu bemerken, kaum eine Sammlung von Aufgaben über die Maxima und Minima zu nennen, welche wir mehr als diese jungen Studirenden der Mathematik, die ihre ersten Studien in der Differentialrechnung vollendet haben, empfehlen könnten, um ihre Kräfte an der Auflösung dieser Aufgaben nach den Methoden der Differentialrechnung zu versuchen. Dies gilt neben den geometrischen namentlich auch von den interessanten physikalischen, mechanischen, astronomischen und anderen, eine gewisse Bedeutung für die Praxis habenden Aufgaben, die sich in dieser lehrreichen Sammlung finden *).

Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen. Von Simon Spitzer, Professor an der Wiener Handels-Akademie. Wien. Gerold. 1860. 8°.

Sowohl in diesem Archiv, als auch in anderen mathematischen Zeitschriften hat Herr Spitzer verschiedene werthvolle Untersuchungen über den auf dem Titel genannten wichtigen Gegenstand geliefert. Diese zerstreu'ten Arbeiten legt er dem Publikum hier in einer geordneten Sammlung vor, vermehrt mit einigen noch nicht veröffentlichten Untersuchungen, und hat dadurch einen jedenfalls sehr werthvollen Beitrag zur Integration der Differential-Gleichungen geliefert, wofür wir ihm im Namen der Wissenschaft nur danken können. Im ersten Abschnitte wird die Integration der Differential-Gleichungen von der Form

$$(a_2+b_2x)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1+b_1x)\frac{dy}{dx}+(a_0+b_0x)y=0,$$

*) Wir haben diese Schrift unter die Rubrik „Arithmetik" aufgenommen, wenn sie auch fast eben so gut unter die Rubriken „Geometrie", „Physik" u. s. w. hätte gebracht werden können. Unter die Rubrik „Vermischte Schriften" ist sie absichtlich nicht gebracht worden.

in welcher a_2, a_1, a_0; b_2, b_1, b_0 Constanten sind, geliefert, wo trotz der verdienstlichen Arbeiten anderer Mathematiker Herrn Spitzer noch eine reichliche Nachlese übrig geblieben ist. Der zweite Abschnitt ist der Integration der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$$

gewidmet, welche früher von Scherk, Jacobi, Lobatto, Petzval schon in der einfacheren Form

$$\frac{d^n y}{dx^n} = xy,$$

von Kummer für ein positives ganzes m, von Liouville unter der Form

$$x^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = y$$

behandelt worden ist. Herrn Spitzer gelang es, Gleichungen von der Form

$$x^r \frac{d^n y}{dx^n} = y$$

zu integriren, in allen den Fällen, wo r ganz, positiv und grösser oder gleich $\frac{3n}{2}$ ist; ferner in den Fällen, wo ebenfalls r ganz und positiv, aber kleiner als $\frac{n}{2}$ ist; dann noch in einigen anderen Fällen, wo r ein Bruch mit dem Nenner 2 ist.

Möge die Schrift die recht sehr verdiente Beachtung finden.

Logarithmisch-trigonometrische und andere für Rechner nützliche Tafeln. Zunächst für Schüler technischer Bildungsanstalten, so wie für praktische Rechner überhaupt, von Dr. M. Rühlmann, Professor an der polytechnischen Schule zu Hannover. Sechste Auflage. Leipzig. Arnold. 1859. 20 Ngr.

Diese in kleinem Format nach Art der La Lande'schen Tafeln gedruckten, in der logarithmischen und trigonometrischen Tafel bis auf sechs Decimalen gehenden Tafeln enthalten viel Nützliches und verdienen wegen ihrer Bequemlichkeit praktischen Rechnern recht sehr empfohlen zu werden. Die Logarithmen gehen bis 10080, in der trigonometrischen Tafel schreiten die Winkel von Minute zu Minute fort. Für ganz besonders dankenswerth halten wir Tafel III., die wirklichen Längen der trigonometrischen Linien von Minute zu Minute für den Halb-

messer =1 enthaltend, welche bekanntlich in den meisten Sammlungen dieser Art fehlt*), und doch in vielen Fällen der gewöhnlichen, nicht die grösste Genauigkeit erstrebenden Praxis, wie man wohl in neuerer Zeit immer mehr und mehr erkennt, weit mehr Bequemlichkeit gewährt wie die Tafel der Logarithmen der trigonometrischen Linien. Wir würden diese Tafel nur bis 4, höchstens 5 Decimalen gegeben haben, was in den Fällen der Praxis, wo man überhaupt diese Tafeln in Anwendung bringen möchte, hinreichend sein dürfte. Indess kann ja nun Jeder so viel Decimalen weglassen, wie er für gut findet. Vielleicht möchte es rathsam sein, von dieser Tafel III., bis 4, höchstens 5 Decimalen abgekürzt, einen besonderen, wenige Groschen kostenden Abdruck zu veranstalten, was, um nur eines Falls zu gedenken, u. A. für die jetzt mit vollem Rechte immer mehr in Aufnahme kommenden und sich Geltung verschaffenden landwirthschaftlichen Lehranstalten und Akademieen gewiss sehr nützlich sein und Beifall finden dürfte, weil nach unserer Ueberzeugung es ganz unzweckmässig sein würde, — selbst bei dem Unterrichte in der Trigonometrie — auf diesen Lehranstalten die Schüler viel mit den Logarithmentafeln zu quälen, weil gerade hier nur eine in jeder Beziehung möglichst einfache und möglichst wenige Vorkenntnisse (also etwa nur eine gründliche Kenntniss der Lehre von den Decimalbrüchen) voraussetzende, dessenungeachtet aber überall geistig anregende und bildende **) Theorie, und eine dieser entsprechende eben so einfache, überall möglichst rasch zum gesuchten Resultat führende praktische Anwendung ***) dem mathematischen Unterrichte den gehörigen Erfolg sichern kann. Wir wiederholen daher, dass wir einen besonderen Abdruck von Taf. III. in der oben angegebenen Weise für sehr wünschenswerth halten, um so mehr, weil solche Tafeln verhältnissmässig noch selten sind. Ausserdem enthält die vorliegende Sammlung von Tafeln noch eine Tafel der natürlichen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100, eine Tafel der Kreisumfänge und Kreisinhalte, so wie der Quadrate, Cuben, Quadrat- und Cubikwurzeln der als unbenannte

---

*) Die schönen englischen Tafeln von Sherwin, auch die recht guten Tafeln von Hautschl enthalten dieselben, aber in dem gewöhnlichen unbequemen Format.

**) Was selbst auf solchen rein praktischen Lehranstalten namentlich bei'm mathematischen Unterrichte immer ein Hauptgesichtspunkt sein und bleiben muss.

***) Aber nur keine zu handwerksmässigen ganz mechanischen Hülfsmittel, sogenannte „Knechte" und anderer Trödel dieser Art.

Zahlen gedachten Durchmesser, die Gauss'sche Tafel zur Bestimmung der Höhen mittelst des Barometers, goniometrische und trigonometrische Formeln, eine Tafel einiger oft vorkommenden Zahlenwerthe und eine zweckmässig verfasste Einleitung.

Abriss der Masskunde. Von Johann Rogner. Wien. Gerold. 1860. 8.

Bei der Wichtigkeit einer genaueren Kenntniss der Maasskunde für Jeden in der jetzigen Zeit halten wir uns verpflichtet, Lehrer auf diese kleine Schrift aufmerksam zu machen, welche auf nur 54 Seiten alles Erforderliche nach den neuesten Bestimmungen liefert, namentlich auch mit besonderer Rücksicht auf die Zoll- und Münzvereins-Staaten. Der Inhalt ist folgender: I. Zeiteinheiten. II. Bogen und Winkelmasse. III. Mass-, Gewichts- und Münzeinheiten des metrischen (neu französischen) Masssystems. IV. Mass-, Gewichts-, Münz- und Mengeneinheiten des Kaiserthums Oesterreich und deren Vergleichung mit den metrischen Massen. V. Mass-, Gewichts- und Münzeinheiten verschiedener Staaten und Städte (Baden, Bayern, Belgien, Braunschweig, Bremen, Dänemark, Frankfurt a. M., Frankreich, Griechenland, Grossbritannien, Hamburg, Holland, Kirchenstaat, Köln, Lübeck, Moldau, Nordamerika, Portugal, Preussen, Russland, Sachsen, Sardinien, Schweden, Schweiz, Sizilien, Spanien, Toskana, Türkei, Würtemberg, Zoll- und Münzvereins-Staaten). VI. Wirkliche Grösse verschiedener Längenmaasse (durch gedruckte gerade Linien dargestellt). VII. Specifisches Gewicht oder Dichte verschiedener Körper. — Wir gestehen, dass uns dieses kleine Buch viel besser gefallen und praktischer geschienen hat, als viele andere dickleibige Bücher dieser Art.

Physik.

Von den Versuchen, welche bisher gemacht sind, die Höhe unserer Atmosphäre zu bestimmen. Von Dr. Schlesicke. (Programm des Gymnasiums zu Luckau von Ostern 1860.) Luckau. Entleutner. 1860. 4.

Der Herr Verfasser hat in diesem Programm eine gute Zusammenstellung der verschiedenen, zur Bestimmung der Höhe der Atmosphäre bisher angewandten Methoden gegeben, und dieselben mit Sachkenntniss genauer diskutirt. Eine sehr verdienstliche Berechnung der bekannten Lambert'schen Dämmerungs-Beobachtungen, namentlich in Bezug auf die zweite Dämmerung, hat

Herr Schlesicke auf meine Veranlassung schon früher in den von mir herausgegebenen „Beiträgen zur meteorologischen Optik. Thl. I. Heft II. Leipzig. 1848. S. 252." nach meinen in der Abhandlung: „Ueber die Lehre von der Dämmerung a. a. O. S. 194." gegebenen Formeln geliefert, und dadurch den Beweis geführt, dass auch die zweite Dämmerung, eben so wenig wie die erste, genügend mit einander übereinstimmende Werthe für die Höhe der Atmosphäre giebt, wenigstens bei Zugrundelegung der Lambert'schen Beobachtungen, welche aber, so viel ich weiss, immer noch die einzigen, einigermassen brauchbaren sind, welche es giebt. Auf diese seine selbstständige Arbeit hat Herr Schlesicke mit Recht in dem vorliegenden Programm, das ich der Beachtung der Leser empfehle, besondere Rücksicht genommen.

Nautik.

Leitfaden für den Unterricht in der nautischen Astronomie in der kais. kön. Marine. Von Dr. F. Schaub, Director der kais. kön. Marine-Sternwarte in Triest. Zweite Auflage. Wien. Gerold. 1860. 8.

Die erste, 1853 erschienene Auflage dieses vortrefflichen Leitfadens für den Unterricht der nautischen Astronomie ist im Literar. Ber. Nr. LXXXV. S. 1.—S. 6. in Verbindung mit den eben so vortrefflichen Nautischen Tafeln, der k. k. Kriegsmarine gewidmet. Triest. 1853. 12°., deren Herausgeber bekanntlich Seine kaiserl. königl. Hoheit der durchlauchtigste Herr Erzherzog Ferdinand Maximilian von Oesterreich ist, mit verdientem Lobe angezeigt worden, und wir haben schon damals hervorgehoben, wie sehr sich dieser Leitfaden, bei aller seiner Kürze, Einfachheit der Darstellung und Richtung auf das Praktische, namentlich durch streng wissenschaftliche Haltung und systematische Anordnung vor vielen andern Büchern über nautische Astronomie auszeichnet *). Eine Bearbeitung dieses Leitfadens in italienischer Sprache ist hierauf im Jahre 1856 erschienen und von uns im Literar. Ber. Nr. CVIII. S. 8. angezeigt worden. In der vorliegenden zweiten Auflage des ursprünglichen deutschen Werks hat nun der Herr Verfasser den in der ersten befolgten Gang mit Recht im Wesentlichen ganz beibehalten, hat aber an mehreren

*) Als ein anderes eben so wissenschaftlich gehaltenes, sich nicht bloss auf nautische Astronomie, sondern auf die ganze Schifffahrtskunde erstreckendes Werk haben wir schon öfters vorzugsweise: Traité élémentaire de Navigation par V. Caillet bezeichnet.

Stellen einige erläuternde Zusätze zur Erleichterung des Verständnisses beigefügt, und auch den Stoff durch Hinzufügung einiger neuen Lehren vermehrt. Bei der Zeitbestimmung durch correspondirende Höhen ist nämlich neben der Mittagsverbesserung nun auch die Mitternachtsverbesserung aufgenommen worden. Ferner ist die Berechnung der Breitenverbesserung aus zwei beobachteten Höhen mit Benutzung der Tafel-Differenzen der Logarithmen beigefügt, und endlich hat nun auch bei den Mond-Distanzen die wichtige Borda'sche Methode mit Recht Aufnahme gefunden, weil diese Methode, wenn man auch jetzt verschiedene neuere gute Methoden besitzt, doch schon wegen ihrer Klassicität von historischer Wichtigkeit ist. Eine besonders wichtige Bereicherung gegen die erste Auflage hat die neue Auflage durch Beifügung einer Reihe von Hülfstafeln erhalten, durch welche der Leser in den Stand gesetzt wird, alle im Buche behandelten Aufgaben zu lösen, ohne anderer Behelfe, als einer Logarithmentafel und natürlich einer Ephemeride zu bedürfen. Die Zahl der Tafeln ist 21, nämlich: I. Verwandlung der mittleren Zeit in Sternzeit. II. Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit. III. Mittlere Refraction. IV. Correction der Refraction für Temperatur. V. Correction der Refraction für Barometerstand. VI. Kimmtiefe. VII. Halbmesser und Höhenparallaxe der Sonne. VIII. Logarithmen für correspondirende Sonnenhöhen. IX. Reduction auf den Meridian. X. Breitenbestimmung durch den Polarstern. XI. Vergrösserung des Mondhalbmessers. XII. Verkürzung des vertikalen Halbmessers von Sonne und Mond. XIII. Verkürzung des schrägen Halbmessers von Sonne und Mond. XIV. Correction der Horizontalparallaxe des Mondes wegen Abplattung der Erde. XV. Unterschied der geographischen und geocentrischen Breite. XVI. Erste Verbesserung der durch Approximation berechneten wahren Distanz. XVII. Zweite Verbesserung der durch Approximation berechneten wahren Distanz. XVIII. Halber Tagebogen. XIX. A. Morgen- und Abendweite. B. Correction der Morgen- und Abendweiten wegen Refraction und Kimmtiefe. XX. Halbmonatliche Ungleichheit der Zeiten des Hochwassers. XXI. Vergleichung einiger Längenmaasse. Wie viel Nützliches diese Tafeln enthalten, sieht man aus diesem Verzeichnisse. Wir empfehlen das Buch nochmals recht sehr, und wünschen, dass es auch in dieser neuen Auflage fortfahren möge, zur tüchtigsten wissenschaftlichen Ausbildung der österreichischen Marine zu wirken, um so auch das Seinige dazu beizutragen, dass die Bestrebungen des trefflichen hochgestellten Mannes, welchem der Herr Verfasser es mit Recht gewidmet hat, mit immer schönerem Erfolge gekrönt werden.

Literarischer Bericht
CXXXIX.

Anfang Juni d. J. starb zu Pavia der ausgezeichnete Physiker und Mathematiker, Professor an der dortigen Universität,

Johann Joseph Belli,

correspondirendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Wien und vieler anderer gelehrten Gesellschaften, geboren am 25sten November 1791 in Calasca in Piemont.

Mathematischer und physikalischer Unterricht.

Die uns gütigst mitgetheilte

Anzeige der Vorlesungen der Grossherzoglich Badischen Polytechnischen Schule zu Carlsruhe für das Jahr 1860—61

liefert von Neuem ein sehr anziehendes Bild von der grossartigen Einrichtung dieser berühmten, von einer grossen Anzahl von Schülern besuchten Lehranstalt und der Vollständigkeit des Unterrichts an derselben. Die Schule enthält drei allgemeine mathematische Klassen; ferner sieben Fachschulen, nämlich eine Ingenieurschule, Bauschule, Forstschule, Chemisch-technische Schule, Maschinenbauschule, Handelsschule und eine Postschule; endlich eine aus zwei Klassen bestehende Vorschule; jede Klasse und Fachschule hat ihren besonderen Vorstand. Ausserdem fehlen Allgemein bildende Curse in grosser Anzahl keineswegs, und praktische Uebun-

gen jeder Art natürlich noch weniger; eben so sind Sammlungen und Institute in grosser Anzahl und mit vortrefflichster Ausstattung vorhanden. Die Aufnahmsbedingungen sind ausführlich mitgetheilt, mit einem vollständigen Verzeichnisse aller an der Anstalt wirkenden Lehrer, Vorstände und Directoren nebst den ihnen zugetheilten einzelnen Unterrichtszweigen.

Indem wir für die Mittheilung dieses Programms unsern verbindlichsten Dank aussprechen, ersuchen wir zugleich die Vorstände anderer polytechnischer Lehranstalten recht sehr um ähnliche Mittheilungen, über deren Eingang wir jederzeit im Literarischen Bericht die gebührende Anzeige machen werden. Bei dem grossen Antheile, welchen wir an allen solchen von der Zeit unabweislich geforderten Lehranstalten nehmen, haben alle Mittheilungen dieser Art für uns ein grosses Interesse, und wir glauben uns nicht zu irren, wenn wir annehmen, dass viele Leser unserer Zeitschrift sich in gleichem Falle befinden, und für solche Mittheilungen wie vorstehende uns danken werden. G.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Librorum in Bibliotheca speculae Pulcovensis anno 1858 exeunte contentorum catalogus systematicus. Edendum curavit et praefatus est Otto Struve, munere directoris speculae Pulcovensis fungens, Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae socius. Petropoli. 1860. 8° maj.

Wir beeilen uns die Leser des Archivs auf diesen so eben erschienenen, 970 Seiten im grössten Octav-Format umfassenden Catalog der grossen mathematisch-astronomisch-physikalischen Bibliothek der Pulkowaer Sternwarte aufmerksam zu machen, welcher keineswegs für einen blossen Büchercatalog zu halten, sondern nach unserer Meinung vielmehr als ein sehr wichtiges Hülfsmittel für die Kenntniss der älteren und neueren Literatur der genannten Wissenschaften zu betrachten ist, für dessen Publication Herr Otto Struve jedenfalls den grössten Dank und die grösste Anerkennung verdient. Weshalb dieser Catalog nach unserer Meinung für die mathematisch-astronomische Literatur so wichtig ist, wird sich sogleich ganz von selbst ergeben, wenn wir über seine Einrichtung etwas genauer berichtet haben werden.

Der grosse Reichthum der hier verzeichneten Schriften aus allen Jahrhunderten findet in der Zahl von 970 Seiten im grössten Octav-Format, welche der Catalog umfasst, ohne weitere Auseinandersetzung seine Bestätigung. — Hiernach aber ist hauptsächlich die bis in's kleinste Detail gehende systematische Anordnung hervorzuheben, so dass ein Jeder, wer sich über irgend eine Partie eine literarische Uebersicht verschaffen und die in dieselbe einschlagenden Schriften kennen lernen will, den betreffenden Artikel bloss aufzuschlagen braucht, um seinen Zweck auf der Stelle zu erreichen. Wer, um nur ein Beispiel anzuführen, über die Cometen-Literatur Belehrung sucht, findet auf S. 761—818, also auf 57 Seiten, das Verzeichniss einer Sammlung von Schriften über die Cometen, welche gewiss die grösste und vollständigste ist, die es überhaupt giebt. Hier findet er nun aber im Speciellen wieder zuerst: Generaliora de Cometis. Dann Cometae periodici, worin alle mit Sicherheit als periodisch erkannte Cometen (acht an der Zahl) nach ihren einzelnen Entdeckern in chronologischer Folge verzeichnet sind. Den Reihen dieser Cometen beginnt: Cometa Halley nach folgenden einzelnen Hauptabschnitten: Apparitiones antiquiores, Apparitio 1531, Apparitio 1607, Apparitio 1682, Apparitiones 1759 et 1835 atque disquisitiones recentes. Allein über diesen Cometen sind 132 Schriften verzeichnet. Auf die periodischen Cometen folgen Cometae reliqui, worin die Literatur über wenigstens 150 nach der Zeitfolge geordnete Cometen enthalten ist. — Endlich muss nun aber noch ein Umstand hervorgehoben werden, welcher diesem Catalog einen besonderen sehr grossen literarischen Werth verleihet. Es sind nämlich in demselben nicht bloss alle einzeln, abgesondert für sich, erschienenen Schriften, sondern auch alle wichtigeren Abhandlungen, die in den im Besitz der Bibliothek der Sternwarte befindlichen Journalen und Zeitschriften, so wie in den Schriften gelehrter Gesellschaften und Akademieen abgedruckt sind, verzeichnet, wodurch derselbe ein wahres Repertorium für solche Abhandlungen und eins der wichtigsten literarischen Hülfsmittel namentlich für alle diejenigen geworden ist, welche sich nicht selbst in den Besitz solcher grossen Sammelwerke setzen oder eine unmittelbare Einsicht in dieselben verschaffen können.

Die Beschränktheit des Raumes verbietet uns, mehr zur allgemeinen Charakterisirung dieses wichtigen literarischen Werkes zu sagen, weshalb wir uns begnügen müssen, nur noch die folgende Uebersicht der Hauptrubriken des Inhalts mitzutheilen: **Catalogus librorum majorum**. p. 1—262. — Auctores classici, graeci et romani, mathematici, astronomi, physici, alii, secundum ordinem alphabeticum. — Opera auctorum recentiorum se-

cundum ordinem alphabeticum. — Lexica disciplinarum mathematicarum et physicarum. — Mathesis. p. 33—69. (Cursus et compendia Matheseos universae. Analysis finitorum. Geometria. Trigonometria. Analysis infinitorum. Theoria combinatoria. Calculus probabilitatis et Mathesis forensis. Mechanica. Tabulae mathematicae.) — Astronomia. p. 70—200. (in 33 einzelnen Unterabtheilungen). — Geodaesia. p. 201—214. — Physice. p. 215—231. (mit Einschluss der Optik). — Libri periodici et Acta societatum. p. 232—246. — Historia literaria et rel. p. 247—262. — **Catalogus librorum minorum et dissertationum.** p. 265—818. et p. 831—857. — Disciplinae mathematicae. p. 265—319. (in 11 Unterabtheilungen). — Disciplinae astronomicae. p. 319—389. (18 Unterabtheilungen). — Catalogi fixarum, Ephemerides, Tabulae. p. 390—404. — Terra. p. 404—463. — Sol et luna. p. 464—479. — Eclipses, occultationes, transitus. p. 480—507. — Determinatio locorum geographica. p. 508—526. — Planetae. p. 526—548. — Stellae fixae. p. 548—577. — Observationes earumque subsidia. p. 578—637. — Disciplinae physicae. p. 637—706. (24 Unterabtheilungen). — Historia literaria. p. 706—760. (Höchst interessant ist in dieser Abtheilung die Biographia, in welcher biographische Schriften über ungefähr 420 mehr oder weniger berühmte Mathematiker, Astronomen, Physiker und Künstler verzeichnet sind, jedenfalls eine für die Geschichte der genannten Wissenschaften höchst wichtige Sammlung). — Catalogus dissertationum cometographicarum. p. 761—818. — Ein höchst vollständiges, nach den Autoren geordnetes Register auf 107 Seiten beschliesst das wichtige Werk.

Es wird uns sehr freuen, wenn es uns gelingt, durch die obigen Mittheilungen die Aufmerksamkeit unserer Leser auf das vorliegende wichtige literar-historische Werk zu lenken. Die Vorrede liefert auf S. I.—XXIV. eine ausführliche Darlegung über die Art der Anfertigung desselben und die Entstehung der jedenfalls sehr merkwürdigen Bibliothek der Sternwarte zu Pulkowa. Wir haben den auf die Herausgabe dieses Werkes verwandten Fleiss und die grosse Umsicht und Gelehrsamkeit, mit welcher dieselbe bewerkstelligt worden ist, lebhaft bewundert, und sagen Herrn Otto Struve im Namen der Wissenschaft den wärmsten Dank, dass er sich dieser mühevollen Arbeit so erfolgreich unterzogen hat. Grunert.

Arithmetik.

Multiplications-Tabellen aller Zahlen von 1 bis 500. Ein Hülfsbuch für Geometer, Baumeister, Forstmänner und überhaupt alle, die viel zu rechnen haben, zur schnelleren Erlangung richtiger Resultate bei'm Multipliciren und Dividiren. Oldenburg (Schulze'sche Buchhandlung). 1860. 8.

Diese Multiplicationstafeln, deren Einrichtung uns einfach und bequem zu sein scheint, enthalten unmittelbar die Producte mit zwei ganzzahligen Factoren, wenn der eine der beiden Factoren nicht grösser als 500, der andere nicht grösser als 509 ist. Will man Producte mit grösseren Factoren, die nicht mehr innerhalb der Gränzen der Tafel liegen, bilden, so muss man sich hierzu bekannter einfacher Hülfsmittel bedienen, zu deren Anwendung die übrigens nur kurze Einleitung eine zweckmässige Anweisung enthält. Diese Tafeln gehen nicht so weit wie die in zweiter Auflage erschienenen bekannten Crelle'schen Tafeln, ihr Format ist aber weit bequemer, bei übrigens völlig untadelhafter äusseren Ausstattung; auch möchte die den Tafeln gegebene Ausdehnung für die meisten praktischen Arbeiten hinreichend sein. Ueber die überaus einfache Einrichtung giebt die Einleitung die nöthige Auskunft. Der Herr Verfasser oder Herausgeber hat sich nirgends genannt. Im Vorwort wird aber bemerkt, dass die Einrichtung ganz der Einrichtung der schon im Jahre 1805 in Paris in kl. 4°. erschienenen Tables de multiplication — (die uns nicht weiter bekannt geworden sind) — ähnlich sei, welche nicht bloss in Frankreich, sondern auch bei'm preussischen Kataster in Rheinland und Westphalen, und ebenso bei der allgemeinen Landesvermessung im Grossherzogthum Oldenburg, insbesondere bei Flächenberechnungen, mit Vorliebe gebraucht würden, indem bei derartigen Arbeiten selten grössere Factoren in Frage kämen. Für die Correctheit wird garantirt. Uns selbst haben diese Tafeln recht wohl gefallen, wir halten dieselben für recht praktisch und empfehlen sie daher zur sorgfältigen Beachtung, indem wir bei dieser Gelegenheit zugleich auch die empfehlenswerthe, die 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9fachen aller Zahlen von 1 bis 100000 enthaltende Productentafel von C. A. Bretschneider. Hamburg und Gotha. 1841, welche im Literar. Ber. Nr. III. S. 50. angezeigt worden ist, aber nicht die wohl verdiente hinreichende Verbreitung gefunden zu haben scheint, wieder in Erinnerung bringen wollen.

Astronomie.

Grosse Sonnenfinsterniss vom 18ten Juli 1860.

Die grosse Sonnenfinsterniss vom 18ten Juli 1860 hat einen ungewöhnlichen Eifer, eine ungewöhnlich grosse Betheiligung bei ihrer Beobachtung, namentlich in den Gegenden, wo sie total war, hervorgerufen. Es scheint daher wohl angemessen, in diesen literarischen Berichten über dieselbe einige Mittheilungen zu machen aus Journalen und Zeitschriften, welche nicht jedem Leser des Archivs leicht zugänglich sein dürften, freilich mit grosser Einschränkung, welche durch den geringen Raum uns unabweislich geboten ist.

Fragt man zunächst nach der Ursache des so grossen Eifers bei der Beobachtung einer keineswegs sehr ungewöhnlichen Erscheinung, und ob derselbe in einer solchen Weise berechtigt sei, so müssen wir diese letztere Frage jedenfalls aus vollster Ueberzeugung bejahend beantworten. Denn können wir irgendwie einige Hoffnung haben, über die eigenthümliche Natur unsers Centralkörpers einigermassen Aufschluss zu erhalten, so ist dieselbe lediglich aus der sorgfältigen Beobachtung totaler Sonnenfinsternisse zu schöpfen. Soll aber diese Hoffnung auf einem sicheren Fundamente ruhen, so wird es natürlich zunächst und vor allen Dingen darauf ankommen, über den Grund der bei totalen Sonnenfinsternissen dem Beschauer sich darbietenden grossartigen Erscheinungen, namentlich darüber zu gehöriger Klarheit zu kommen, wo dieselben ihren eigentlichen Sitz haben, oder — mit anderen Worten, — ob dieselben der Sonne angehören oder dem Monde. Denn nur, oder wenigstens vorzugsweise, dann, wenn das Erstere der Fall ist, wird die oben angedeutete Hoffnung wirkliche Berechtigung in sich tragen, wogegen im letzteren Falle die Erscheinungen in Rücksicht auf die Sonne nur mehr secundärer Natur sein würden.

Was also nun die Frage betrifft, ob die bei totalen Sonnenfinsternissen sich darbietenden so unendlich grossartigen Erscheinungen, die sogenannten Protuberanzen, die Corona u. s. w. der Sonne angehören oder dem Monde; so wird auf deren Entscheidung die Beobachtung totaler Sonnenfinsternisse zunächst ihr Augenmerk zu richten haben. In der That ist bisher immer das Erstere angenommen, der Grund der Protuberanzen, der Corona u. s. w. in einer die Sonne umgebenden besonderen Atmosphäre oder Photosphäre und dergl., welche begreiflicherweise nur bei totaler Verfinsterung der Sonne

zur Erscheinung kommen kann, gesucht worden, und nur erst späterhin hat sich hieneben eine zweite Ansicht geltend zu machen versucht, nach welcher die genannten Erscheinungen bloss optischer Natur sein, auf Licht-Interferenzen, Licht-Beugungen an den Mondbergen u. dergl. beruhen, in Bezug auf die eigenthümliche Natur der Sonne also durchaus nur secundär sein sollen. Bei dem grossen Interesse, welches ich von jeher an den in Rede stehenden Erscheinungen genommen, habe ich, so viel es mir irgend möglich gewesen ist, Alles, was über dieselben zu meiner Kenntniss gelangt ist, sorgfältig zu verfolgen gesucht, habe aber nirgends einen nur mit einiger wirklich überzeugenden Kraft für die letztere Ansicht sprechenden triftigen Grund, sondern bis jetzt meistens in dieser Beziehung nur allgemeine Redensarten gefunden, und gestehe gern, dass **ich**, die unendliche Grossartigkeit der hier dem erstaunten Beobachter im Weltraume sich darbietenden Erscheinungen vollkommen begreifend, schon aus allgemeinen Gründen zu einer in Bezug auf diese Grossartigkeit so wenig wahrscheinlichen Ansicht mich nie auch nur im Entferntesten habe bekennen können, ohne übrigens dabei das Recht, welches in der Naturwissenschaft jede Ansicht hat, den Versuch, sich geltend zu machen, wagen zu dürfen, auch nur im Geringsten und einen Augenblick zu verkennen oder in Zweifel ziehen zu wollen. Will man aber nun gar daraus, dass sich etwa durch optische Versuche in physikalischen Kabinetten auf einer hölzernen Kugel und dergl. einigermassen ähnliche Erscheinungen hervorrufen lassen, nun gleich ohne Weiteres den Schluss ziehen, dass diesen Erscheinungen jene unendlich grossartigen Erscheinungen im Weltraume congruent sind: so beruhet ein solcher Schluss wahrlich auf einer sehr schwachen Logik, über die hier nichts weiter zu sagen ist. Nur Beobachtungen der totalen Sonnenfinsternisse selbst sind geeignet und berechtigt, eine einigermassen sichere Entscheidung herbeizuführen, und solche Beobachtungen dürfen nicht mit Fernröhren von ganz untergeordneter Wirkung, wie sie allenfalls jeder Liebhaber der Astronomie besitzt oder sich leicht zu verschaffen im Stande ist, angestellt werden, sondern erfordern grossartigere Hülfsmittel, wie sie zu meiner grossen Freude in der That auch bei der Finsterniss vom 18. Juli, im richtigen Verständniss der Sache, wirklich vielfach in Anwendung gebracht worden sind, wobei der treffliche Director der Sternwarte in Madrid, Herr Antonio de Aguilar, in einer die wärmste Anerkennung verdienenden Weise, hülfreiche Hand geleistet hat*).

---

*) M. s. z. B. den Bericht des berühmten Directors der Sternwarte des Collegio romano (in Rom) Herrn P. Angelo Secchi (della

Sehr beherzigenswerth ist gewiss für solche, nur **mit Hülfsmitteln** von ganz untergeordneter Bedeutung versehene **Beobachter**, deren Beobachtungen eben deshalb gar nicht berechtigt **sind bei diesen Dingen***) mitzusprechen, und nur sehr wenig **Glauben** verdienen, das, was Herr Le Verrier in der Sitzung der Pariser Akademie der Wissenschaften vom 13. August 1860 in dieser Beziehung mit vollstem Rechte sagte, worüber der Cosmos 17e. Vol. 7e Livraison. p. 224. folgende Mittheilung enthält: „M. Le Verrier exprime ensuite quelques doutes ou quelques craintes: la suprise **et le faible pouvoir optique de leur lunette** auront pu tromper quelques astronomes, et il est convenable de ne se fier qu' aux instruments de puissance suffisante et aux mesures prises par des astronomes exercés." Welche Ansicht Herr Le Verrier über die Erscheinungen selbst hat, werden wir nachher sehen.

Wie ist denn nun die obige Frage durch die Beobachtungen der Finsterniss vom 18. Juli entschieden worden, so weit die Nachrichten bis jetzt reichen? werden die Leser des Archivs fragen. Ein erster in vieler Beziehung sehr interessanter, verständig verfasster Bericht von einem ungenannten Hannoveraner findet sich in der Berlinischen (Vossischen) Zeitung. 1860. Nr. 178. Mittwoch den 1. August. Erste Beilage. S. 2. Darin heisst es wörtlich also: „Für die Wissenschaft ist aus diesen Beobachtungen zunächst **festgestellt** — mindestens waren die Astronomen, welche am Abend des 18. in Vittoria eine Versammlung hielten, darüber einig, — **dass die Protuberanzen der Sonne angehören und nicht etwa dem Monde oder unserer Atmosphäre**, wie bis jetzt von manchen Astronomen angenommen wurde. Die Protuberanzen, welche zu Vittoria beobachtet wurden — es erschienen nach Eintritt der totalen Finsterniss noch drei — standen fest wie ungeheure Berge im glänzendsten Lichte, und der Mond zog über sie hinweg. — Da

---

compagnia di Gesù), in den Comptes rendus. 1860. Tom. LI. No. 5. p. 156. 160.

*) Solche mit nur ganz geringen Fernröhren versehene Liebhaber der Astronomie mögen, wenn sie verständig im Dienste der Wissenschaft arbeiten und wahrhaft Anerkennungswerthes für dieselbe leisten wollen, den im Archiv Thl. XXXIV. S. 249. Nr. XII. mitgetheilten schönen Aufsatz des Herrn von Littrow, und einen lehrreichen Aufsatz von Argelander im Jahrbuche für 1844. Herausgegeben von Schumacher. Stuttgart und Tübingen. 1844. S. 122. beherzigen.

mag denn doch wohl manchem der mondsüchtigen Herren das Herz etwas geklopft haben, als unser Trabant in stiller Majestät über die unverrückt feststehenden Protuberanzen hinwegzog! — Nachdem in der schon erwähnten Sitzung der Pariser Akademie Herr Babinet den Bericht des Herrn Goldschmidt gelesen hatte: **M. Le Verrier** demande à résumer au tableau, et à l'aide de figures, l'ensemble des phénomènes observées, et les résultats acquis qui en sont les conséquences, en ce qui concerne au moins les protubérances qu'il considère seules aujourd'hui, laissant pour une autre occassion, s'il y a lieu, la discussion de ce qui concerne l'auréole. **Ces résultats, au nombre de deux, sont importants, le premier est que les protubérances rouges sont des nuages flottants dans une atmosphère, le second que ces nuages appartiennent à l'atmosphère solaire ou au soleil.**

Von dem grössten Interesse ist der von Herrn Secchi, welcher zu Desierto de las Palmas, vielfach unterstützt von Herrn Aguilar, beobachtete, der Pariser Akademie erstattete Bericht (Comptes rendus a. a. O. p. 156.). Dieser Bericht ist im vorliegenden Falle um so wichtiger, weil Herr Secchi namentlich in optisch-astronomischen Dingen eine der grössten und ersten, allgemein und freudigst anerkannten Autoritäten ist. Auf p. 160. sagt der genannte berühmte Astronom: „Dans ces moments-là*), ma conviction sur la nature de ce que je voyais fut, que le phénomène était réel et que je voyais vraiment des flammes dans l'atmosphère solaire et des nuages suspendus dans ces flammes; **il m'aurait été impossible d'imaginer autre chose, comme par exemple, que cela pût être un phénomène quelconque de diffraction ou de réfraction.**"

„La graduation si nette et le mélange si sensible de la lumière de couleur fleur de pêcher, avec le blanc de ce que nous appelons photosphère, était d'un caractère tout autre que celui que j'aie vu dans les phénomènes de diffraction, d'interférence et de réfraction, et tout à fait hors des limites des illusions quelconques. Je ne doute donc pas qu'elles ne soient réellement propres au soleil, et la structure de ces nuages suspendus achève de fortifier ma conviction."

---

*) Als sich nämlich die Protuberanzen in grösster Schönheit gezeigt hatten.

In einer weiteren Mittheilung in den Comptes rendus. 1860. Nr. 8. p. 276. giebt Herr Secchi auch von Versuchen Nachricht, die er angestellt hat, und sagt u. A. p. 277. Folgendes: „La couronne elle-même près du bord solaire et les protubérances ont été tout à fait inimitables avec les différents moyens, que j'ai essayés: les franges ainsi produites à l'extérieur sont très limitées et d'un caractère tout à fait différent de la couronne; et les prominences que j'ai produites avec des boules couvertes de cristaux et d'autres matières ont été aussi d'une teinte et de caractères optiques parfaitement différents des protubérances solaires, et je n'ai **pu réussir à rien produire de semblable.**“ Gewiss eine sehr wichtige Mittheilung von einem so ausgezeichneten Beobachter.

Ein so bestimmt ausgesprochenes Urtheil einer der ersten Autoritäten in diesen Dingen ist doch wohl maassgebend und für jetzt entscheidend; auf so gewichtige Autoritäten muss und kann man sich im vorliegenden Falle vorläufig aber allein verlassen.

Ich bedauere, dass die Beschränktheit des Raums mir weitere Mittheilungen, die ich späteren literarischen Berichten vorbehalten muss, für jetzt nicht gestattet. Indess sind solche Autoritäten wie die vorhergehenden schon völlig hinreichend, um uns für die Richtigkeit des nach der Mittheilung unsers obigen Hannoveraners von dem am Abend des 18. Juli in Vittoria zusammengetretenen astronomischen Congress gethanen Ausspruchs für jetzt eine nicht abzuweisende Gewähr zu leisten:

„dass nämlich die Protuberanzen der Sonne und nicht dem Monde angehören.“

Besondere Mittheilungen über die Corona oder Aureole behalten wir uns vor.

Wir freuen uns dieses Resultats wahrhaft im Interesse der herrlichen astronomischen Wissenschaft, da wir uns nun mit noch grösserem Muthe*) der oben ausgesprochenen Hoffnung hingeben können, dass fortgesetzte eifrige und, so oft sich Gelegenheit darbietet, wiederholte Beobachtungen totaler Sonnenfinsternisse zu sicheren Aufschlüssen über die eigentliche Natur unseres Centralkörpers führen

*) Den wir übrigens zu verlieren bis jetzt nie irgend welche Ursach oder Veranlassung gehabt haben.

werden. Natürlich werden diese Erscheinungen, nachdem man zu dem obigen Resultate gelangt ist, immer noch an Interesse gewinnen und noch mehr wahre Astronomen als schon jetzt zu ihrer genauen Beobachtung Anregung und Aufforderung finden.

Grunert.

Nachschrift.

Herr Faye in Paris gehört auch zu den Anhängern der sogenannten optischen Theorie, worüber er sich im Cosmos. 1860. 17e. Vol. 11e Livr. p. 326. ausspricht. Der Herausgeber, Herr Moigno, fügt seiner Mittheilung Folgendes bei: „M. Faye, on le voit, est impitoyable. Il nie tout, atmosphère solaire, nuages roses etc. etc.; il répousse carrément les conclusions qu'ont tirées spontanément de ce qu'ils ont vu, M. le Verrier, M. Warren de la Rue, le R. P. Secchi, etc. etc." Dieses Negiren ist freilich eine sehr leichte Sache, und es ist gut und ganz recht, dass Herr Moigno Herrn Faye so abfertigt.

Nachdem ich vorstehendes Referat nach den mir bis jetzt vorliegenden glaubwürdigen und beachtungswerthen Mittheilungen so eben geendet, geht mir, wahrscheinlich von ihrem Verfasser, Herrn Professor Plantamour in Genf, dem ich dafür verbindlichst danke, die folgende Schrift zu:

Observation de l'éclipse totale du soleil du 18. Juillet 1860 à Castellon de la Plana (Espagne), par M. le Professeur Plantamour.

Dieser in vielfacher Beziehung interessante Bericht eines ausgezeichneten Astronomen verdient jedenfalls Beachtung vorzüglich auch deshalb, weil derselbe mit einem nach der gegebenen Beschreibung jedenfalls vorzüglichen Instrumente (une exellente lunette de Ramsden, appartenant à l'observatoire, d'une ouverture de 58 millimètres, à laquelle était adapté un micromètre à angle de position, avec un oculaire de Merz donnant un grossissement de trente fois etc., natürlich mit genauer parallactischer Aufstellung, die hier nie entbehrt werden kann) beobachtete. Dieser Schrift sind auch drei sehr schöne farbige Zeichnungen beigegeben, welche derselben noch einen ganz besonderen Werth verleihen, so dass dieselbe unter allen Bedingungen zu sorgfältigster Beachtung empfohlen werden muss, wenn sie auch für jetzt wohl nur als eine vorläufige Mittheilung zu betrachten ist. Nachdem ich so eben vorher, gestützt auf Aussprüche und Mittheilungen allgemein anerkannter Astro-

nomen, meine Ueberzeugung dahin ausgesprochen habe, dass die Protuberanzen u. s. w. der Sonne angehören, ist es, nachdem mir jetzt eben erst die vorliegende Schrift zugegangen, einem so tüchtigen, von mir jederzeit hochgeachteten Astronomen, wie Herrn Professor Plantamour, gegenüber, meine Pflicht, zu bemerken, dass derselbe durch seine Beobachtungen jetzt zu der entgegengesetzten Ansicht gekommen zu sein meint. Auf S. 8. heisst es: „Il est résulté pour moi, de l'observation de léclipse du 18. Juillet, l'impression d'autant plus vive que je m'y attendais moins, que tous ces phénomènes, tels que la couronne, les faisceaux de rayons et les protubérances ne sont pas des phénomènes existant réellement autour du soleil, qui deviennent visibles parce que la lune cache le disque même du soleil, et qui changent seulement par le fait que cet écran en masque ou démasque alternativement telle ou telle partie, mais que ce sont des phénomènes lumineux produits par l'écran qui s'interpose dans la direction des rayons solaires, et que leur modification dépend de la position plus ou moins rapprochée de l'observateur du cône tangent aux disques du soleil et de la lune."

Der Herr Verfasser führt auf S. 9.—S. 11. die Gründe, die ihn zu vorstehender Ansicht bestimmen, theilweise gestützt auf sorgfältige Rechnungen an, worin wir ihm aber hier für jetzt der Beschränktheit des Raums wegen nicht weiter folgen können, sondern die Leser auf die beachtenswerthe Schrift*) selbst verweisen müssen, nachdem wir, einem so ausgezeichneten Beobachter und Astronomen gegenüber, der Pflicht, auch unserer eigenen Ansicht entgegenstehende Ansichten hier mitzutheilen, genügt haben, indem wir an diesem Orte, unsere eigene Ueberzeugung übrigens nie zurückhaltend, bei solchen Dingen vorzugsweise und zunächst hier nur als Berichterstatter auftreten können. Wir danken Herrn Plantamour nochmals für die uns mitgetheilte Schrift, wenn wir uns auch nicht zu seiner Ansicht bekennen können. G.

Vermischte Schriften.

Monatsbericht der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin. S. Literar. Ber. Nr. CXXXVI. S. 11.

Februar 1860. Hagen: Ueber Wasserwellen bei begrenz-

*) Wahrscheinlich besonders abgedruckt aus der Bibliothèque universelle.

ter und constanter Tiefe. S. 51—52. [Herr H. schliesst seine kurze Mittheilung mit den Worten: „Es entsteht daher die Frage, ob unter Zugrundelegung elliptischer Bahnen der geometrischen Bedingung — (dass in der Wassermasse nirgend ein leerer Raum und nirgend Ueberfüllung eintreten darf) — genügt und zugleich dieselbe Schwingungszeit für alle unter einander liegende Schichten dargestellt werden kann. Es ergiebt sich, dass dies allerdings möglich ist, wenn 1) die absolute Geschwindigkeit jedes Wassertheilchens constant, und 2) die Differenz zwischen den grossen und kleinen Axen in allen Bahnen desselben Systems gleichfalls constant ist"]. — Dove: Ueber die barometrischen Extreme des Jahres 1859. S. 83—86. (Das Jahr 1859 zeichnet sich durch ungewöhnliche Schwankungen des Luftdrucks aus, was es wünschenswerth macht, dass diese einer umfassenden Untersuchung unterworfen werden. Die Ergebnisse der Beobachtungen des preussischen meteorologischen Instituts, welches Norddeutschland mit Ausnahme Sachsens umfasst, liefert Herr D. in diesem Aufsatze). — Dove: Ueber die Nichtidentität der Abgüsse verschiedener Metalle in derselben Form. S. 87.

März 1860. Dove: Ueber die Darstellung der Interferenz-Farben aus den Interferenzen in verschiedener homogener Beleuchtung und künstliche Nachbildung des Dichroismus. S. 104—118. (Eines kurzen Auszugs ist dieser interessante Aufsatz nicht fähig; sein Inhalt ist durch seine Ueberschrift mit hinreichender Deutlichkeit bezeichnet). — Ehrenberg: Vorläufige Mittheilung über einen sehr merkwürdigen Meteorstaubfall in Jerusalem mit grossem Orkan am 8—9 Februar d. J. S. 121. — Encke: Ueber die Auf- und Untergänge der Sterne und der Sonne bei den Alten. S. 122—133. (Eine zwar nur kurze, aber gründliche Untersuchung über den fraglichen Gegenstand, über den bekanntlich namentlich schon J. F. Pfaff eine sehr werthvolle Abhandlung geliefert hat). — Dove: Ueber Dichroismus. S. 135. — G. Rose: Bemerkungen über das Vorkommen des Diamants in Brasilien. S. 137. — Ehrenberg: Ueber zwei Staub-Meteore aus Westphalen und Syrien sammt deren Vergleichung mit dem Passatstaube und mit zwei neuen centralafrikanischen Oberflächen-Erden. S. 137—157. — Dove: Ueber die polarisirende Wirkung des Amethyst, in der Richtung der Axe desselben. S. 157.

April 1860. Du Bois-Reymond: Ueber ein durch den Strom hervorgerufenes Widerstandsphänomen an den feuchten porösen Körpern. S. 172. — Ehrenberg: Beiträge zur Beurtheilung der wunderbaren japanischen Glaspflanze, der sogenannten Corallenthier-Gattung Hyalonema und der Familie der Hyalo-

chaetiden. S. 173—182. (Wenn auch weniger in den Kreis des Archivs gehörend, doch allgemein interessant, weil Herr E. auf S. 181. die sogenannte wunderbare japanische Glaspflanze, einen federbuschartigen und kostbaren Schmuck der dortigen Einwohner, auf S. 181. für ein japanisches Kunstproduct erklärt). — Reuschle: Tafeln der Zerfällung aller Primzahlen innerhalb des ersten Tausend in ihre aus eilften und aus dreizehnten Wurzeln der Einheit gebildeten primären complexen Primfactoren, vorgelegt von Herrn Kummer. S. 190—199. (Fortsetzung der unter dem 13. Juni und 14. November vorigen Jahres mitgetheilten Tafeln). — Ehrenberg: Ueber den am 24.—25. Januar 1859 auf das amerikanische Schiff Derby bei den Capverden gefallenen Passatstaub. S. 203—208.

Mai 1860. Dieses Heft enthält keine in den Kreis des Archivs gehörenden Aufsätze; jedoch wollen wir aufmerksam machen auf: Bunsen: Ueber ein neues dem Kalium nahestehendes Metall, mitgetheilt von Herrn du Bois-Reymond. S. 221—223.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CXXXVII. S. 15.)

Nr. 1. (Gennaro e Febbraro 1860.) Memorie intorno ad alcune questione Matematiche di A. Dorna. p. 5. — Applicazione del discriminante nullo alle risoluzioni di alcuni problemi, di M. Azzarelli. p. 16. — Mémoire sur la théorie géométrique des surfaces du second ordre. Par Ch. Meray. p. 30.

Rivista bibliographica. Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite. Articolo del Prof. Genocchi. p. 52. — Lettera del Prof. Giusto Bellavitis al Prof. B. Tortolini. p. 60. — Pubblicazioni recenti. p. 64.

No. 2. (Marzo e Aprile 1860.) La Teorica delle funzioni ellitiche, e sue applicazioni. Monografia del Prof. Enrico Betti. p. 65.

Preisaufgaben der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Brüssel.

1. Généraliser le théorème de Sturm en l'étendant à un système de deux équations à deux inconnues.

2. Trouver et discuter l'intégrale de l'équation des lignes de

courbure à la surface lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux droites, qui se coupent, est constante.

3. Déterminer, à l'aide d'experiences nouvelles, si une quantité donnée de travail mécanique peut développer constamment une même quantité de chaleur, et réciproquement si une même quantité de chaleur est susceptible de produire la même quantité de travail mécanique.

4. On démande si le principe de Joule est applicable aux effets de la poudre dans les bouches de feu. Dans la négative ou dans l'affirmative, déterminer les conditions des mouvements des gaz produits par la déflagration de la poudre dans l'âme des bouches à feu et, subsidiairement, dans d'autres circonstances.

Le prix du concours pour la première et la troisième question sera de quinze cents francs; le prix pour la deuxième et pour la quatrième sera de mille francs.

Les concurrents addresseront leurs ouvrages au Département de l'intérieur*) avant le 20. Septembre 1862.

Le jugement du concours se fera conformément aux dispositions qui régissent les concours pour les prix quinquennaux établis par l'arreté royal du 6. Juillet 1851.

Sitzungsberichte der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrgang 1860. Januar—Juni. Vergl. Literar. Ber. Nr. CXXXVII. S. 14.

S. 11. Herr Pierre besprach den bekannten Leidenfrostschen Versuch und wies ihn ebenfalls demonstrativ nach. Man hat bisher geglaubt, dass bei diesem Versuche zwischen der Flüssigkeit und den Wänden des stark erhitzten Gefässes gar keine Berührung stattfindet. Dies ist jedoch nach Herrn Pierre nicht richtig, vielmehr scheint nichts übrig zu bleiben, als eine, wenn auch sehr geringe Adhäsion zwischen Metall und Flüssigkeit zuzugeben. Des Weiteren wegen müssen wir auf die Mittheilung

*) Es sind dies nämlich ausserordentliche Preisaufgaben, die durch ein besonderes arrêté royal vom 31. Mai 1860 gestellt werden. Daher die Einsendung an das Département de l'intérieur. In dem arrêté royal vom 20. Novembre 1851 heisst es: Tout ouvrage est admis au concours s'il est publié en Belgique, s'il est entièrement achevé et si l'auteur est Belge de naissance ou naturalisé.

selbst verweisen. — S. 20. Herr kais. Rath Kulik hielt einen Vortrag über den 11ten Grundsatz des Euklides und versuchte denselben auf neue Art zu beweisen. Der Beweis stützt sich, wie schon früher ähnliche Beweise, auf die Vergleichung unendlicher Winkelräume. Der vor drei Jahren verstorbene Professor Joseph Ladislav Jandera, welcher die Mathematik an der Universität in Prag länger als 50 Jahre mit solchem Erfolge lehrte, dass die Mehrzahl der mathematischen Lehrkanzeln in der Monarchie von seinen Schülern besetzt werden konnte, hat sich vielfach und langjährig mit der Aufsuchung eines bündigen Beweises für das 11te Axion beschäftigt, bis jetzt aber nichts über seine Untersuchungen bekannt gemacht, weshalb allerdings Mittheilungen aus den hinterlassenen Papieren dieses sehr gründlichen Mathematikers, welche sich in den Händen des hochwürdigen Herrn Strahover Prälaten Dr. Hieronymus Zeidler befinden, wünschenswerth sein würden. — S. 92. macht Herr Karlinski Mittheilungen über den neuen Planeten Hestia und über dessen Auffindung in geschichtlicher Beziehung, indem er zugleich von ihm berechnete oskulirende Elemente dieses neuen Planeten giebt. — S. 93. Von dem k. k. Artillerie-Hauptmann Herrn August Kržiž, welcher mehrere Jahre hindurch als Artillerie-Instructeur in Teheran fungirte und die Würde eines k. persischen Generals bekleidete, in mehreren Gegenden Persiens mit grossem Fleisse und grosser Genauigkeit ausgeführte Höhenmessungen, nebst anderen dort angestellten Beobachtungen werden mitgetheilt. — S. 98. Auf einen auch in physikalischer Rücksicht interessanten, wenn auch eigentlich physiologischen, aber doch ohne tiefere physiologische Kenntnisse allgemein verständlichen Aufsatz von Herrn Purkyně über seine Versuche über die Coincidenz gleicher Gehörempfindungen im Hinterhaupte (I. Historische Vorbemerkung. II. Versuch über die endocephale Coincidenz des Schalles durch die beiden Gehörorgane) machen wir aufmerksam. — S. 102. Eine von dem obengenannten Herrn Hauptmann A. Kržiž eingesandte Abbildung eines in Teheran befindlichen altpersischen Astrolabiums ward vorgelegt, und die spätere Mittheilung eines dasselbe betreffenden Aufsatzes versprochen, welcher wir mit Interesse entgegensehen. — Natürlich kann hier nur über den mathematischen und physikalischen Inhalt dieser Sitzungsberichte referirt werden. Ausserdem enthalten dieselben des Interessanten noch sehr viel.

Literarischer Bericht

CXL.

Am 10ten Mai 1860 starb zu Zürich der ordentliche Professor der Mathematik an der dortigen Universität,

Dr. Anton Müller,

vorher bis 1837 Privatdocent an der Universität in Heidelberg. Das Archiv verdankt demselben einen werthvollen Beitrag in Thl. XVI. Nr. I.

Elementare mathematische Lehrbücher.

Die Fluth der elementaren mathematischen Lehrbücher ist gegenwärtig eine ungeheuer grosse, da jetzt, wie es scheint, jeder Lehrer an einer höheren Unterrichtsanstalt für seinen Unterricht ein eigenes Lehrbuch schreibt. Jedenfalls ist dieser Eifer ein sehr erfreulicher und kann von Keinem mehr geachtet werden als von uns. Auch ist es ganz gut, wenn jeder geschickte Lehrer, der seinen eigenen Gang zu gehen gewohnt ist, sein eigenes Lehrbuch hat, und bei keinem Lehrgegenstande dürfte es nach unserer innigsten Ueberzeugung unzweckmässiger, ja selbst gefährlicher sein, den Unterricht durch viele sehr in's Einzelne gehende Vorschriften und Verordnungen regeln und in einen bestimmten Weg lenken zu wollen, als gerade bei dem mathematischen. So sehr wir aber auch den jetzt zu Tage tretenden grossen Eifer in der Verfassung und Herausgabe elementarer mathematischer Lehrbücher ehren und achten, so erfreulich derselbe auch uns selbst in jeder Beziehung ist: so ist doch der unsern literarischen Berichten zugemessene Raum viel zu eng und viel zu klein, um allen diesen literarischen Productionen unsere Aufmerksamkeit in gebührender Weise mit der nöthigen Ausführlichkeit widmen zu können. Wir sind daher genöthigt, zu einem schon früher einmal

von uns gebrauchten und näher angedeuteten Auskunftsmittel zu greifen, dass wir nämlich diejenigen unter den Schriften der obigen Gattung, welche uns vorzugsweise Beachtung zu verdienen scheinen, herausgreifen und bloss dem Titel nach, vielleicht unter Beifügung einiger ganz kurzer Notizen, anzeigen; zur weiteren Vervollständigung werden dann hoffentlich die verschiedenen Nummern unserer Bibliographie geeignet sein.

Für Handels-Lehranstalten, so wie auch für den Selbstunterricht in der kaufmännischen Arithmetik, scheint uns alle Empfehlung zu verdienen das so eben erschienene, sehr praktisch gehaltene und sehr ausführliche

Lehrbuch der kaufmännischen Arithmetik. Zum Gebrauche für Handels-Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Von Dr. E. Kaulich, Lehrer an der höheren Handels-Lehranstalt zu Prag. Prag. Credner. 1860. 8.

Durch wissenschaftliche Strenge zeichnen sich jedenfalls aus und verdienen alle Beachtung:

Die Elemente der Mathematik. Von Dr. Richard Baltzer, Oberlehrer am städtischen Gymnasium zu Dresden. Erster Band. Gemeine Arithmetik, allgemeine Arithmetik und Algebra. Leipzig. Hirzel. 1860. 8.

worin zugleich ein grosser Schatz sehr dankenswerther historischer und literarischer Notizen enthalten ist.

Eben so ist ein sehr löbliches Streben nach wissenschaftlicher Strenge und gründlicher Darstellung deutlich zu erkennen in dem

Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten von Hermann Grassmann, Professor am Gymnasium zu Stettin. Erster Theil. Arithmetik. Stettin. R. Grassmann. 1860. 8.

Die Lehrbücher von Dr. B. Feaux, Oberlehrer am Gymnasium zu Paderborn, von denen uns jetzt zwei Abtheilungen, welche die Buchstabenrechnung und Algebra und die Planimetrie enthalten, in zweiter vermehrter Auflage (Paderborn. Schöningh. 1859 und 1860) vorliegen, haben wir schon früher als sehr beachtenswerthe Leistungen bezeichnet und selbst einige Auszüge aus denselben mitgetheilt. Wir wiederholen unser früheres Urtheil und finden dasselbe durch das baldige Erscheinen neuer Auflagen bestätigt.

Ferner erwähnen wir:

Lehrbuch der Mathematik. Für den Schul- und Selbstunterricht bearbeitet von Dr. Hermann Gerlach, Lehrer am Gymnasium zu Parchim. Erster Cursus der Arithmetik. Zweiter Cursus der Arithmetik. Elemente der Planimetrie. Elemente der ebenen Trigonometrie. Dessau. Aue. 1860.

Ein sehr zu empfehlendes, auch die sogenannte neuere Geometrie in sehr verständiger und zweckmässiger Weise berücksichtigendes Lehrbuch der Geometrie scheinen uns zu sein:

Die Elemente der Geometrie, für den Selbstunterricht bearbeitet von Heinrich Seeger, Lehrer der Mathematik an der Realschule zu Güstrow. Schwerin. 1860. 8.

welches auch einige sehr bemerkenswerthe Anhänge über verschiedene Aufgaben, grösstes gemeinschaftliches Maass, Commensurabilität und Incommensurabilität in der Geometrie, und in der Vorrede viele sehr verständige und einsichtsvolle, den denkenden Lehrer bekundende didaktische und pädagogische Bemerkungen enthält.

(Fortsetzung folgt.)

Arithmetik.

Die Multiplication mit Vortheil, nebst besonderer Erörterung von Vortheilen bei der abgekürzten Multiplication. In letzter Hinsicht eine Ergänzung zu allen bisherigen Lehrbüchern der Arithmetik. Von Johann Rogner. Wien. Gerold. 1860. 8.

Wir glauben im Interesse des Unterrichts in der Arithmetik unsere Leser auf dieses Schriftchen aufmerksam machen zu müssen, weil in demselben mehrere beachtenswerthe Vortheile bei der Multiplication erörtert sind, was wir keineswegs bloss im Interesse des gewöhnlichen praktischen Rechnens thun. Denn da alle solche Vortheile natürlich auf bestimmten theoretischen Gründen beruhen, so muss die Erläuterung und Erörterung derselben dem Lehrer nothwendig eine sehr erwünschte Gelegenheit geben, die Schüler auf das Gebiet einer an sich sehr einfachen Theorie zu führen und dadurch die bildende Kraft des Unterrichts in der Arithmetik zu erhöhen, wobei es natürlich nicht ausbleiben wird, dass die Schüler auch immer mehr und mehr mit der eigentlichen

Natur des Zahlensystems vertraut gemacht werden, was bei dem betreffenden Unterrichte uns immer als ein sehr zu beachtender und nie aus den Augen zu verlierender Gesichtspunkt erschienen ist. Hierzu scheint, wie gesagt, das vorliegende Schriftchen, für dessen Veröffentlichung der Herr Verfasser jedenfalls Dank verdient, neben seinem praktischen Nutzen jedenfalls ein sehr zweckmässiges Hülfsmittel darzubieten. Der Inhalt der Hauptabschnitte ist folgender: I. Vortheile bei der Multiplication in ganzen Zahlen und endlichen Decimalbrüchen, wenn das vollständige Product verlangt wird. II. Die abgekürzte Multiplication in ganzen Zahlen und Decimalbrüchen. III. Vortheile bei der abgekürzten Multiplication. — Beispiele zur Erläuterung sind in reichlichem Maasse beigefügt.

Astronomie.

Grosse Sonnenfinsterniss vom 18. Juli 1860. (M. s. Literarischer Bericht Nr. CXXXIX. S. 6.)

Im Literarischen Berichte Nr. CXXXIX. S. 11. haben wir die Schrift des Herrn Professor Plantamour über die grosse Sonnenfinsterniss vom 18ten Juli 1860 angezeigt und schon damals bemerkt, dass wir dessen Ansichten über die betreffenden Erscheinungen, bei aller unserer grossen Achtung vor diesem ausgezeichneten Astronomen, nicht beitreten können, sondern nach wie vor her es jetzt als vollständig erwiesen betrachten,

dass die Protuberanzen der Sonne und nicht dem Monde angehören

und dass es namentlich mit der sogenannten „Optischen Theorie" nichts ist. Herr Secchi hat Herrn Plantamour's Ansichten einer eingehenden Kritik unterworfen, die wir zu der unsrigen machen, und aus dem Cosmos. IXe Année. 17e Volume. 16e Livraison. pag. 468. nachfolgend mittheilen:

„M. Plantamour croit trouver un argument à l'appui de la théorie purement optique des protubérances, dans ce fait que leur disparition ou leur occultation avait lieu dans une proportion très différente de celle qui correspond au mouvement de la lune. Il vit vers le milieu de l'éclipse disparaitre la proéminence en forme de nuage, située à 45 degrés, et dont la distance au bord de la lune avait été estimée par lui à une demi-minute au moins, au commencement de la totalité. Comme en raison de sa position le disque de la lune ne se rapprochait que de 11″ par minute, il

en concluait qu'à l'instant où la protubérance s'évanouit, la lune ne l'avait pas réellement touchée. Ce raisonnement de l'astronome génevois serait juste si les bases sur lesquelles il l'appuie subsitaient; mais les photographies *) disent le contraire, et **font voir à quelles grandes illusions sont sujettes ces estimations optiques.** De fait la première photographie faite un petit nombre de secondes avant le commencement de la totalité, montre le limbe de la lune en contact avec la pointe inférieure de la nuée; d'où l'on peut conclure que la distance estimée par M. Plantamour, à une demi-minute au moins, est certainement exagérée, et que la différence est bien supérieure à celle qui devait faire naître l'effet de parallaxe dû à la très-petite distance qui nous séparait. La seconde circonstance, que la proéminence se serait évanouie vers le milieu de l'éclipse, ne subsiste pas non plus; parceque son sommet s'est clairément inprimé dans la troisième photographie obtenue 10″ à peine avant la fin de la totalité. Comment une semblable équivoque à-t-elle pu se produire, pour un astronome aussi exercé? Pour moi **), l'explication est très simple; la protubérance avait échappé à sa vue parcequ'il avait cessé de la fixer directement; il est désormais plus que prouvé qu'en si grande presse beaucoup de choses ne se voient pas quoiqu'elles soient dans le champ de la vision, lorsqu'on ne les regarde pas directement. Aucune des protubérances lumineuses n'avaient plus de 1′.30″; et ainsi se trouve expliqué pourquoi, au commencement et à la fin de la totalité, les photographies montrent un arc assez étendu sans proéminences lumineuses du coté d'ou vient la lune ou vers lequel elle va; pendant qu'on voit surgir évidemment sur plusieurs points quelques-unes de celles appelées par nous faibles et qui sont plus hautes. De fait, la différence des diamètres étant de 95″, les protubérances plus hautes que 95″ ne pouvaient pas rester entièrement couvertes. M. Plantamour cherche une autre preuve de sa théorie dans l'apparition des petits faisceaux lumineux qui s'échappent de chaque protubérance et qu'il a figurés dans son dessin; mais ces dessins, mon opinion est qu'il faut les interpréter avec quelque indulgence, parce que

---

*) Wir legen auf diese Photographien bei diesem Gegenstande einen sehr grossen Werth und grosses Gewicht, und freuen uns sehr, in dieser Ansicht mit Herrn Encke zusammenzutreffen, wie wir uns einer von demselben in der Berliner Akademie der Wissenschaften gehaltenen Rede glauben schliessen zu dürfen, die uns freilich bis jetzt nur in kurzem Auszuge in den Zeitungen vorliegt.

**) Auch für mich. G.

je n'ai rien vu de ce qu'ils représentent, et que les photographies indiquent seulement une clarté plus grande de la couronne dans le voisinage des protubérances; et peut-être est-ce là seulement ce qu'ont voulu indiquer ces dessins qui, au reste, sont faits tout au plus pour donner une idée des phénomènes, sans aucune prétention à une précision quelconque, comme le montrent les limites entaillées de la couronne intérieure, limites qui certainement n'existaient pas de fait, car ces limites ou bords s'effaçaient par gradations insensibles."

„La seule circonstance, dont l'explication est encore entourée de quelque difficulté, est le fait, signalé par moi et aussi par MM. de la Rue, Plantamour, Goldschmidt, de proéminences ayant changé de teinte ou de nuance, en arrivant au contact de la lune; mon opinion est que ces changements ne sont qu'un effet de contraste."

So weit Herr Secchi, dessen Autorität in solchen Dingen eine sehr grosse und allgemein anerkannte ist.

Auch in der diesjährigen Naturforscher-Versammlung in Königsberg ist der sogenannten „optischen Theorie" ihr wohl verdientes Sterbe-Glöcklein sehr helltönend und vernehmlich geläutet worden. Laut des uns vorliegenden Tageblatts Nr. 5. sprach sich in der Sitzung der Section für Astronomie und Mathematik vom 19ten September der Vorsitzende, Herr Staatsrath Mädler, ganz bestimmt dahin aus: „dass **beide** Phänomene, **die Protuberanzen und die Corona***) in einem engen physischen Zusammenhange mit dem Sonnenkörper sebst stehen, und dass der von Andern herangezogene Mondrand oder die, die Erscheinungen veranlassen sollende Erdatmosphäre höchstens einen modificirenden Einfluss auf dieselben haben können"**).

Ferner sagte Herr Mädler: „Künstliche Sonnenfinsternisse sind für das Studium dieser Erscheinungen schon desshalb ganz ungeeignet, weil bei ihnen der die Sonne verdeckende Gegenstand von der erleuchteten Atmosphäre umgeben, bei wirklichen Finsternissen ausserhalb derselben befindlich ist." „Auf diese allein also", so fährt das Tageblatt fort, „weiset Herr Mädler Alle hin, welche die Constitution der Sonnenhülle erforschen wollen, zeigt aber, dass man nach den in Spanien über Sichtbarkeit der

*) Also auch die Corona. G.

**) Also, wie wir in unserem früheren Berichte sagten, durchaus nur secundärer Natur sind und mit den Erscheinungen selbst gar nichts zu thun haben. G.

Protuberanzen gemachten Erfahrungen hoffen darf, die hieher gehörigen Beobachtungen zum Theil auch bei Sonnenfinsternissen anstellen zu können, die nur nahe total sind."

Fast wörtlich dasselbe haben wir über solche künstliche Nachbildungen im vorigen Literarischen Berichte gesagt, und wiederholen hier ausdrücklich nochmals, dass wir dieselben und die auf dieselben basirten Vergleichungen mit den wirklichen, so unendlich grossartigen Erscheinungen im Weltraume nur als Beweise einer sehr schwachen Logik ansehen können. Zu verhindern aber, dass Dergleichen in die Wissenschaft eingeschmuggelt werde, gehört mit zu den Aufgaben der Journalistik, und nur dieser Aufgabe wollen wir durch unsere Bemerkungen und Mittheilungen hier einigermaassen genügen. Von Männern, wie Argelander, Feldt, Hencke u. A., die in der Sitzung der astronomisch-mathematischen Section vom 19ten September zugegen waren, ist nach Ausweis des Tageblatts den von Herrn Mädler dargelegten Ansichten in keiner Weise widersprochen worden.

Sapienti sat!

Denn nach so vielen vollgültigen Zeugnissen, durch welche der Satz:

> dass die Protuberanzen (und die Corona) in einem engen physischen Zusammenhange mit dem Sonnenkörper selbst stehen und dass es mit der sogenannten optischen Theorie nichts ist,

jetzt als bewiesen zu betrachten ist, halte ich es nicht mehr für nöthig, noch öfter auf diesen Gegenstand in den in ihrem Raume sehr beschränkten Literarischen Berichten zurückzukommen. Jedoch werde ich den Lesern des Archivs jedenfalls nicht das Vergnügen entziehen, wahrscheinlich schon im nächsten Hefte ihnen den wesentlichen Inhalt des wichtigen, der petersburger Akademie der Wissenschaften erstatteten Berichts über die in Spanien angestellten Beobachtungen mitzutheilen, dessen baldige Zusendung — bei völliger Uebereinstimmung mit meinen eigenen, im vorigen Literarischen Berichte ausgesprochenen Ansichten in allen wesentlichen Punkten, — mir mit besonderer Freundlichkeit zugesagt worden ist, wofür ich schon im Voraus hier verbindlichst danke *). Grunert.

---

*) Als ich eben diese Nummer des Literarischen Berichts geschlossen habe, geht mir noch der von Herrn Otto Struve der petersburger Akademie über die Sonnenfinsterniss erstattete wichtige und höchst interessante Bericht zu, über den ich weitere Mittheilungen der nächsten Nummer vorbehalten muss. G.

So eben geht mir noch die Mittheilung zu, für welche ich gleichfalls verbindlichst danke, dass Herr Professor Dr. Hornstein an der k. k. Sternwarte in Wien im Mai d. J. angefangen hat, regelmässige Sonnenflecken-Beobachtungen in solcher Weise anzustellen, dass dadurch an jedem einzelnen Beobachtungstage ein möglichst getreues Bild der sichtbaren Hemisphäre erhalten wird. Zu diesen Beobachtungen ist ein besonders construirter Projections-Apparat mit dem sechszölligen Fraunhofer'schen Refractor verbunden worden, welcher auf einer weissen Papierfläche ein Sonnenbild von nahe 188 Millimeter Durchmesser, zugleich aber auch ein Bild des in dem Fernrohre angebrachten Glasmikrometers liefert, wobei zugleich die Einrichtung so getroffen ist, dass das Bild der ganzen Sonne gleichzeitig auf der weissen Fläche erscheint. Eine sehr sorgfältige Reihe von Beobachtungen und Messungen mit diesem Apparat hat Herr H. am Tage der grossen Sonnenfinsterniss (18ten Juli) angestellt, insbesondere genaue Messungen jener Flecken und Fackelgruppen, welche zur Zeit der Sonnenfinsterniss nicht sehr weit vom scheinbaren Sonnenrande waren. Wir halten uns für verpflichtet, auf diese sehr verdienstlichen Beobachtungen, die wegen ihrer Genauigkeit jedenfalls alle Beachtung verdienen, und den betreffenden, auch in theoretischer Rücksicht interessanten Aufsatz, welcher nebst einer genauen Zeichnung der grössten Fleckengruppe am Ostrande der Sonne zur Zeit der totalen Finsterniss unter der Ueberschrift: Sonnenflecken-Beobachtungen im Juli 1860 in den Astronomischen Nachrichten abgedruckt ist, besonders aufmerksam zu machen, und stimmen Herrn H. vollkommen bei, wenn er am Ende seines verdienstlichen Aufsatzes sagt: „Eine sorgfältige Vergleichung der hier gegebenen Fleckenpositionen mit den Stellen des Sonnenrandes, wo sich vornehmlich Lichterscheinungen während der totalen Finsterniss gezeigt haben, wird vielleicht einen Beitrag zur genaueren Erforschung der Natur dieser Phänomene und ihres vermutheten Zusammenhangs mit den Sonnenflecken liefern", also, setzen wir noch hinzu, **des unzweifelhaften engen Zusammenhangs dieser merkwürdigen Phänomene mit der eigenthümlichen Natur und Constitution des Sonnenkörpers.**

Herrn Hornstein gebührt jedenfalls aller Dank für seine sorgfältigen Beobachtungen und die dazu mit Hülfe solcher ausgezeichneter Künstler, wie Gust. Starke und Plössl in Wien, construirten besonderen Apparate zu denselben. G.

Kalender für alle Stände. 1861. Herausgegeben von Karl v. Littrow, Director der Sternwarte in Wien. Mit einer Sternkarte. Wien. Carl Gerold. 8°.

Unter dem fast zu bescheidenen Titel: „Kalender für alle Stände" liegt uns hier ein, übrigens schon seit 31 Jahren bestehendes und segensreich wirkendes Jahrbuch vor, welches nicht bloss den gewöhnlichen kalendarischen Bedürfnissen in ausgezeichneter Weise entspricht, sondern auch ein, Liebhabern der Astronomie Alles, was dieselben nur wünschen können, leistendes, in der zweckmässigsten Weise eingerichtetes Handbuch ist, welches die allgemeinste Empfehlung um so mehr verdient, weil keines der Jahrbücher noch besteht, welche für ähnliche Zwecke Schumacher, Harding, Boguslawski u. A. herausgaben. In kalendarischer Rücksicht enthält dasselbe mit allen nöthigen Erläuterungen einen sehr vollständigen Kalender der Katholiken, Protestanten, Griechen, Juden und Türken, nebst einer grossen Anzahl lehrreicher historischer Erinnerungen; auch die Evangelien der Katholiken, Protestanten und Griechen fehlen eben so wenig wie Alles, was man sonst in einem Kalender zu finden gewohnt ist. In astronomischer Rücksicht, die für uns bei dieser Anzeige von besonderer Bedeutung ist, liefert uns der Herr Verfasser zuerst für jeden Tag den Stand der Uhr im wahren Mittage bis auf Zehntheile der Secunde genau. Dann enthält das treffliche Büchlein eine Ephemeride für die Sonne und den Mond, die uns für alle Tage die Länge, die Abweichung, den Aufgang und den Untergang beider Himmelskörper bis auf Minuten genau giebt. Ferner wird dem Liebhaber der Astronomie eine, seinen Bedürfnissen völlig genügende Ephemeride der Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn und Uranus geboten, in Rücksicht auf heliocentrische Länge, gerade Aufsteigung, Abweichung und Culmination, gleichfalls Alles bis auf Minuten genau. Endlich enthalten zwölf Tafeln, für jeden Monat eine besondere, alle nur irgend bemerkenswerthen Himmelserscheinungen, welche für den Liebhaber der Astronomie irgendwie von Interesse sein können. Eine Oppositions-Ephemeride der älteren Asteroiden und eine Dämmerungs-Tabelle, welche Anfang und Ende des Zwielichts und des Tages enthält, schliessen die eigentlichen astronomischen Ephemeriden in der zweckmässigsten Weise. Alle Angaben beziehen sich für mittlere Zeit auf den Meridian von Wien, was der allgemeinen Verbreitung des Buchs nicht den mindesten Eintrag thun kann, da jede Ephemeride nun doch irgend einen bestimmten Meridian zu Grunde legen muss, und die Reductionen auf jeden anderen Meridian, die natürlich auch dem

Liebhaber nie erlassen werden können, bekanntlich sehr leicht sind. Ausser der astronomischen Ephemeride enthält dieses Jahrbuch nun noch sehr viel Lehrreiches und für den Liebhaber der Astronomie Nothwendiges. Neben der Sternkarte machen wir in dieser Beziehung aufmerksam auf die überaus vollständige und genaue Uebersicht des Sonnensystems und die Geschichte der letzten Entdeckungen; auf das Verzeichniss der seit 1854 erschienenen Kometen, als Fortsetzung des allgemeinen Verzeichnisses im Jahrgange 1855; auf die sehr interessante Beschreibung des grossen (Donati'schen) Kometen vom Jahre 1858; auf die Geschichte der praktischen Astronomie, auf Eble's Stundenzeiger, das beste gemeinfassliche Instrument zur Uhren-Regulirung, und auf die meteorologischen Beobachtungen an der k. k. Sternwarte in Wien vom Jahre 1859, mit Rücksicht auf Barometerstand, Wärme, Spannkraft der Dünste, Windstärke und Bewölkung, Höhe des Niederschlags, Vertheilung der Windsrichtungen, Ansicht des Himmels, nebst einer allgemeinen meteorologischen Charakterisirung des Jahrs. Ein Inhalts-Verzeichniss der letzten zehn Jahrgänge zeugt für das Streben des Herrn Herausgebers, alljährlich Neues und Interessantes zu bieten. Eine sehr verständliche Anleitung zum Gebrauch der Ephemeride fehlt natürlich nicht.

Wir halten diesen Kalender für das beste astronomische Jahrbuch, welches wir Liebhabern der Astronomie gegenwärtig empfehlen können, und möchten auf dasselbe auch sehr für den Gebrauch auf solchen Schulen hinweisen, wo populäre Astronomie und mathematische Geographie besondere Gegenstände des Unterrichts sind, und der Lehrer, wie sehr zu wünschen ist, nicht unterlässt, die Schüler praktisch mit dem Himmel bekannt zu machen, natürlich nach unserer Ansicht keineswegs rücksichtlich blosser Sternkenntniss, sondern wissenschaftlich mit Rücksicht auf die astronomisch-mathematische Bedeutung der Gestirne und den Gebrauch, der in der wissenschaftlichen Astronomie von denselben gemacht wird, wobei natürlich eine Ephemeride wie die vorliegende, welche alles Nothwendige mit für solche Zwecke völlig ausreichender Genauigkeit bietet, unbedingt zur Hand sein muss. Bitten möchten wir den Herrn Verfasser, mit Rücksicht auf den letzteren, von uns sehr gewünschten Gebrauch seines so sehr empfehlenswerthen Büchleins, nur noch, in dem folgenden Jahrgange auch einmal eine kleine Tafel der mittleren Positionen der Hauptsterne zu liefern, wenn eine solche, was wir jetzt nicht ermitteln können, nicht vielleicht schon in einem der früheren Jahrgänge enthalten ist, eine, von Zeit zu Zeit überdies nothwendige, Wiederholung derselben übrigens nicht schaden kann, da ja dazu nur etwa zwei Seiten erforderlich sein würden.

Möge das Büchlein alle von uns gewünschte Verbreitung finden; der Nutzen wird gewiss nicht ausbleiben.

Pulkowaer Beobachtungen des grossen Cometen von 1858. Erste Abtheilung. Beobachtungen am Refractor, angestellt von Otto Struve, Mitgliede der Akademie. Zweite Abtheilung. Beobachtungen am Heliometer nebst Untersuchungen über die Natur des Cometen, von Dr. A. Winnecke, Adjunct-Astronomen der Hauptsternwarte. Mit 6 Tafeln. St. Petersburg, (Leopold Voss in Leipzig). 1859.

Je mehr der grosse Comet von 1858 die Aufmerksamkeit der ganzen Welt auf sich zog, und je mehr sich unsere Leser desselben noch mit dem grössten Interesse erinnern werden: desto mehr müssen wir dieselben auf die vorliegende treffliche Schrift aufmerksam machen, die — gegründet auf die an der grossen russischen Haupt-Sternwarte mit den grössten und kräftigsten Instrumenten, welche die Wissenschaft gegenwärtig besitzt, von zwei ausgezeichneten Astronomen angestellten Beobachtungen, — diesem in jeder Beziehung so höchst merkwürdigen Weltkörper eine sehr ausführliche Betrachtung widmet. Wie schon der Titel besagt, besteht die Schrift aus zwei Abtheilungen. — Die erste Abtheilung enthält die von Herrn O. Struve am Refractor angestellten Beobachtungen (natürlich nicht ohne die auf dieselben gegründeten Rechnungen) vom 2. September bis 13. October, wo um $20^h\,20^m$ die Beobachtungen am Fernrohre, wegen Unruhe und Undeutlichkeit der Bilder in der Nähe des Horizonts, geschlossen werden mussten, nachdem Lieutenant Smysloff noch mit blossem Auge den Lauf des Schweifs zwischen den Sternen gezeichnet hatte. Gesehen wurde der Comet in Pulkowa zum ersten Male am 16. August im Refractor in geringer Höhe über dem Nordhorizonte, am 19. August wurde er zum ersten Male mit blossen Augen erkannt, dichter Rauch, der von den in der Umgegend Pulkowa's brennenden Morästen aufstieg, hinderte aber, mit Ausnahme der beiden genannten Tage, alle Beobachtungen, die daher, wie schon erinnert, erst am 2. September beginnen konnten; am 13. October $20^h\,20^m$ wurden die letzten Spuren des Cometen auf halbem Wege zwischen α Herculis und α Lyrae erkannt. Mehrere treffliche, in grossem Maassstabe ausgeführte lithographirte Abbildungen sind dieser ersten Abtheilung beigefügt, und verleihen der Schrift noch einen besonderen Werth. — Die zweite Abtheilung enthält die von Herrn Dr. Winnecke am Heliometer angestellten Beobachtungen nebst Bemerkungen

über die Natur der Cometen. Die Beobachtungen umfassen denselben Zeitraum wie die vorhergehenden, und zerfallen, nebst den Bemerkungen über die Natur der Cometen, in die folgenden einzelnen Abtheilungen: Ortsbestimmungen des Cometen; Kern des Cometen; Kopf des Cometen; Schweif des Cometen; vom Kerne nach Dimension und Helligkeit; vom Kopfe; von der schwachen Umhüllung; vom schwachen, schmalen Schweife; vom hellen Schweife. Auch dieser Abtheilung sind mehrere werthvolle Lithographieen beigefügt, und Bemerkungen über die sämmtlichen Lithographieen, — im Ganzen sechs schöne grosse Tafeln, — beschliessen die Schrift. Die zweite Abtheilung enthält eine grosse Menge der interessantesten und lehrreichsten Notizen über frühere Cometen, und rücksichtlich der theoretischen Betrachtungen hat sich der Herr Verfasser mit Recht vorzugsweise an die bekannte schöne, von Bessel entwickelte Theorie angeschlossen. Dass beide Abtheilungen viele neue interessante Bemerkungen und Betrachtungen enthalten, welche die Astronomen zu neuen Forschungen über die Natur der Cometen anregen werden und müssen, versteht sich bei so ausgezeichneten Beobachtern von selbst.

Wir halten diese Schrift, welche ein neues schönes Zeugniss von dem Erfolge, mit welchem die Astronomen der grossen russischen Haupt-Sternwarte die ihnen gewordene Aufgabe zu lösen eifrig bestrebt sind, für sehr wichtig, und zwar nicht bloss für den Donati'schen Cometen allein, sondern für die ganze Cometentheorie überhaupt. Dieselbe ist nicht bloss für den streng wissenschaftlichen Astronomen, sondern wegen der vielen darin enthaltenen allgemeinen Betrachtungen über die Weltkörper, denen sie gewidmet ist, auch für jeden Liebhaber der Astronomie von dem grössten Interesse, und wird von uns daher zu der allgemeinsten Beachtung dringend empfohlen.

Physik.

Lehrbuch der Experimental-Physik von Dr. Edmund Külp, Professor der Physik und Mathematik an der höheren Gewerbschule zu Darmstadt. In vier Bänden. — Erster Band: Die Statik und Dynamik fester und flüssiger Körper. Mit 166 Abbildungen im Text. Darmstadt. 1860. (Diehl.) — Zweiter Band: Die Lehre vom Schall und vom Licht. Mit 438 Abbildungen im Text. Darmstadt. 1857. 1858. (Diehl.) 8.

Wir haben mit der Anzeige dieses Werks bis jetzt gezögert, weil wir erst das Erscheinen aller vier Bände, auf welche dasselbe laut seinem Titel berechnet ist, abwarten wollten, um so mehr, weil der zweite Theil einige Jahre früher als der erste erschien. Wenn nun aber auch jetzt erst die beiden vorliegenden Theile erschienen sind, so glauben wir doch mit einer Anzeige nicht länger warten und dieselbe bis zu dem Erscheinen der zwei letzten Theile hinausschieben zu dürfen, weil wir der Meinung sind, dass das Werk allerdings verdient, in einem weiteren Kreise möglichst bald bekannt zu werden, wozu wir gern auch von unserer Seite Einiges beitragen möchten. — Zur Charakterisirung desselben im Allgemeinen bemerken wir zuvörderst und heben es lobend hervor, dass es beiden Seiten der Physik: der experimentellen oder, wenn wir so sagen dürfen, der praktischen Seite und der mathematischen Seite gleiche Aufmerksamkeit schenkt, die Physik nach beiden Seiten hin mit gleicher Gründlichkeit und Ausführlichkeit zu behandeln strebt. Gerade diese doppelte Richtung, ohne besonders hervortretende Bevorzugung der einen vor der anderen, ist nach unserer Meinung das Charakteristische dieses Werks, wodurch es sich auch namentlich einen ehrenvollen Platz in der physikalischen Literatur sichern wird. — Was nun insbesondere die experimentelle Seite desselben betrifft, so erhellet schon aus der grossen Zahl von 604 vortrefflich ausgeführten Figuren und Abbildungen, von denen ein sehr grosser, wo nicht der grösste Theil vollständig ausgeführte Darstellungen von Instrumenten und Apparaten sind, dass der experimentelle Theil mit besonderer Liebe von dem Herrn Verfasser behandelt worden ist, und jedenfalls des Lehrreichen sehr viel enthält, wobei noch mit besonderem Lobe hervorgehoben werden muss, dass die hier beschriebenen Versuche fast sämmtlich im eigenen physikalischen Kabinette wirklich angestellt und öfters wiederholt worden sind, wobei der Herr Verfasser von seinen Collegen, den Herren Dreser, Fischer, Waibler und Zehfuss, mit sehr wesentlichem Erfolge unterstützt wurde. Lehrern also, welche sich dieses Buchs als Hülfsmittel bei ihrem Unterrichte bedienen, ist hiedurch die Gewissheit gegeben, dass sie sich nicht unnöthigerweise und ohne irgend welchen günstigen Erfolg mit den hier beschriebenen Versuchen abmühen werden, was jedenfalls ein sehr beachtenswerther Vorzug dieses Werks ist. Zugleich haben wir hieraus mit Freuden entnommen, wie reich ausgestattet der physikalische Apparat der Lehranstalt sein muss, welcher der Herr Verfasser seine Kräfte schon seit einer langen Reihe von Jahren widmet. — Was ferner die mathematische Seite betrifft, so ist den Lesern des Archivs genugsam bekannt, dass wir alle die physikalischen

Lehrbücher stets mit besonderer Freude begrüssen, welche darauf ausgehen, keinen Satz oder kein Gesetz, welche einer strengen mathematischen Begründung bedürfen und ohne eine solche gar nicht wahrhaft verstanden und begriffen werden können, ohne eine solche Begründung zu lassen. Dass der Herr Verfasser auch in dieser Beziehung Verdienstliches geleistet hat, lehrt dem Kundigen der erste Blick in das Werk. Wenn auch ein Paar Darstellungen, wie etwa Thl. II. S. 7., an das Gebiet der höheren Analysis zu streifen scheinen, so hat sich der Herr Verfasser doch sonst überall nur der sogenannten Elementar-Mathematik bedient, und ist nur so weit gegangen, als diese Vorkenntnisse gestatten, was wir vollkommen billigen und der Tendenz eines solchen Buchs allein entsprechend halten.

Nach dieser allgemeinen Charakterisirung des Werks müssen wir uns leider begnügen, nur noch den Hauptinhalt der beiden vorliegenden Bände anzugeben, was jedoch hinreichend sein wird, um dem Leser eine Anschauung von der Reichhaltigkeit des ihm hier gebotenen Materials zu geben.

Erster Theil. Einleitung. — Erste Abtheilung. Gleichgewicht und Bewegung fester Körper. I. Von den Körpern und den Kräften im Allgemeinen. (Uebereinstimmung und Verschiedenheit der Körper. Kräfte der Materie. Wesen der Materie und Wesen der Kraft. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.) II. Gleichgewicht des Festen. Statik. (Einwirkungen der Schwere. Gleichgewicht der Kräfte an Maschinen. Cohäsionskräfte.) Aus der Cohäsion entspringende Hindernisse der Bewegung. III. Bewegung des Festen. Dynamik. (Verschiedene Arten von Bewegung. Bewegung und Stoss fester Körper. Drehungsbewegung. Pendelbewegung. Allgemeine Gravitation.) — Zweite Abtheilung. Gleichgewicht und Bewegung flüssiger Körper. I. Gleichgewicht des tropfbar Flüssigen. Hydrostatik. (Druck und Gleichgewicht tropfbar flüssiger Körper. Feste Körper in flüssigen. Specifisches Gewicht fester und flüssiger Körper. Wirkungen zwischen den Flüssigkeitstheilen unter einander, wie zwischen ihnen und den Theilen fester Körper.) II. Bewegung des Trofbarflüssigen. Hydrodynamik. (Ausfluss des Wassers aus Gefässen. Bewegung des Wassers in längeren Röhren. Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen. Hydraulischer Stoss und hydraulische Maschinen.) III. Gleichgewicht des Luftförmigen. Aerostatik. (Atmosphärischer Druck, wobei auch das Höhenmessen mit dem Barometer mit genügender Ausführlichkeit behandelt ist. Expansivkraft. Aerostatische Maschinen, Auftrieb der Luft. Cohäsionserscheinungen bei den Gasen.) IV. Be-

wegung des Luftförmigen. Aerodynamik. — **Zweiter Theil.** Erste Abtheilung. Die Lehre vom Schall. Akustik. I. Schwingungen der festen Körper. (Stehende Schwingungen. Fortschreitende Schwingungen. Tönende Schwingungen. Schwingungsweisen verschiedener Körper.) II. Schwingungen der Luft. (Tönende Schwingungen der Luft. Fortpflanzungs-Geschwindigkeit des Schalls. Numerische Bestimmung der absoluten Tonhöhen und Beisammensein mehrerer Schwingungen. Verbreitung des Schalls. Werkzeuge des Gehörs und der Stimme. Schwingungen tropfbarer Körper.) — Zweite Abtheilung. Die Lehre vom Licht. Optik. I. Von den Eigenschaften des Lichts, wie sie bis zur Entdeckung der Interferenz und Polarisation bekannt waren. (Geradlinige Fortpflanzung des Lichts, Orthoptik. Zurückwerfung des Lichts, Katoptrik. Brechung des Lichts, Dioptrik. Zerstreuung oder Dispersion des Lichts, Dioptrische Chromatik. Absorption des Lichts, absorptive Chromatik. Linsengläser.) II. Vom Sehen. III. Interferenz und Polarisation. (Interferenz, Reflexion und Refraction im Sinne der Wellentheorie. Beugung und Farben dünner Körper. Doppelte Brechung. Fortsetzung der Polarisation. Polarisations-Chromatik. Kreisförmige und elliptische Polarisation. Einiges über optische Instrumente und die Photographie.)

Wir wünschen dem Werke alle Aufmerksamkeit, welche es recht sehr verdient, und sehen dem Erscheinen der beiden letzten Theile mit Verlangen entgegen.

Lehrbuch der Elektricität von J. Gavarret, Professor der Physik an der medicinischen Facultät zu Paris. Deutsch bearbeitet von Dr. Rud. Arendt. Erster Theil, zweite Lieferung. Zweiter Theil. Mit 280 und 176 in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig. Brockhaus. 1859. 1860.

Die erste Lieferung des ersten Theils dieser in jeder Beziehung ausgezeichneten Uebersetzung oder vielmehr Bearbeitung des trefflichen Traité d'électricité par J. Gavarret. Tome I. Paris 1857. Tome II. Paris. 1858. 8. ist im Literar. Ber. Nr. CXXVIII. S. 6. kurz angezeigt worden, und wir freuen uns, das Werk jetzt vollständig vor uns liegen zu sehen. Der Charakter des ganzen Werks ist der a. a. O. von uns angegebene, d. h. der Verfasser hat nach unserer Meinung vorzugsweise eine mehr elementare, zugleich der Praxis dienende Darstellung der Lehre von der Elektricität, unter Voraussetzung eines nur geringen Maasses mathematischer Kenntnisse, geben wollen, ohne jedoch, was wir lobend anerkennen müssen, die Anwendung der Mathematik, wo dieselbe unentbehrlich war, ganz auszuschliessen, indem sich vielmehr mehrere recht elegante mathematische Darstellungen finden. So weit unsere Kenntniss dieses Gegenstandes reicht, ist keine Lehre oder Entdeckung, die irgend wie Beachtung verdient, übergangen worden, und die Darstellung darf nach unserer Meinung eine vollständige genannt werden, so weit wenigstens der Zweck eines Lehrbuchs es erfordert. Hauptsächlich aber ist diese Vollständigkeit der Uebersetzung zu vindiciren, und derselben ist durch die vielfachen Zusätze, die von dem Herrn Uebersetzer

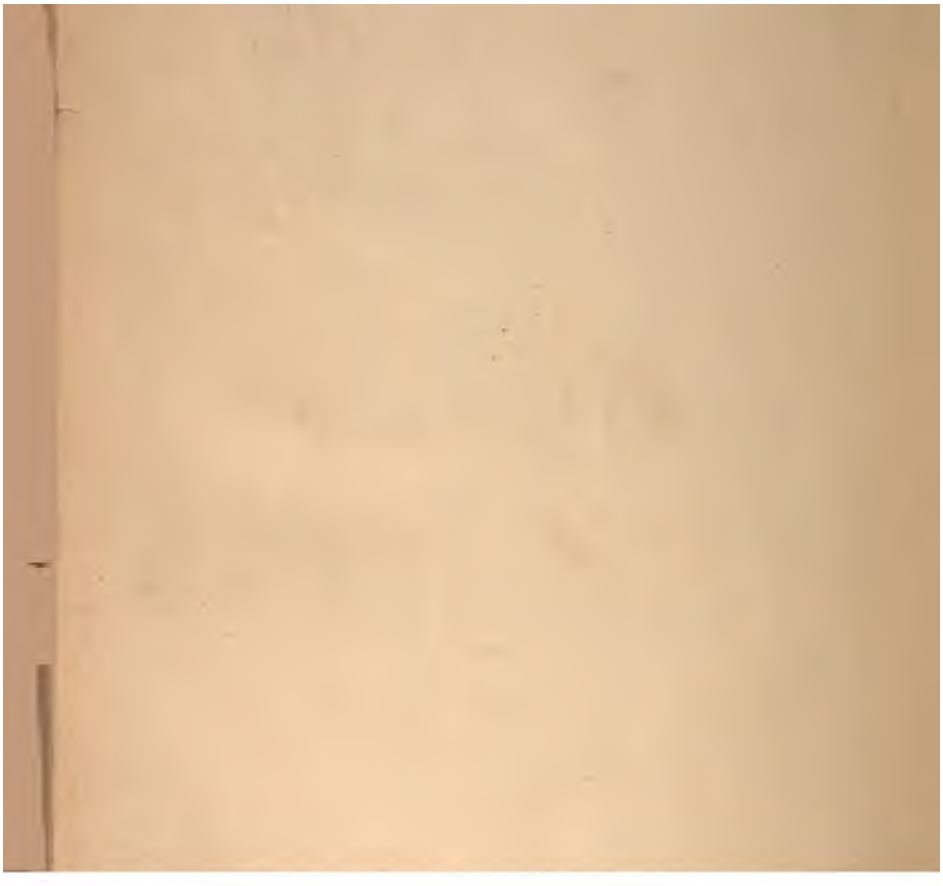
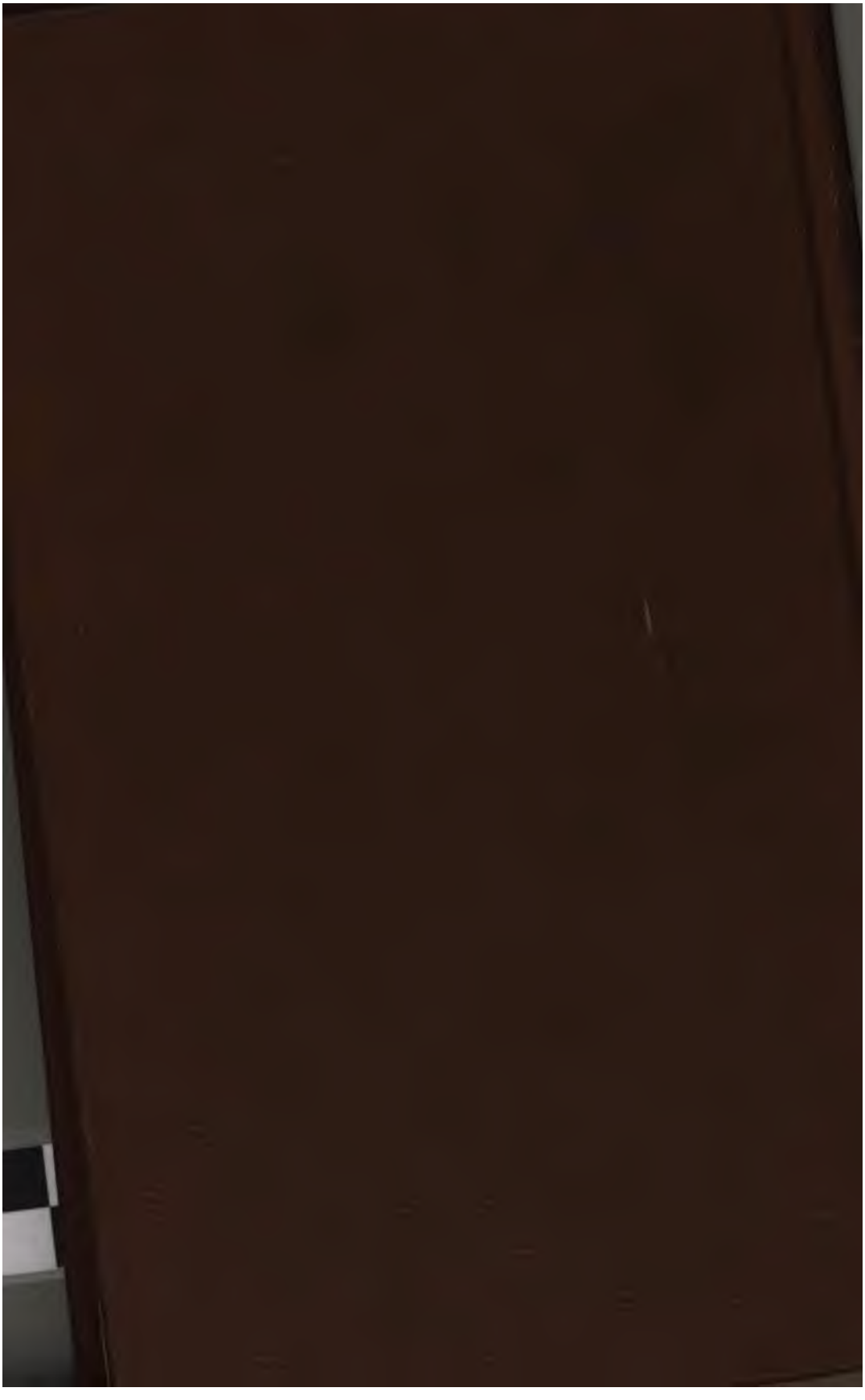
herrühren, ein sehr wesentlicher Vorzug vor dem Originale verliehen worden, wobei mit Recht vorzüglich auch die Arbeiten deutscher Physiker und Chemiker, wie Wiedemann, Ritter, Böttger, Kolbe, Poggendorff, Wöhler, Buff, Lenz, Becker, Reich, Weber, Plücker, die im Original übergangen waren, Berücksichtigung und Beachtung gefunden haben. Dass der Herr Uebersetzer diese Zusätze dem Text unmittelbar und geradezu einverleibt, nicht als Noten beigefügt hat, ist jedenfalls vollständig zu billigen, besonders da derselbe im Vorwort zum zweiten Theile eine Uebersicht dieser Zusätze mit genauer Angabe der Seitenzahlen gegeben hat.

Die erste Abtheilung ist der Statischen Elektricität gewidmet und handelt nach einer Einleitung: I. Von den elektrischen Kräften. (Gesetze der Anziehung und Abstossung, Vertheilung der Elektricität.) II. Von der Elektrisirung durch Influenz oder Induction. (Allgemeine Erscheinungen, Elektroscope, Apparate zur Elektricitäts-Entwicklung. Rolle elektrischer Körper bei der Induction. Condensations-Apparate. III. Von der elektrischen Entladung. (Conductive Entladung. Disruptive Entladung. Noten, vorzüglich mathematischen Inhalts, über die Theorie der Drehwaage und des Condensators.)

Die zweite Abtheilung enthält die Lehre vom Magnetismus. (Allgemeine Erscheinungen. Hypothese zweier magnetischer Fluida. Magnetische Kraft der Erde. Gesetze der magnetischen Wirkung. Verfahren zum Magnetisiren von Stahlstäben.)

Die bei Weitem grösste dritte Abtheilung behandelt die dynamische Elektricität, und bietet eine so grosse Ausführlichkeit und Mannigfaltigkeit dar, dass wir uns hier begnügen müssen, nur den Hauptinhalt der einzelnen Kapitel — nicht auch, wie wir vorher gethan, der einzelnen Artikel, — anzugeben, nämlich: Einleitende Bemerkungen. I. Elektrodynamische Phänomene. II. Die Quellen der elektromotorischen Kraft. III. Chemische Eigenschaften der Elektricität. IV. Allgemeine Gesetze der elektrischen Ströme. V. Elektrodynamische und magnetoelektrische Induction. VI. Wirkung des Magnetismus auf das Licht und auf alle Naturkörper. VII. Mechanische und physikalische Wirkungen der Elektricität.

Die vierte Abtheilung betrifft endlich die atmosphärische Elektricität. (Auffindung der atmosphärischen Elektricität. Vertheilung der atmosphärischen Elektricität. Quelle der atmosphärischen Elektricität. Schutzmittel gegen den Blitz. Der Blitzableiter.)

Die äussere Ausstattung rücksichtlich des Drucks und der Holzschnitte ist vortrefflich und macht der berühmten Verlagshandlung alle Ehre.

Wir können von unserer Seite versichern, dass wir dieses auch durch Eleganz und Deutlichkeit der Darstellung sich auszeichnende Werk mit grossem Interesse und vielfacher Belehrung gelesen haben, und wüssten namentlich Lehrern an höheren Unterrichts-Anstalten, kein zweckmässigeres Buch für ihren Gebrauch zu empfehlen. Der Herr Uebersetzer verdient allen Dank, dass er sich dieser Arbeit mit so viel Fleiss und Geschick unterzogen hat.